UNE PETITE HISTOIRE DE LA DIVISION : DE LA MÉTHODE GALLEY A LA MÉTHODE ACTUELLE

Jeanne GUIET
Maître de conférences en Sciences de l'Education
I.U.F.M. de Picardie, centre de Beauvais

Puisqu'elle appartient à l'histoire, celle des mathématiques, mais aussi celle de l'enseignement des mathématiques, l'histoire de la division constitue un fragment de notre héritage sur lequel repose une partie de l'arithmétique élémentaire que nous enseignons aujourd'hui. Dans une premier article[1] , nous avons décrit l'évolution de de cette opération, de l'antiquité égyptienne jusqu'au XVIIème siècle.

Nous poursuivons cette étude historique dans ce second texte. Nous nous centrons ensuite sur des questions d'enseignement en présentant l'étude de quelques exemples de cahiers d'élèves et de manuels[2] à l'époque de la Convention, période durant laquelle l'algorithme actuel est progressivement mis en place. Il ne s'agit pas de savoir comment les conceptions de l'enseignement et les programmes de l'époque sont mis en oeuvre dans les manuels, mais quels problèmes ils reflètent et quels témoignages ils nous apportent.

I - HISTORIQUE

1. Définitions

A partir du XVIème siècle et selon les périodes, la division est généralement considérée comme la quatrième des opérations fondamentales, la cinquième si la numération est incluse, ou la septième quand la duplication et la médiation sont considérées séparément.

En général, d'après Smith («History of mathematics», 1958), l'opération est connue aussi bien comme une **division**, comme chez Fibonacci (1202), que comme **partition**, dans «l'Arithmétique» de Treviso (1478) ainsi que chez des auteurs tels Huswirt (1501), Ghaligai (1521), Stifel (1544), Scheubel (1545), Ortega (1512), Savonne (1563) et Santa-Cruz (1594), Cataldi (1602). Cette forme était utilisée par Heron, Pappus et Diophante et par tous ceux qui utilisaient le terme meri'zein, (meri'zein : à partager en grec ancien). Beaucoup d'auteurs utilisent les deux termes.

[1] «Une petite histoire de la division : de ses origines jusqu'à la méthode Galley», «Grand N», n° 57, pp. 33 à 54, 1995-1996.
[2] Nous remercions le directeur du Musée National de l'Education de Rouen de son aimable autorisation pour la publication de documents.

Nous trouvons chez Baker (1568) les mots «*deuision*» ou «*partition*» et chez Digges (1572) «to deuide or parte». Ils disent que la «diuision sheweth onlely howe often the less summe is conteyned in the bigger» («*la division montre seulement combien de fois la somme mineure est contenue dans la majeure*», Digges, 1572) ou bien que «Diuision doth search how oft the diuisor, in Diuidend may be quoted or found, whereof the quotient is the decidor» («*La division cherche combien de fois le diviseur peut être fractionné ou trouvé dans le dividende, le quotient étant le décideur*», Digges, 1600).

Le mot quoted est lié au «quotient». Peletier (1549) explique sa définition : «*c'est savoir combien de fois un moindre nombre est contenu en un plus grand*». **Ceci excluait donc les cas où le dividende était inférieur au diviseur**, pour la raison qu'un calcul comme 3/4 ne pouvait être «fois» dans l'utilisation primitive du mot. Smith souligne («History of mathematics», pp. 128-129, 1958) que cet aspect était intentionnellement passé sous silence par beaucoup d'auteurs, et que l'idée première partait manifestement d'un diviseur entier et d'un quotient entier. Il nous semble que la qualification d'«oubli» est très simplificatrice : il s'agit simplement des premiers concepts utilisés à l'époque.

Une seconde définition correspond à la méthode suivante : il s'agit de trouver un nombre qui est contenu un certain nombre de fois dans le dividende avec l'unité contenue dans le diviseur. On trouve cette méthode dans Maximus Planudes (1340) et dans «l'Arithmétique» de Treviso (1478). Une amélioration de cette définition est basée sur le «ratio» (ou mesure d'une taille relative de deux classes exprimant une proportion : diviser ou partager-distribuer) ; il s'agit de trouver un nombre qui possède, avec l'unité, le même rapport que celui que du dividende avec le diviseur : c'est souvent le cas dans les livres du XVIème siècle.

Ce qui était naturel au Moyen Age quand la division était accomplie sur le boulier, c'était de prendre pour base la soustraction pour fonder sa définition. On trouve le même sens dans la méthode «Galley».

De toutes les définitions élémentaires, la plus généralement approuvée décrit l'opération comme **la recherche d'un nombre qui, multiplié par le diviseur, est égal au dividende**. C'est peut-être la plus vieille définition encore existante et qui a encore l'approbation de beaucoup d'auteurs de manuels scolaires actuels.

D'après Smith (p.130, 1958), les définitions précédentes n'ont pas, en général, distingué les deux notions de division illustrées par les cas 6ft ÷ 3ft = 2 et 6ft ÷ 2ft = 3, bien que la dernière définition inclue les deux cas. Rudolff (1526) semble avoir été le premier à faire cette distinction très clairement, et Stifel (1545) à l'avoir faite en second et Tartaglia par la suite. Divers auteurs des XVIème et XVIIème siècles l'ont aussi mentionnée.

2. Terminologie de la division

Les premiers auteurs nommaient communément deux des nombres utilisés dans la division le «*numerus dividendus*» (nombre qui doit être divisé), et le «*numerus divisor*», aucun nom spécifique n'étant donné au quotient, et aucune mention au reste. Ces noms sont, bien sûr, des termes non techniques, et ils apparaissent comme des expressions simples familières dans beaucoup de travaux médiévaux. Cependant, progressivement, le mot *numerus* fut abandonné, et les termes *dividendus* et *divisor* devinrent des noms techniques, comme ceux que l'on utilise à présent. Des mots comme «réponse» ou «résultat» étaient communément utilisés pour le quotient et semblaient tout à fait acceptés à cette époque.

L'abandon du mot «*numerus*» et l'acceptation d'une abréviation rejoint un autre problème conceptuel, celui de la nominalisation, qui suppose que l'on considère les nombres d'une autre manière que l'information sur laquelle on va opérer. On va les regarder comme des objets.

Les termes ont subi différents changements. Le diviseur a fréquemment été appelé le «*parter*» ou le «*dividens*», mais ce dernier terme a été l'un des plus communément utilisés. Le dividende a généralement été appelé par son nom (actuel), bien qu'il y ait eu des termes équivalents à «*partend*», avec des variantes linguistiques. Le quotient a fréquemment été appelé le «*produit*» (Frisius, 1540, et autres auteurs latins), la «*partie*» (la «*parte*» dans l'ouvrage de Treviso), l'«*exiens*» (Scheubel, 1545) et «*the outcome*». Ce dernier terme, utilisé par les auteurs anglais, a été d'ailleurs le favori dans la plupart des langages européens.

Pour des raisons évidentes, le nom de reste a varié plus que les autres. Les écrivains latins médiévaux utilisaient «*numerus residuus*», «*residuus*» et «*residua*», et d'autres termes variés s'y rapportant, et d'autres auteurs par la suite employèrent le même mot, pour le reste comme pour la fraction du quotient : par exemple, dans le cas de $7 \div 3 = 2$, on utilise en 1689, le terme de reste pour le chiffre 1 (car $7 = 2 \times 3 + 1/3$).

Un des avantages consiste dans le fait que le résultat ne donne pas de reste, mais est exprimé sous la forme d'une fraction ; cela rend la division parfaitement inverse de la multiplication. **Le reste est une notion à laquelle les enfants se heurtent encore actuellement**.

3. Le processus de division

L'opération de division était considérée comme **une des plus difficiles** dans l'ancienne *logistica* au XVème siècle. Considérons avec humour ce que disait Pacioli (1494). Il remarquait que «si un homme est capable de diviser, tout devient facile pour tous les autres calculs inclus au sein de l'opération». Il console l'apprenant, toutefois, par un hommage aux bénéfices du travail difficile. Aussi élogieux était Gerbert[3] en 980 si les difficultés étaient vaincues, et il ne donnait pas moins de dix étapes dans la résolution, commençant par le calcul des unités avec les unités, traitées avec des soustractions implicites. Jusqu'en 1424, Rollandus donnait seulement les cas les plus simples, avec des nombres composés d'un seul chiffre, et presque deux siècles plus tard Hylles (1600) reconnaissait les difficultés : la «*Diuision*» est estimée comme l'une des opérations d'arithmétique les plus préoccupantes et requiert un reste non demandé.

---

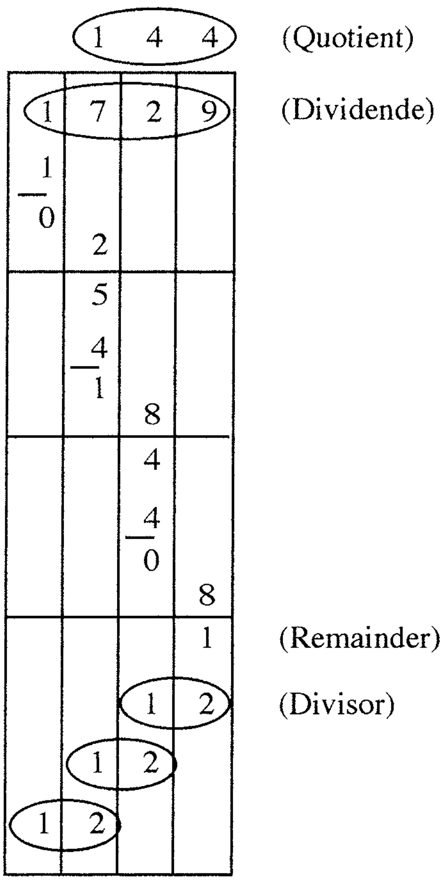
[3] Lire à ce sujet «Grand **N**», n° 57, pp. 46-47.

4. La construction progressive de notre «longue» division

Smith pense qu'il est impossible de fixer une date exacte des origines de notre division actuelle, car son évolution s'est déroulée peu à peu. Nous trouvons dans différents travaux arabes et persans des présentations comme celle présentée ci-dessous illustrant le cas :

$1729 \div 12 = 144$ et avec 1 pour reste.

Cet exemple ressemble à notre modèle mais il présente néanmoins des points communs avec la méthode «Galley».



Ce document (Smith, p.140, 1958), peut s'analyser selon les étapes suivantes :

A) Après avoir divisé 17 par 12, on écrit le chiffre 1 au-dessus du 7. L'écriture du 12 est «décalée», comme dans la méthode «Galley».

B) La soustraction est effectuée, soit $17 - 12 = 5$

C) Il faut lire ensuite le nombre 52 en «empruntant» le 5 au calcul précédent et le 2 au dividende ; et calculer $52 \div 12 = 4$, que l'on inscrit au quotient. Le diviseur, 12, est réécrit tout en bas du tableau.

D) Le calcul donne $4 \times 12 = 48$, ôté de 52 reste 4.

E) On lit $49 \div 12$ (le 9 est dans le dividende), ce qui donne 4. $4 \times 12 = 48$, ôté de 49, il reste 1.

Le chiffre 1 est le reste (remainder), le résultat est 144.

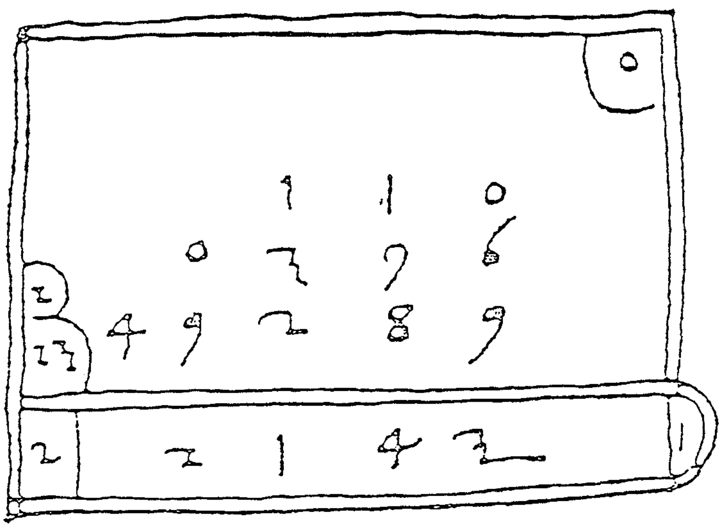
Au XIVème siècle, Planudes donnait ce qu'il appelait un système (ou mécanisme) arabe. C'est un modèle plus récent que celui présenté ci-après mais qui est bâti sur les mêmes principes :

$$
\begin{array}{l}
25)\ 625(25 \\
\qquad\quad \underline{4} \\
\qquad\quad 22 \\
\qquad\quad \underline{10} \\
\qquad\quad 125 \\
\qquad\quad \underline{100} \\
\qquad\quad 25 \\
\qquad\quad 25
\end{array}
$$

soit 625 ÷ 25 = 25, le diviseur étant placé à gauche et le quotient à droite.

La présentation en tableau n'existe plus. Les calculs intermédiaires sont sous la forme de soustractions posées et la forme générale privilégie une lecture de gauche à droite. Cet algorithme ressemble beaucoup au nôtre.

Le XVème siècle apportait une méthode qui annonçait la forme actuelle, sous le nom de *«a danda»* (en donnant). Cette appellation provient du fait que lorsqu'un produit partiel est soustrait, la procédure consiste à «abaisser» un chiffre provenant du dividende et à le «donner» au reste. Une belle illustration d'un manuscrit de 1460 est montrée ci-dessous ; le reste est écrit chaque fois avant le «donnant» décrit ci-dessus. Les noms de *«danda»* ou *«dande»* dans les régions de Toscane sont encore utilisés pour désigner cette division. Cela a été appliqué, cependant, avec des formes quelque peu différentes de celle montrée ici.



L'illustration en question provient d'un volume appelé un «Arithmétique Commercial Ordinaire» et a pour auteur Paolo Dagomai , né à Prato en 1281 et mort à Florence en 1374, qui fut un célèbre arithméticien. Comme les professeurs florentins produisaient au XIVème et XVème siècle des écrits et des formes de nombres qui sont les indicateurs de cette période et ne ressemblent pas à ceux du XIVème siècle, on explique ainsi que l'origine remonte peut-être au XVème siècle (Smith, «Rara Arithmetica», 1970, p.437). L'exemple de cette division est unique, et ne suit ni la «*Galley*» ni la méthode «*Danda*». Le cas illustré, 49289 ÷ 23 = 2143, peut être explicité en plusieurs étapes comme suit :

Première étape :
23 (49289 — soit 49289 ÷ 23

Deuxième étape :

03	
23 (49289	soit 2 x 2 = 4 ôté de 4 reste 0
2	on inscrit un 0 au-dessus du 9
	2 x 3 = 6 ôté de 9 reste 3
	on inscrit le 3 au-dessus du 2
	le quotient est écrit au-dessous

Troisième étape :

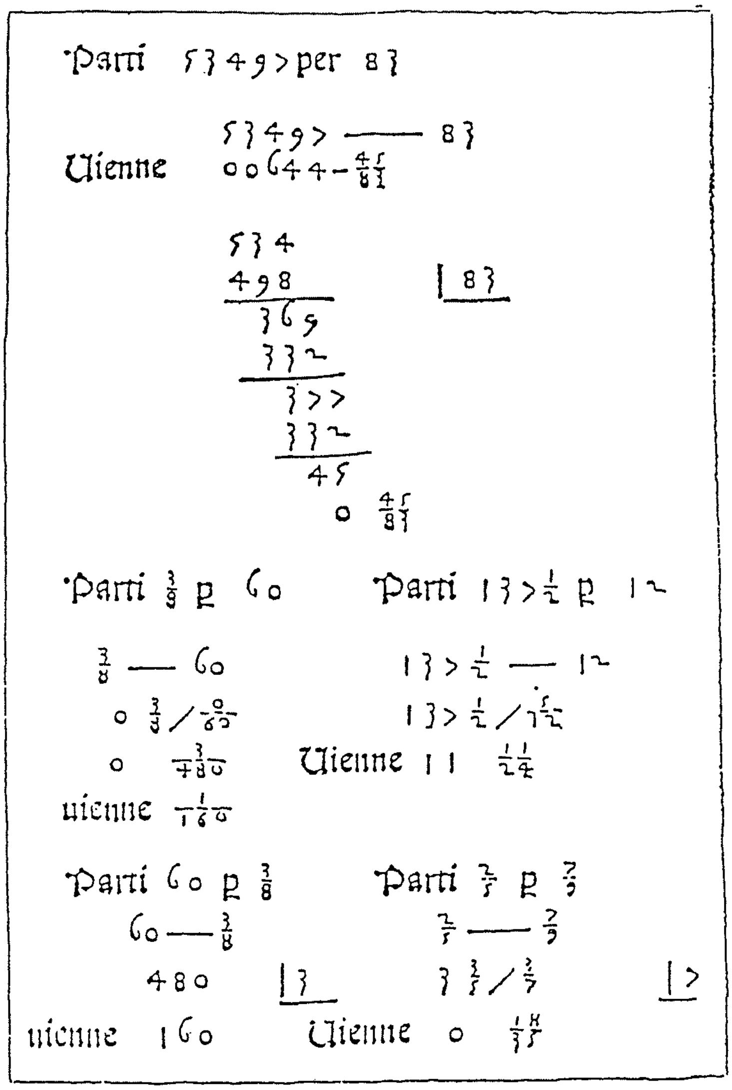
039	soit : 32 ÷ 23 = 1, 1 x 23 = 23 ôté de 32
23 (49289	reste 9 qui est inscrit au-dessus du 8
21	remarquons que 32 se lit verticalement

Quatrième étape :

0396	soit 98 ÷ 23 = 4, 4 x 23 = 92 ôté de 98
23 (49289	reste 6 qui est inscrit au-dessus du 9
2143	remarquons que 98 se lit verticalement
	puis 69 ÷ 23 = 3, 3 x 23 = 69 ôté de 69 reste 0

La position des restes est remarquable. Ils s'inscrivent au-dessus du calcul. Le zéro situé dans le coin gauche indique le reste et les chiffres 2, 2, et 1 sont les retenues contenues dans les calculs intermédiaires. L'auteur considère ceci comme le plan de la «*danda*» (le précurseur de notre division actuelle), l'utilisation de ce nom venant immédiatement après. Un trait dépareillé apparaît dans le placement du second diviseur dans la division des fractions, à cette époque.

Le processus qui consiste à poser les soustractions sous le dividende et «à abaisser» les chiffres du dividende au fur et à mesure est illustré dans l'un des premiers livres imprimés («Calandri's Arithmetic», 1491). Le premier exemple de ce genre est le suivant : 5349 ÷ 83 (Smith,«Rara arithmetica», p.47). Il suit le principe de la division actuelle, mais le quotient n'était pas écrit sous le diviseur et le reste était donné sous la forme fractionnaire.



Cette méthode fut identifiée comme étant la troisième méthode de Pacioli. Sa fréquence d'utilisation augmente au cours du siècle suivant, où elle commence à être considérée comme un mécanisme valable et intéressant : «De tertio modo dividendi dicto danda» (la troisième façon de diviser dite *«danda»*). Pagani, en 1591, en parlait en ces termes : «Partire de la danda est un essai bel et vague». Cognet, en 1573, mentionne les avantages de ne pas barrer les chiffres, ce qui était en usage dans la méthode «Galley» : «Les marchands italiens, pour ne trancher aucune figure, divisent en la sorte qui s'ensuit», et Tranchant (1566) remarque : «Il y a une autre belle forme de partir, sans trancher aucune figure» ou «sans rien couper».

Dès le début du XVIIème siècle, cette méthode commence à remplacer progressivement la division nommée «Galley». Cataldi, en 1602, nous la présente comme étant sa première méthode, le quotient étant alors placé sous le dividende. La première partie de ce travail est présentée dans l'ouvrage de Smith (p. 143, 1958) :

```
37) 46201
       1248 ------------ 25 (reste)
     46
     37
      92
      74
    .........
```

Le quotient était placé sur la droite, en justifiant que c'était l'usage courant à Milan. Dans la méthode «Galley», le quotient se situait à droite du dividende.

A la fin du XVIIème siècle, la forme moderne de la division était bien établie, la méthode «Galley» étant considérée alors, tout au plus, comme une curiosité.

Il y a eu plusieurs variantes de la méthode «danda», mais l'une d'entre elles notamment omet les produits partiels comme suit :

```
             625
25)        15625
              62
              125
                0
```

Cataldi (1602) l'appelait «a danda» abrégée. Elle a été plus ou moins en vogue pendant trois siècles. Mais, d'après Smith, elle exige beaucoup trop d'efforts intellectuels pour devenir une pratique courante. Cette méthode occasionne des débats chez des professeurs américains qui, à Greenwood en 1729, discutaient des différentes méthodes. On peut limiter principalement ces diverses méthodes italiennes à deux types seulement : celui de la «danda» et sa forme contractée.

Une des plus intéressantes méthodes du XVIème siècle était celle d'Apianus (1527) qui suggérait la combinaison de fractions décimales. Pour diviser 11667 par 48, Apianus écrivait les parts du quotient, considérant 48 comme une unité, ce qui donnait substantiellement la présentation suivante :

	48	correspondant à 1
$\frac{1}{2}$	de 48 = 24	correspondant à 0,5
$\frac{1}{4}$	de 48 = 12	correspondant à 0,25
$\frac{1}{8}$	de 48 = 6	correspondant à 0,125
$\frac{1}{16}$	de 48 = 3	correspondant à 0,0625

5. Division et multiples du diviseur

Nicolas Chuquet (né en 1445, et mort vers 1500) utilisait le mot «*partiteur*» pour nommer le diviseur, désigné aussi par les termes «*parteur*» ou «*partisseur*» : c'est bien la notion de partage qui préside ainsi au sens donné à la division. En outre, on sait que dans l'Encyclopédie de d'Alembert (1751-1754), celui-ci donne avec précision un autre sens que celui de partage, celui de rapport, qui justifie ainsi d'une façon différente la définition du quotient (combien de fois).

D'Alembert donne avec une grande clarté les traditionnelles «deux significations de la division», la division-partage et la division-rapport, et remarque que c'est la seconde et non la première, qui justifie le mot «quotient», puisque quotient veut dire «combien de fois» ; or on peut dire «en 20 francs, combien de fois sont 5 francs», et répondre 4 fois ; dans ce cas, on a bien un quotient au sens strict du terme.

Tout ce qui était méthode pour résoudre une division était accompagné d'une table de multiples du diviseur.

Fibonacci (1202) traite différents cas de division. Le premier cas de division par un nombre à un chiffre est le suivant : il utilise $10000 \div 8$ comme un exemple où le quotient est sous le dividende et les restes en dessous. Fibonacci avertit le lecteur qu'il faut diviser par les facteurs d'un nombre dès que possible ; et quand le diviseur est plus grand que 10, il suggère d'utiliser les plus petits multiples de 10 comme un diviseur «trial».

Ces divisions étaient largement remplacées par la méthode «Galley», aussi donnée par Fibonacci et venant probablement des Arabes, d'après lui. Cela simplifiait la soustraction qu'il nommait «incidentale» de la division longue, et se trouvait particulièrement bien adaptée à l'utilisation de l'abaque de sable.

6. Adoption de la division actuelle sous la Convention

Dans «L'école normale de l'an III» (Dhombres, 1992), on apprend que cette école naquit de la volonté d'appliquer à l'éducation des futurs instituteurs la «méthode révolutionnaire», adoptée par le Comité de salut public en pluviôse an II (février 1794) afin de former des techniciens sachant raffiner du salpêtre, fondre et forer les canons, et capables de répandre à leur tour ces méthodes : «Le nouveau régime a tout accéléré» commentait Barère devant la Convention. Le 1er juillet 1794, il précisait : «ce mode révolutionnaire de cours publics est devenu pour le Comité un type d'instruction qui lui servira utilement pour toutes les branches des connaissances utiles à la République : et vous ne tarderez pas à en sentir le besoin au milieu d'une ligue vandale ou wisigothe qui veut encore proclamer l'ignorance, proscrire des hommes instruits, bannir le génie ou paralyser la pensée». Lakanal et Garat engagèrent la Convention dans une décision : «Vous avez voulu créer à l'avance, pour le vaste plan d'instruction publique qui est aujourd'hui dans vos desseins et dans vos résolutions, un très grand nombre d'instituteurs capables d'être les exécuteurs d'un plan qui a pour but la régénération de l'entendement humain dans une République de vingt-cinq millions d'hommes que la démocratie rend tous égaux. Dans ces écoles, ce n'est donc pas les sciences que l'on enseignera, mais l'art de les enseigner ; au sortir de ces écoles, les disciples ne devront pas être seulement des hommes instruits, mais des hommes capables d'instruire».

L'Ecole normale était créée le 9 brumaire an III (30 octobre 1794), et 1400 élèves étaient attendus.

Le rôle de ces cours de l'an III est d'autant plus important que, bientôt, les mathématiques deviennent une discipline obligatoire dans les lycées, alors qu'elles n'étaient qu'optionnelles dans les classes de philosophie des collèges sous l'ancien régime.

La première leçon de Laplace concerne le système métrique et sa décimalisation. «Très prosaïquement pour les leçons de l'Ecole normale, en prenant le soin de calculer à nouveau selon les latitudes les longueurs des portions du méridien terrestre, utilisant le grade (division de l'angle droit en 100 parties) et non le degré. Sa conviction était profonde, aussi bien que pour la décimalisation du temps décidée le 4 frimaire an II (24 novembre 1793), et qui, en dehors de la décade et du comput des mois, n'était pourtant plus d'actualité à l'époque du cours et pour laquelle Laplace s'engageait encore : «On peut croire cependant qu'à la longue la division décimale du jour remplacera sa division actuelle, qui contraste trop avec les divisions des autres mesures pour ne pas être abandonnée», (Dhombres, p. 49, 1992).

De nouveaux noms furent dès lors en usage : le mètre, dont Borda semble être le père, le gramme : les deux étymologies relevant du grec et donc du caprice des savants. «Caprice puisque la kyrielle des multiples et sous-multiples selon l'ordre décimal, mélangeait l'origine latine (milli, centi, déci) et l'origine grecque (myria, kilo, etc.), du myriamètre au millimètre, de l'hectare au centiare pour les aires, de la cade au centicade pour les volumes, du franc au décime et centime pour les monnaies. Bref, tout un vocabulaire neuf entrait de force dans la vie du citoyen ordinaire, et la sémantique choisie devait en principe éradiquer les conjugaisons des rapports si divers entre les stade, perche, maille, gros ou grain .» (Dhombres, p. 27, 1992).

L'opération de division va connaître dès lors une transformation importante : l'extension du sens accordé jusqu'alors à la division comporte l'introduction du système décimal. L'ensemble des contraintes qui vont apparaître alors dans le déroulement de l'algorithme est donné dans cet exemple extrait de la première leçon de Laplace du 1er pluviôse (20 janvier 1795) :

«Pour la division, on prend à gauche du dividende, le nombre de chiffres nécessaires pour contenir le diviseur ; on cherche combien de fois il est contenu dans le dividende partiel ; on écrit ce nombre, qui forme le premier chiffre à gauche du quotient.

On multiplie ce quotient partiel par le diviseur, on retranche le produit du dividende partiel ; à côté du reste, on abaisse le chiffre suivant du dividende et l'on forme un nouveau dividende partiel, que l'on divise de nouveau par le diviseur ; on écrit le quotient à droite du premier ; on continue ainsi jusqu'à ce que tous les chiffres du dividende soient abaissés ; ainsi ***la division est encore une opération très simple,*** *qui résulte du système de numération.*

Vous concevez que la facilité des opérations que je viens de vous décrire, dépend de la loi que suivant les unités des nombres en allant de gauche à droite les unités deviennent successivement de dix en dix fois plus petites ; mais rien ne force de s'arrêter aux unités simples : de même que l'unité simple est la dixième partie des *dizaines, de même vous pouvez imaginer les unités fractionnaires qui soient la dixième partie des unités simples ; et par la même raison, vous pouvez concevoir des dixièmes de dixième, ou des centièmes parties de l'unité principale, des millièmes, des dix millièmes, etc. Alors on forme ce que l'on appelle des nombres décimaux, et pour distinguer dans un nombre composé de décimales, les nombres décimaux, on met une virgule après le nombre qui exprime les unités simples....*

Dans la division, il ne faut mettre après la virgule que l'excédent du nombre des chiffres décimaux du dividende, sur le nombre des chiffres décimaux du diviseur. Avec cette seule attention, les mêmes règles qui ont lieu pour les entiers, s'appliquent aux décimales.

Dans la société, on a continuellement besoin d'employer des fractions d'unités, ou de diviser l'unité en parties plus petites, et ces parties en d'autres parties. vous sentez par là de quel avantage il est que toutes les divisions de l'unité soient décimales, parce que de cette manière, toutes les opérations d'arithmétique se trouvent réduites à celles que l'on fait sur les nombres entiers.

C'est là ce qui a fait adopter par la Convention Nationale le système de la division de toutes les unités en parties décimales. ***Pour connaître les avantages de ce système, il suffit de vous rappeler l'extrême complication qui résulte des divisions anciennement adoptées, quand il s'agit de multiplications ou de divisions complexes ... Cette arithmétique a de plus un avantage, c'est de réduire toutes les multiplications à de simples additions, et toutes les divisions à de simples soustractions».***

Notons ici que la division décimale sous sa forme actuellement enseignée, en France, est apparue assez tardivement. Le calcul en jeu dans l'opération constitue l'outil fondamental de la construction du sens enseigné. Il se fonde sur le principe même de la décomposition polynômiale des nombres. Le processus de modélisation de ce nouvel algorithme comporte schématiquement les étapes suivantes :

- l'évalution de l'ordre de grandeur,
- l'ordre des opérations liées au calcul sur les nombres entiers,
- le fractionnement des unités.

II - ETUDE D'ARCHIVES : CAHIERS D'ELEVES ET MANUELS

Nous avons voulu soulever la question suivante : quelles étaient les pratiques effectivement enseignées pendant la période de la Convention, ou plutôt juste avant et juste après ? A l'aide de divers documents, archives et cahiers d'élèves notamment[4], notre étude vise à brosser l'enseignement de la division à cette époque caractérisée par le «passage» de la méthode «Galley» à la méthode actuelle. Nous considérons ces cas particuliers come des témoignages intéressants sur les problèmes didactiques qu'ils reflètent.

[4]Documents du Musée National de l'Education de Rouen (cahiers d'élèves et manuels), et de l'I.N.R.P. (Institut National de Recherche Pédagogique) à Paris.

Deux périodes sont donc distinguées ici : quelques décennies avant la Convention et quelques décennies après. Nous avons consulté une cinquantaine d'ouvrages environ. Nous relevons deux algorithmes différents (la méthode dite «Galley» et la division utilisée actuellement) dans les manuels ou les manuscrits destinés à l'enseignement, et les cahiers d'élèves. Nos observations montrent que l'algorithme actuel a été mis en place au lendemain de l'adoption du système métrique, et ceci assez rapidement, autant dans les manuels que dans les pratiques d'enseignement.

Dans la période précédant la Convention, les quotients ou résultats de l'opération de division étaient représentés par des nombres entiers et les restes sous forme fractionnaire. Nos observations,[5] effectuées sur des élèves de la fin de l'école élémentaire et du début du collège, nous ont fait constater que les opérations les mieux acquises ne comportent pas de nombres décimaux. La virgule forme un obstacle dans le calcul du quotient. Le problème d'enseignement ainsi soulevé est celui de l'aide à apporter aux enfants pour qu'ils dépassent la structure des naturels. Le raffinement supplémentaire occasionné par le calcul de la partie décimale du quotient a été pendant longtemps ignoré. R. Neyret[6] nous apporte à ce sujet un éclairage particulièrement intéressant.

Les calculs s'appuyaient le plus souvent sur les tables de multiplication et les abaques, et selon les périodes, étaient réservés à certains érudits. L'accent est souvent mis sur la difficulté de l'opération de division et la longueur du calcul. Remarquons qu'il a fallu beaucoup de siècles pour que la forme actuelle l'emporte. Ce n'est pas un phénomène sans incidences dans la mémoire des hommes. Sans parler de mécanismes cognitifs, ou de mécanismes opératoires, on peut avancer, compte tenu des disparités entre les conditions des genèses historiques et des apprentissages scolaires, l'hypothèse de l'existence pour l'enseignement actuel de noeuds de résistance qui fonctionnent comme ont fonctionné les obstacles épistémologiques[7] dans le développement des mathématiques.

1.Analyse de manuels avant la Convention

Nous avertissons ici le lecteur que les extraits choisis sont reproduits tels qu'ils sont écrits, dans le langage de l'époque (et avec les fautes d'orthographe).

1.1. *Livre d'arithmétique de François Estienne Martelly (1736)*

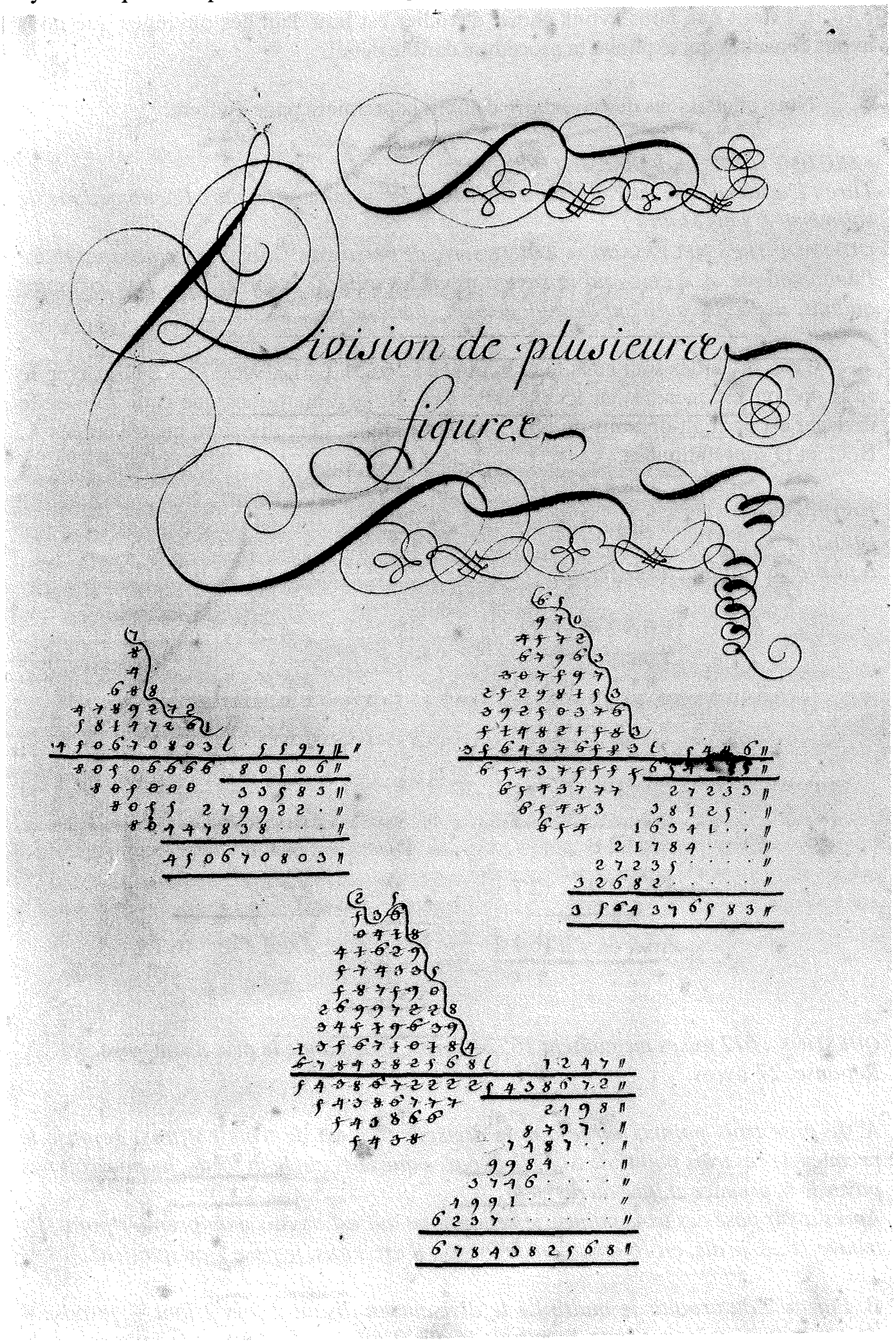
La procédure, dans la méthode dite «Galley», qui consiste à effacer les nombres au fur et à mesure ou à les rayer, rappelle celle qui était utilisée quand on effectuait ces divisions au XVIème siècle. Nous choisissons ici une page illustrant une *«Division de plusieurs figures»* (voir le document page ci-contre).

La procédure est systématiquement accompagnée de la vérification avec la multiplication. Dans de nombreux documents illustrant la période avant la Convention,

---

[5] «La division : une longue souffrance».
[6] «Contraintes et déterminations des processus de formation des enseignants», Thèse, Université Joseph Fourier, Grenoble I, 1995.
[7] Artigue M., 1991, Brousseau G., 1983.

on retrouve cette «preuve» qui accompagne les divisions, élément de contrôle systématiquement préconisé dans l'usage.



Livre d'arithmétique de François Estienne Martelly daté de 1736.
I.N.R.P., Musée National de l'Éducation, Rouen - Mont-Saint-Aignan

1.2. *Livre d'arithmétique de Barreme (1788)*

L'extrait que nous avons choisi d'étudier est issu d'un des ouvrages que nous avons consultés qui explicite la procédure dans le détail.

Nous choisissons de reproduire d'abord la première page du livre:

«ARITHMETIQUE DE BARREME (1788)
Titre : L'arithmétique du s^r^ Barrême ou le livre facile pour apprendre l'Arithmétique de soi-même & sans Maître ;
OUVRAGE TRES NECESSAIRE A TOUTE sorte de personnes : aux unes, pour apprendre l'Arithmétique, & à ceux qui la savent, pour les aider à rappeler dans leur mémoire quantité de Règles qui s'oublient facilement, faute de pratique».

Trois divisions sont ensuite expliquées : 16524 ÷ 612, 959574 ÷ 3114 (avec le reste 462 qui est encadré), et 15000000 ÷ 714. Nous remarquons que cette fois-ci, le diviseur est écrit au-dessous du quotient. Pour la première division, quatre étapes A, B, C, et D sont indiquées.

INSTRUCTION
DIVISION
A plusieurs Chiffres au Diviseur

A)
$$\begin{array}{ll} 16524 & (2 \\ \hline \bullet\bullet\bullet & (612 \end{array}$$

B)
$$\begin{array}{ll} 428 & \\ \cancel{1}\cancel{6}\cancel{5}24 & (2 \\ \hline \cancel{1}\cancel{2}\cancel{2}4 & (612 \end{array}$$

C)
$$\begin{array}{ll} 428 & \\ \cancel{1}\cancel{6}\cancel{5}24 & (27 \\ \hline \cancel{1}\cancel{2}\cancel{2}4 & (612 \\ \bullet\bullet & \end{array}$$

D)
$$\begin{array}{ll} \cancel{4}\cancel{2}8 & \\ \cancel{1}\cancel{6}\cancel{5}\cancel{2}4 & (27 \\ \hline \cancel{1}\cancel{2}\cancel{2}\cancel{4}4 & (612 \\ \cancel{4}\cancel{2}8 & \end{array}$$

QUESTION : 612 toises me coûtent 16524 livres, je demande le prix d'une toise.
Réponse, 27 livres.

A. Je pose trois points, parce que le diviseur 612 est de trois chiffres. Je pose le premier de ces trois points dessous le 6, parce que le 1, qui le précède, ne pourroit pas payer le 6, premier chiffre du diviseur.
Après avoir posé ces trois points, je regarde ce qui est dessus mon premier point, j'y trouve 16, & je dis, en 16 combien de fois 6 ; il est 2 fois, je pose 2 au quotient.

B. Par ce 2 du produit je multiplie le diviseur en disant 2 fois 2 font 4, je pose 4 dessus le point qui représente 2 ; ensuite je dis, 2 fois 1 font deux, que je pose sur le point qui représentoit 1, & puis 2 fois 6 font 12, que je pose dessous 16 ; je finis cette *première opération en soustrayant 1224 de 1652. Il reste 428, que je pose desus les chiffres qui ont payé, & je barre les huit chiffres qui ont servi à la soustraction.*

C. Je commence la seconde opération par la position des trois points ; je regarde ce qui est au-dessus du point qui représente 6 ; il est 7 fois, je pose 7 au quotient».

Remarquons ici que le positionnement des trois nouveaux points n'est pas explicité (ordre de grandeur ?). Par ailleurs, le positionnement préconisé des trois points non alignés n'est pas justifié.

D. Et par ce 7 je multiplie le diviseur, commençant toujours par le dernier chiffre à droite, c'est-à-dire, par 7 fois 2, &.
Cette multiplication finie, il ne reste plus qu'à barrer 4 284 haut & bas, parce que cette soustraction ne produit pas de reste. Ce principe suit la soustraction.
La Multiplication est la preuve ordinaire de la Division.
Cette division se trouve en multipliant le diviseur 612 par le quotient 27.
Il viendra 16 524».

L'expression «combien de fois», encore en usage actuellement, est largement utilisée dans les pages suivantes. L'auteur y donne une définition de la division qui suit le principe de la soustraction et préconise le support de la multiplication (preuve). Le reste est ajouté à cette multiplication à la fin du calcul. Les chiffres utilisés dans une division «Galley» sont écrits les uns sur les autres à la gauche du calcul. Dans «History of mathematics» (1958), Smith affirme que la présentation des chiffres serait gérée par le principe d'économie de papier, celui-ci étant «coûteux» !

2. Analyse de manuels après la Convention

2.1. *Cours de mathématiques à l'usage des gardes du pavillon et de la marine (Bezout, 1798).*

Deux extraits sont choisis dans le cours (p.56). Le premier illustre une définition du quotient fractionnaire, et le deuxième la procédure de l'algorithme que nous utilisons actuellement :

Extrait 1 : *«De la division des nombres entiers, et des parties décimales».*

«Diviser un nombre par un autre, c'est, en général, chercher combien de fois le premier de ces deux nombres contient le second. Le nombre qu'on doit diviser s'appelle Dividende ; celui par lequel on doit diviser, Diviseur, et celui qui marque combien de fois le dividende contient le diviseur, s'appelle le quotient».

Cette conception ne retient pas de façon claire le cas où le dividende n'est pas contenu dans le diviseur :

«On n'a pas toujours pour but, dans la division, de savoir combien de fois un nombre en contient un autre ; mais on fait l'opération dans tous les cas, comme si elle tendoit à ce but, c'est pourquoi on peut, dans tous les cas, la considérer comme l'opération par laquelle on trouve combien de fois le dividende contient le diviseur.

Il suit de là, que si on multiplie le diviseur par le quotient, on doit reproduire le dividende, puisque c'est prendre ce diviseur autant de fois qu'il est dans le dividende : cela est général, soit que le quotient soit un nombre entier, soit qu'il soit un nombre fractionnaire.

Quant à l'espèce des unités du quotient, ce n'est ni par l'espèce de celles du dividende, ni par l'espèce de celles du diviseur, ni par l'une et l'autre qu'il faut en juger ; car le dividende & le diviseur restant les mêmes, le quotient qui sera aussi toujours le même numériquement, peut être fort différent par la nature de ses unités, selon la question qui donne lieu à cette division.

Par exemple, s'il est question de savoir combien 8 contiennent 4 la toise, le quotient fera 2 toises, qui est un nombre concret, & dont l'espèce n'a aucun rapport avec le dividende ni avec le diviseur.

Mais on voit, en même temps, que la question seule qui conduit à faire la division dont il s'agit, décide la nature des unités du quotient».

-Extrait 2 : *De la division d'un nombre composé de plusieurs chiffres, par un nombre qui n'en a qu'un.*

«L'opération que nous allons décrire, suppose qu'on sache trouver combien de fois un nombre de un ou deux chiffres contient un nombre d'un seul chiffre. C'est une connaissance déjà acquise, quand on fait de mémoire les produits des nombres qui n'ont qu'un chiffre. On peut aussi, pour y parvenir, faire usage de la table que nous avons donnée ci-dessus (table de Pythagore)».

L'utilisation des tables de multiplication est ici préconisée une nouvelle fois.

«Par exemple, si je veux savoir combien de fois 74 contient 9, je cherche le diviseur 9 dans la bande supérieure, & j28e descends verticalement jusqu'à ce que je rencontre le nombre le plus approchant de 74, c'est ici 72 ; alors le nombre 8 qui se trouve vis-à-vis de 72, dans la première colonne, est le nombre de fois, ou le quotient que je cherche.

Cela supposé, voici comment se fait la division d'un nombre qui a plusieurs chiffres, par un nombre qui n'en a qu'un.

Ecrivez le diviseur à côté du dividende, séparez l'un de l'autre par un trait, & soulignez le diviseur sous lequel vous écrirez les chiffres du quotient, à mesure que vous les trouverez».

Le fait de souligner le diviseur n'est pas retenu dans les autres manuels étudiés. Par ailleurs, la procédure requiert un encadrement des chiffres composant le quotient.

«Prenez le premier chiffre sur la gauche du dividende, ou les deux premiers chiffres, si le premier ne contient pas le diviseur. Cherchez combien ce premier ou ces deux premiers chiffres contiennent le diviseur, écrivez ce nombre de fois sous le diviseur. Multipliez le diviseur par le quotient que vous venez d'écrire, & portez le produit sous

la partie du dividende que vous venez d'employer. Enfin retranchez le produit, de la partie supérieure du dividende à laquelle il répond, & vous aurez un reste».

Il est notable de constater que la soustraction requise est posée. Cette remarque est d'ailleurs valable pour tous les manuscrits étudiés.

«A côté de ce reste, abaissez le chiffre suivant du dividende principal, & vous aurez un second dividende partiel, sur lequel vous opérerez comme sur le premier, plaçant le quotient à droite de celui qu'on a déjà trouvé, multipliant de même le diviseur par ce quotient, écrivant & retranchant le produit comme ci-devant.

Vous abaisserez de même, à côté du reste de cette division, le chiffre du dividende qui suit celui que vous aurez abaissé, & vous continuerez toujours de la même manière jusqu'au dernier inclusivement».

Ici encore, la partie décimale n'est pas calculée.

«Cette règle va être éclairée par l'exemple suivant ...

Il suit alors toute une description avec les expressions «combien de fois», «j'écris», «j'abaisse en disant». Là encore, nous remarquons que nous employons toujours ces termes à l'heure actuelle.

«... Le quotient qu'on trouve par cette voie n'est pas toujours le véritable, parce qu'en prenant ce parti, on ne fait réellement qu'une estimation approchée, mais outre que cette affirmation met presque toujours un sur le but, & que dans les cas où elle n'y est pas, elle en écrase un peu ; la multiplication qui vient ensuite, sert à redresser ce qu'il peut y avoir de défectueux dans ce jugement.

L'explication de la procédure représentait déjà «une longue souffrance» !

En effet, si le dividende partiel contenoit réellement le diviseur 3 fois, par exemple, et que par l'essai qu'on fait on eût trouvé qu'il le contient 4 fois, on auroit un produit plus grand que le dividende, puisqu'on prendroit le diviseur plus de fois qu'il n'est réellement dans le dividende & par conséquent, la soustraction deviendra impossible ; alors on diminue le quotient successivement d'une, deux, &tc... unités jusqu'à ce qu'on trouve un produit qu'on puisse retrancher : au contraire, si l'on n'avait mis que 2 au quotient, le reste de la soustraction se trouveroit plus grand que le diviseur, ce qui prouveroit que le diviseur y est encore contenu, & que par conséquent le quotient est trop faible».

De la même façon qu'il est impossible pour l'auteur de concevoir une soustraction de deux nombres dont le premier serait plus petit que le second, il n'envisage pas une division dont le dividende soit inférieur au diviseur.

«On devroit, à la rigueur, chercher combien de fois chaque dividende partiel contient le diviseur entier ; mais comme cette recherche feroit souvent longue & pénible, on se contente, comme on vient de le voir, de chercher combien la partie la plus forte de ce dividende contient la partie la plus forte du diviseur».

2.2. *Extrait de cours d'instituteur (1843)*

Nous donnons un extrait de cours d'instituteur exerçant dans les Alpes en 1843. Le diviseur est appelé le contenu. Le dividende est à chaque fois considéré comme supérieur au diviseur :

«Le nombre qui exprime combien de fois le plus grand est contenu dans le plus petit, est le quotient (du latin quotier, combien de fois).... Il est évident que le contenu répété autant de fois qu'il y a d'unités dans le quotient doit reproduire le dividende».

L'auteur souligne l'aspect ardu de l'exécution de l'opération :

«En entremêlant en effet les mots de produit et de dividende, de multiplicande et de diviseur, de multiplicateur et de quotient, en entremêlant ainsi les idées de multiplication et de division, ils ont par celle-ci un véritable labyrinthe dont l'esprit ne parvient à sortir qu'après les plus pénibles efforts».

Quelques définitions sont données et réfèrent curieusement à la division appelée «danda« (mot qui veut dire «donner«) du XVIème siècle :

«Le quotient est toujours un nombre abstrait.... Dividende et contenu sont de même matière.... Le résultat de la division est donc de donner comme nous l'avons déjà dit plus haut, tantôt le contenu, tantôt le quotient... Vouloir contraindre ce résultat à donner constamment dans tous les cas le quotient, c'est vouloir tomber dans l'absurde».

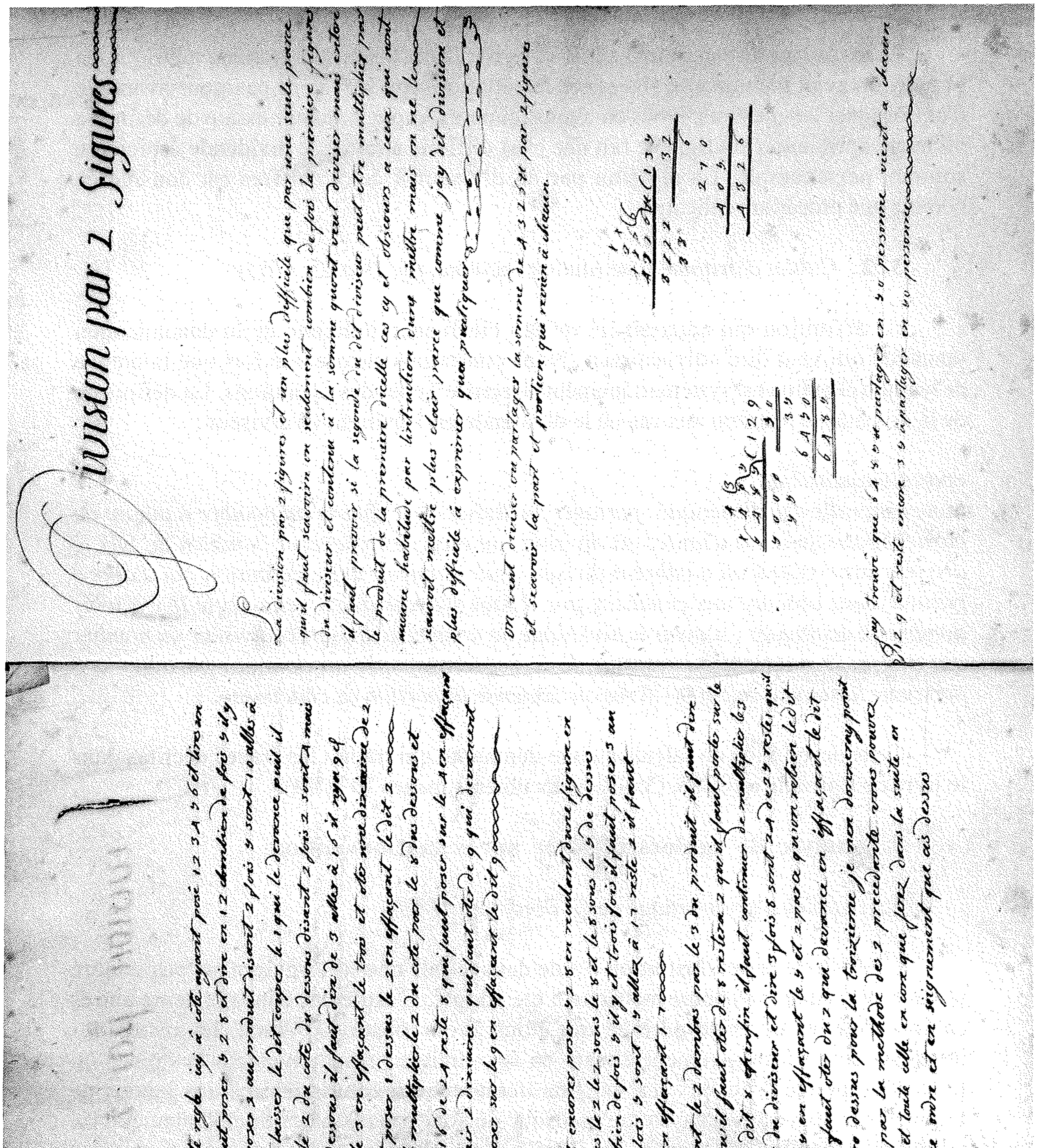
L'auteur soulève ici les problèmes de ce type de définition qui suit celle de la division de type quotition (recherche du nombre de parts). La division de type partition (recherche de la valeur d'une part, avec un dividende et un quotient qui peuvent être de nature différente) n'est pas évoquée.

3. Analyse de cahiers d'élèves avant la Convention

3.1. *Cahier d'arithmétique de Joseph Toucas (1761)*

Dans le cahier d'arithmétique de Joseph Toucas en 1761 la procédure utilisée suit la méthode «Galley». (Voir le document, page ci-contre).

«Ce que les auteurs arithméticiens appelent sont division, je le nomme sous division qui est un mot tout à fait contrare mais beaucoup plus significatif puisque l'opération et toujours ensuite d'une seule division mais laissons le nom et venons à la chose.
Après avoir fait la première division s'il reste des livres il faut les multiplier par 20 sols et soubdiviser par le même diviseur le produit donnera des sols et sil reste des sols il les faut multiplier par 12 et ayant divisé pour la dernières fois le produis donnera les deniers.
La division par 2 figures et un plus difficile que par une seule parce qu'il faut scavoir on seulement combien de fois la première figures du diviseur et contenu à la somme quont veut diviser mais entore il faut prevoir si la segonde du dit diviseur peut être multiplier par le produit de la première dicelle ces cy et obscours à ceux qui nont


Division par 2 figures

Cahier d'arithmétique de Joseph Toucas, daté de 1761. Page 173.
I.N.R.P., Musée National de l'Education, Rouen - Mont-Saint-Aignan

aucune habitude par l'instruction d'une mettre mais on ne le scauvoit mettre plus clair parce que comme jay dit division et plus difficile à exprimer qua pratiquer».

Avant la loi du 18 germinal an III (7 avril 1795), loi sur le système métrique en France, on avait recours aux anciennes appellations qui n'avaient pas pour avantage d'uniformiser les mesures. Nous en avons ici un exemple. L'auteur essaie de définir la division, après avoir souligné le fait que c'est difficile à faire : le dividende est ici une somme, par exemple. La division par un diviseur à deux chiffres est considérée comme une procédure délicate.

3.2. *Cahier d'arithmétique (auteur inconnu, pp. 19 à 25, 1763)*

La définition qui apparaît ici reflète l'influence italienne de la dénomination «partire» qui veut dire «diviser par». Nous constatons encore une fois que la preuve de la multiplication est systématiquement effectuée à côté des opérations. La définition de la division se restreint aux cas où le dividende est supérieur au diviseur :

«partition quatrième
régle generalle d'arithmétique : partager ou diviser c'est séparer un nombre à autant de parties égales qu'il y a d'unitez au diviseur, ou bien cest chercher combien de fois le diviseur est contenû ou nombre à diviser, pour eclaircir cette définition qui d'abord paraoit assez obscure aux commençans, il faut scavoir qu'en cette règle il y à trois nombres à distinguer ; scavoir le dividande ou nombre à diviser, le diviseur ou nombre qui divise, le quotient ou resultat de la regle, exemple on donne à partager à 8 personne la somme de 24000 livres on demende la portion de chacunes».

Cette description de calcul suit une démarche qui traduit les étapes décrites dans le livre de Barreme en 1788. (Voir les documents, pages 73 et 74).

4. Analyse de cahiers d'élèves après la Convention

4.1 *Cahier d'arithmétique de G. Bonhoure (1820)*

L'intérêt de cette illustration réside dans le fait que la virgule n'est pas encore utilisée, alors que le système métrique a été adopté. C'est le cas dans plusieurs autres cahiers d'élèves de cette période que nous avons observés. Ainsi, les restes des divisions sont successivement divisés en sous unités : respectivement des pieds ou pans, des pouces, ou des lignes. Les démarches révolutionnaires des leçons de Laplace sur les vertus du système métrique ne sont pas adoptées immédiatement. En revanche, l'adoption de la technique actuelle de la division est rapide.

Quatre exercices numérotés 100, 101, 102, 103 sont proposés (voir document,page 75).

23

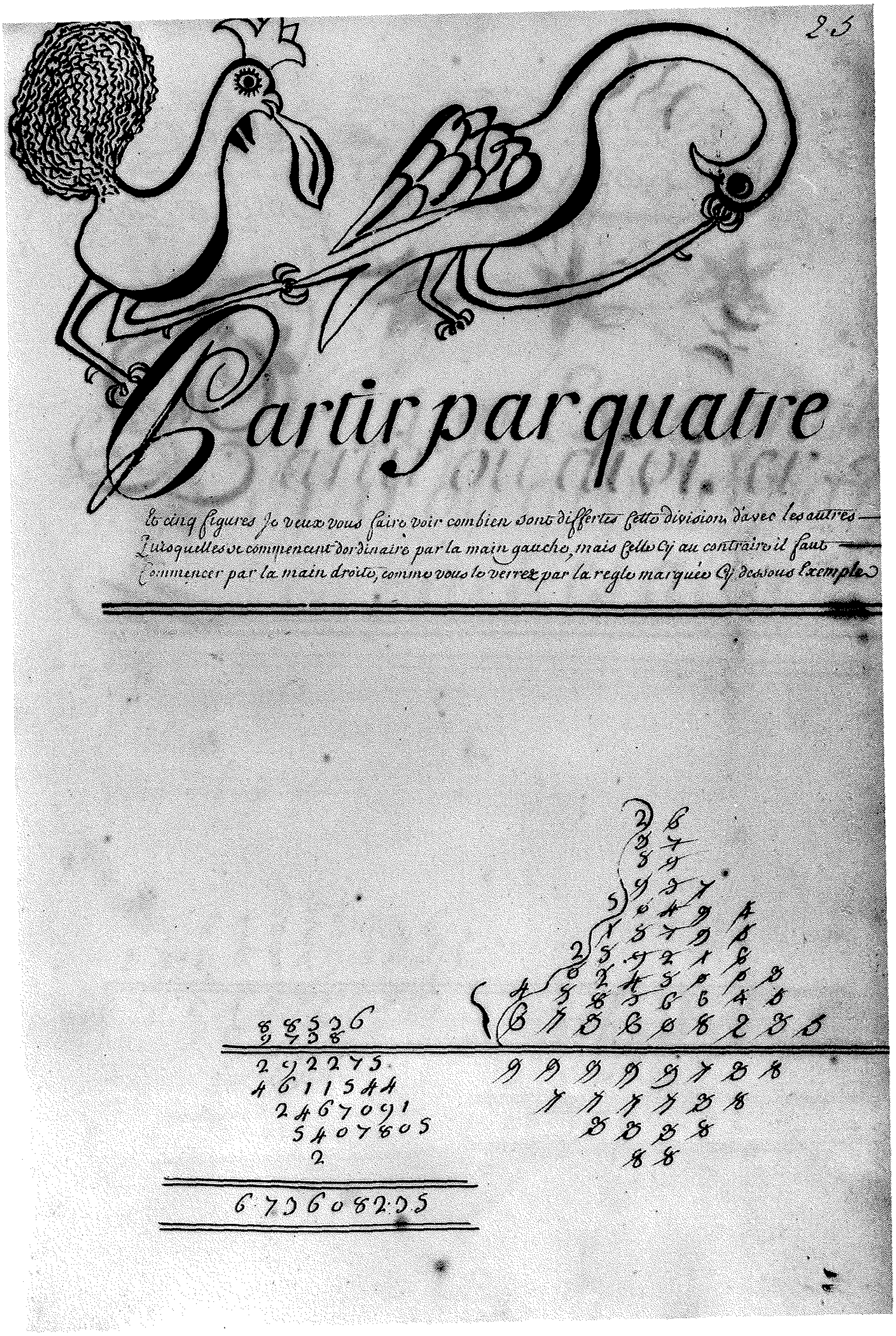
Partir ou diviser par

Deux figures vous avés deja vû de la façon que la partition ce preuve, c'est à dire par la Multiplication, et par cette ditte preuve vous pouvez lui apeller regle infallible; Exemple

48320096

5618614
86
3371166
44948880
3
48320096

Cahier d'arithmétique daté de 1763, page 23. Auteur inconnu 1.
I.N.R.P., Musée National de l'Education, Rouen - Mont-Saint-Aignan



25

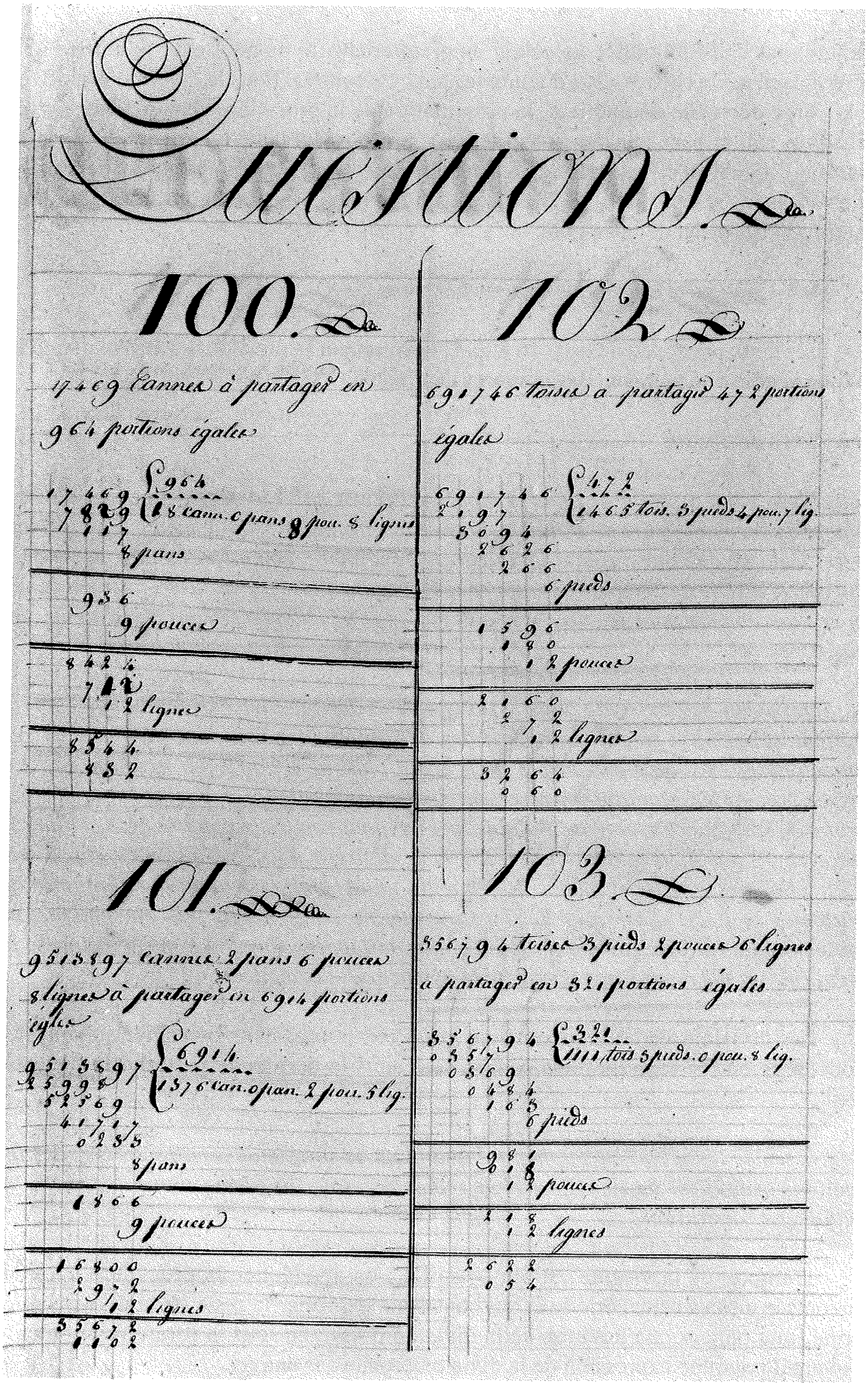
Partir par quatre

lo cinq figures Je veux vous faire voir combien sont differtes Cette division d'avec les autres — Lesquelles se commencent d'ordinaire par la main gauche, mais Celle Cy au contraire il faut — Commencer par la main droite, comme vous le verrez par la regle marquée Cy dessous Exemple

292275
4611544
2467091
5407805
2

679608295

Cahier d'arithmétique daté de 1763, page 25. Auteur inconnu 2.
I.N.R.P., Musée National de l'Education, Rouen - Mont-Saint-Aignan


Questions.

100.

17469 cannes à partager en 964 portions égales

17469 | 964
7829 | 18 cann. 0 pans 9 pou. 8 lignes
117
8 pans
936
9 pouces
8424
712
12 lignes
8544
482

101.

951897 cannes 2 pans 6 pouces 8 lignes à partager en 6914 portions égales

951897 | 6914
25998 | 137 can. 0 pan. 2 pou. 5 lig.
52569
4171
0235
8 pans
1866
9 pouces
16800
2972
12 lignes
35672
1102

102.

691746 toises à partager 472 portions égales

691746 | 472
2197 | 1465 tois. 3 pieds 4 pou. 7 lig.
3094
2626
266
6 pieds
1596
180
12 pouces
2160
272
12 lignes
3264
060

103.

356794 toises 3 pieds 2 pouces 6 lignes a partager en 321 portions égales

356794 | 321
0357 | 1111 tois 3 pieds. 0 pou. 8 lig.
0369
0484
163
6 pieds
981
018
12 pouces
218
12 lignes
2622
054

Cahier d'arithmétique de Georges Bonhoure (vers 1820).
I.N.R.P., Musée National de l'Education, Rouen - Mont-Saint-Aignan

4.2 *Cahier d'arithmétique d'Antoine François Reynaud (1828)*

Remarquons l'hésitation liée au calcul du premier chiffre du quotient : le chiffre «3» est remplacé par le chiffre «2» (document, page ci-contre). Pour le calcul des chiffres de la partie décimale du quotient, la présentation de la procédure change :après avoir utilisé un calcul basé sur des soustractions non posées, l'élève écrit le chiffre 100 (signifie-t-il qu'il va effectuer un calcul au centième ?), puis évalue les deux décimales du quotient. Dès cette période, nous constatons dans ce document, ainsi que dans d'autres, l'utilisation de la virgule.

4.3 *Cahier d'arithmétique de Jean Labarthe (1855)*

Les deux pages retenues (p.46 et p.47) expliquent la procédure à suivre quand le dividende et le diviseur sont des nombres décimaux. (Voir le document, page 78).

«Division à décimales

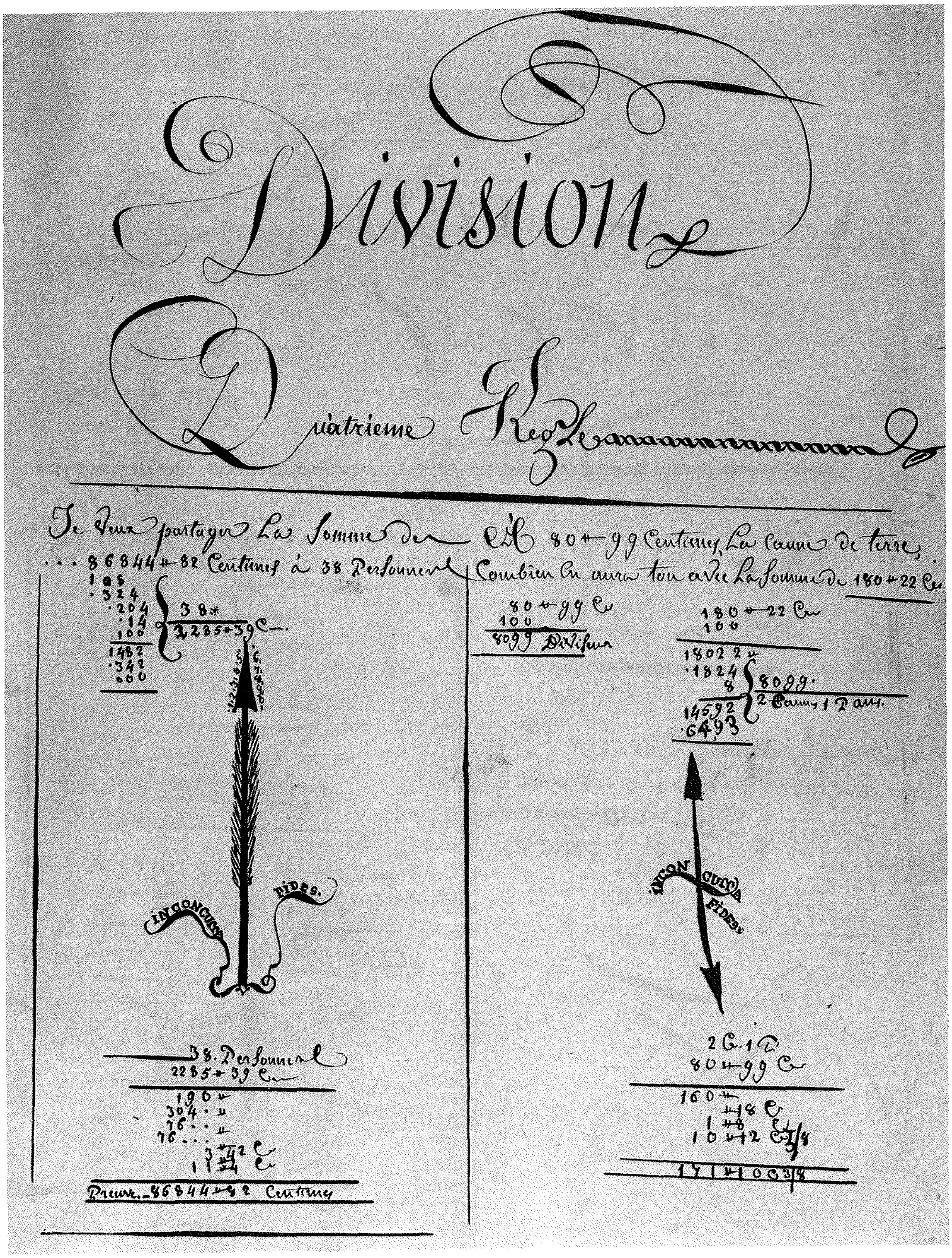
Mettez à la suite de celui de deux nombres proposés qui à le moind de décimales un nombre de zéros suffisant pour que le nombre des décimales soit le même dans chacun d'eux. Cela ne changera rien à la valeur de ce nombre, comme nous l'avons vu plus haut dans l'article de décimales, supprimez la virgule dans l'un et dans l'autre et faites l'opération comme pour les nombres entiers, vous ne changerez rien au quotient que vous trouverez.

La suppression de la virgule dans le dividende et dans le diviseur ne change rien au quotient lorsqu'on à rendu le nombre des décimales le même dans chancun de ces deux nombres c'est qu'il est aissé d'apercevoir, puisque si l'on a par exemple 12,52 à diviser par 4,3 en ejoutant un zéro aux décimales du diviseur parce que celles du dividende sont plus fortes d'un. J'ajoute un zéro pour rendre le nombre égal et alors je divise 12,52 par 4,30 le dividende 1252 et le diviseur 430 ne sont autre chose que 1252 centièmes et 430 centièmes. Puisque les unités entières valent des centaines de centièmes or il est clair que 1252 centièmes ne contiennent pas autrement 430 centièmes que 1252 unités ne contiennent que 430 unités. Dont la considération de la virgule est inutile quand on a complété le nombre des décimales».

Les divisions en colonne qui sont ensuite exposées dans ce cahier suivent des procédures où les soustractions sont posées sous le dividende partiel. On peut lire aussi :

«Mais comme l'objet qu'on se propose quand on se sert de décimales est d'éviter les fractions ordinaires au lieu d'écrire le reste 392 sous la forme d'une fraction, on continuera l'opération ...».

L'emploi de la virgule est ainsi justifié : on abandonne la procédure qui était préconisée jusqu'à cette période et qui consiste à exprimer le reste de la division sous forme fractionnaire. La notation de la division présentée sous la forme fractionnaire convenait pour une expression de la division proche des entiers.


Division

Quatrième Règle

Je veux partager la somme de 86844# 82 Centimes à 38 Personnes

80# 99 Centimes la canne de terre, Combien en aura ton avec la somme de 180# 22 Ce

38#

2285#39 C

80#99 C

8099 Diviseur

180# 22 C

8099.

2 Cannes 1 Pans

INCONCUSSA FIDES

38. Personnes

2285# 39 C

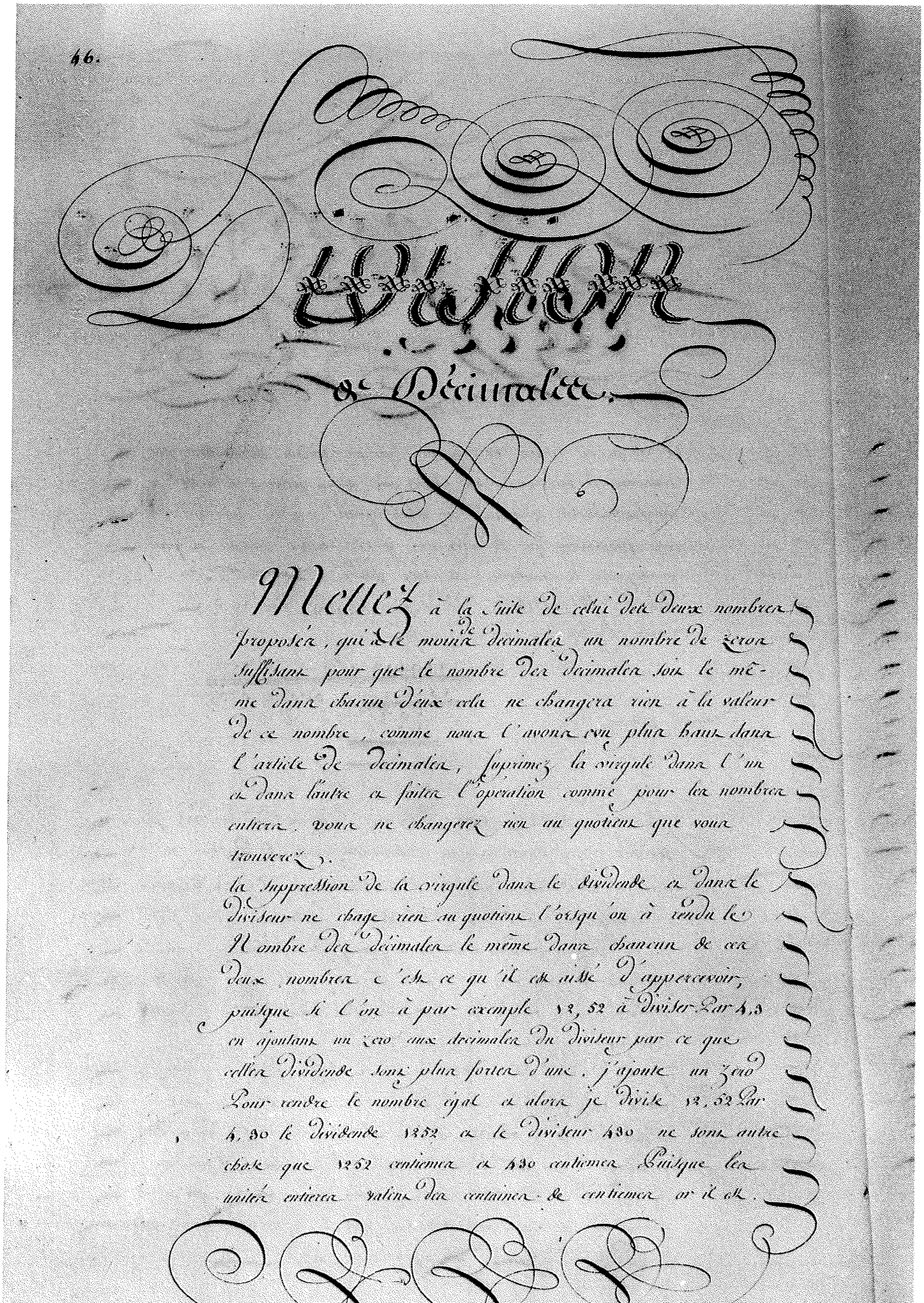
Preuve.-86844#82 Centimes

2 C. 1 P

80#99 C

171#10 C 3/8

Cahier d'arithmétique d'Antoine François Reynaud daté de 1828.
I.N.R.P., Musée National de l'Education, Rouen - Mont-Saint-Aignan


46.

Division

des Décimales.

Mettez à la suite de celui des deux nombres proposés, qui a le moins de décimales un nombre de zeros suffisant pour que le nombre des décimales soit le même dans chacun d'eux cela ne changera rien à la valeur de ce nombre, comme nous l'avons vu plus haut dans l'article de décimales, suprimez la virgule dans l'un et dans l'autre et faites l'opération comme pour les nombres entiers. vous ne changerez rien au quotient que vous trouverez.

la suppression de la virgule dans le dividende et dans le diviseur ne chage rien au quotient lorsqu'on à rendu le Nombre des décimales le même dans chacun de ces deux nombres c'est ce qu'il est aisé d'appercevoir, puisque si l'on à par exemple 12,52 à diviser Par 4,3 en ajoutant un zero aux décimales du diviseur par ce que celles dividende sont plus fortes d'une. j'ajoute un zero Pour rendre le nombre égal et alors je divise 12,52 Par 4,30 le dividende 1252 et le diviseur 430 ne sont autre chose que 1252 centiemes et 430 centiemes Puisque les unités entieres valent des centaines de centiemes or il est.

Cahier d'arithmétique fait par Jean Labarthe, datée de 1855. Page 46.
I.N.R.P., Musée National de l'Education, Rouen - Mont-Saint-Aignan

CONCLUSION

Quand on parcourt les cahiers d'élèves ou les manuels dans leur intégralité, l'impression générale est celle d'exercices peu variés et répétitifs. De même, l'ensemble de ces écrits témoigne qu'on ne retient de la division que sa technique et le déroulement, au fur et à mesure de son utilisation. Il n'y a pas d'activités écrites de questionnement de conjecture, de contrôle (sauf exception faite pour le recours à la mutiplication inverse). L'accent est ainsi mis sur la procédure seulement.

Parfois, les divisions sont précédées ou suivies d'une phrase d'introduction, qui sont des phrases du langage commun traduisant un résultat formalisé obtenu dans l'exercice, ou de remarques qui soulignent certaines caractéristiques des exercices.

Notre étude fait abstraction de l'utilisation présumée des manuels et du rapport entre les exercices et les cours. On ne peut donc rendre compte des caractéristiques des pratiques individuelles des élèves, et de l'usage qu'ils font des exercices et de ce qui a été présenté en cours. Il nous semble cependant que l'on peut dégager quelques éléments de ce qui précède : le fonctionnement d'une division est traité d'abord comme une technique, et non pas comme un concept, privant ainsi l'apprenant de tout point de repère susceptible de donner du sens à la technique.

A partir des exemples ci-dessus, on peut prévoir le genre de problèmes qui vont être mal posés ou mal résolus : le cas où le dividende d'une division est inférieur au diviseur, par exemple. Les points de rupture ne sont plus les dates de découverte de l'algorithme, mais les types de conceptions véhiculés par le choix des exemples et des explications.

La résistance des obstacles du type «on ne divise pas un nombre plus petit par un plus grand», s'organise autour de ces conceptions. Cette connaissance engendre aujourd'hui encore des erreurs[8] et elle résiste aux contradictions auxquelles elle est confrontée.

BIBLIOGRAPHIE

ARTIGUE M., (1991), Epistémologie et didactique, *Recherches en didactique des Mathématiques*, pp. 241-286, vol 10/2.3, La Pensée Sauvage, Grenoble.

BACHELARD G., (1938), *La formation de l'esprit scientifique*, Vrin, 1938.

BEZOUT, (1764), *Traité d'arithmétique à l'usage des gardes du pavillon et de la marine, Eléments d'arithmétique*, Paris.

BROUSSEAU G., (1983), Les obstacles épistémologiques et les problèmes en mathématiques, *Recherches en didactique des mathématiques*, vol. 4.2., La Pensée Sauvage, Grenoble.

DAHAN-DALMEDICO A. PEIFFER J., (1986), *Une histoire des mathématiques*, Editions du Seuil.

DHOMBRES J., (1992), *L'école normale de l'an III, Leçons de mathématiques*, Dunod.

---

[8] Voir, dans notre thèse, la partie expérimentale de notre recherche sur les erreurs dans l'opération en colonnes pour les élèves âgés de 8 à 13 ans environ (1994).

GUIET J., (1994), Algorithmes et schèmes : cas de la division, in Artigue M., Laborde C., Gras R., Tavignot P., *Vingt ans de didactique des Mathématiques en France. Hommage à Guy Brousseau et GérardVergnaud*, La Pensée Sauvage, Grenoble, pp. 225-330.

GUIET J., (1994), *La division : une longue souffrance,* Thèse de doctorat en Sciences de l'Education, Université Paris V.

GUITEL G, (1975), *Histoire comparée des numérations écrites*, Flammarion.

HANTOUCHE A. L., (1984), *Les problèmes posés par l'acquisition des nombres décimaux*, Thèse, E.H.E.S.S.

HARLE A., (1984), *L'arithmétique des manuels de l'enseignement élémentaire français au début du XXème siècle*, Thèse de Doctorat de 3ème cycle en Didactique des Mathématiques, Université de PARIS VII.

NEYRET R., (1995), *Contraintes et déterminations des processus de formation des enseignants*, Thèse de Didactique des Mathématiques, Université de Grenoble I.

IFRAH G., (1985), *Les chiffres, ou l'histoire d'une grande invention*, Laffont, Paris.

SMITH D. E., (1958), *History of mathematics*, New York, Dover publications Inc.

SMITH D. E., (1970), *Raraarithmetica, a catalogue of the arithmetics written before the year 1601*, Chelsea publishing company, New York.

VERGNAUD G, (1985), Concepts et schèmes dans une théorie opératoire de la représentation, *Psychologie Française*, tome 30, 3/4.

YOUSHKEVITCH A.P., (1976), *Les mathématiques arabes*, Paris, Vrin.