31 - 18 = ?

REGARDS SUR LE CALCUL MENTAL

François BOULE
Professeur de mathématiques
I.U.F.M. de Bourgogne

Le calcul mental n'est pas le sport favori des enfants à l'école, ni même celui de leurs maîtres. Il n'a pourtant jamais cessé de figurer au programme de l'école élémentaire (y compris celui des années 1970) même si son appellation a quelque peu évolué : calcul mental, oral, rapide ou réfléchi. Nous conserverons la désignation qui semble la plus générale et la moins soumise aux turbulences des courants pédagogiques.

Qu'entend-on ici par calcul mental ?

On distingue les calculs arithmétiques *simples*, dont les opérandes ne comportent qu'un chiffre (les «tables»). Ces résultats sont destinés à être connus «par cœur» c'est-à-dire doivent pouvoir être récupérés en mémoire. De très nombreuses études ont porté sur l'acquisition, l'établissement et la récupération de ces «faits numériques». Il n'en sera pas question ici.

Les calculs arithmétiques complexes font intervenir deux nombres dont l'un au moins est supérieur à dix. Il ne s'agira ici que de nombres entiers, et que d'addition ou de soustraction.

Comment obtenir le résultat d'un calcul comme celui de 31–18 ?

• Il peut advenir qu'on le connaisse «par cœur» ; c'est plutôt rare, mais il y a des faits numériques qui dépassent les tables classiques et qui sont cependant souvent connus, pas seulement des amateurs des Chiffres et des Lettres, en particulier les *doubles*.

• On peut avoir sous la main une calculette. Pour un calcul comme 31–18, faut-il l'autoriser, faut-il l'interdire ? Plus généralement, quelle place faire à la calculette dans l'école ? C'est un débat qui n'est pas récent et que nous laisserons pour un autre jour.

• On peut aussi prendre un crayon et du papier et «poser» l'opération, c'est-à-dire faire appel à une technique écrite ; c'est un algorithme général indifférent aux nombres particuliers qui sont proposés. Cette technique est évidemment un objet classique d'étude à l'école, et nous reparlerons de ses relations avec les autres formes de calcul.

«Grand N» n° 58 pp. 39 à 52, 1995-1996

• On peut enfin renoncer au secours de la feuille de papier et chercher une procédure qui conduise au résultat en tenant compte du fait qu'il s'agit de *31 et de 18*. Mais c'est alors l'objet d'une *délibération* dans laquelle interviennent des connaissances sur la numération, des propriétés opératoires, les faits numériques disponibles. Dans la mesure où interviennent des calculs auxiliaires, à la charge de la mémoire, un concept *d'économie* apparaît aussi, qu'ignorait le calcul écrit, et sur lequel on reviendra plus en détail.

C'est pourquoi le calcul mental est instructif à plus d'un titre :
• il l'est pour l'enfant, puisqu'il exerce les ressources de la mémoire, l'organisation des faits numériques, les propriétés opératoires, et l'aspect *stratégique* que l'on trouve dans toute résolution de problème qui n'est pas le produit immédiat d'un algorithme.

• il l'est aussi pour le professeur car il le renseigne sur les représentations que les enfants se font des nombres et des opérations, ainsi que sur les procédures qu'ils peuvent maîtriser ; il renseigne également sur certaines capacités plus générales relatives à la mémoire, l'anticipation, l'organisation des tâches...

Le présent article présente l'analyse d'observations relatives à des calculs proposés à des enfants de CE_2 et CM_2, et des conséquences pédagogiques que l'on croit pouvoir en tirer.

Cadre expérimental

Une première session d'enregistrements a porté sur une centaine d'enfants de trois écoles de Dijon, en 1995 ; elle s'est déroulée ainsi :

Une série de vingt-cinq opérations est proposée, sans limitation de durée. Les opérations sont présentées une à une, sur un écran d'ordinateur, ainsi :

« 31 – 18 = ? »

Ce message demeure affiché tant que la réponse n'est pas proposée. Les réponses sont enregistrées, ainsi que leur délai. Cette série est répétée trois fois (dans un ordre aléatoire) ; à l'occasion de la troisième série, chaque opération donne lieu, de plus, à la question « comment as-tu fait pour trouver ? ». Cet entretien est pris en note manuellement.

Il s'agit bien de calcul mental puisque l'enfant ne dispose d'aucun support auxiliaire pour obtenir le résultat. On peut imaginer des variantes (message oral, ou message écrit temporaire, réponse orale, etc.) ; il en sera question ci-dessous.

Il existe plusieurs niveaux de dépouillement de ce matériel.

Niveau 1 : Le score

Le plus simple consiste à indiquer les taux de réponses correctes et les délais moyens. On observera donc que l'on a obtenu pour « 31 – 18 = ? » :

	CE2	CM2
réponses correctes (%)	27,1	66,6
délai moyen (s.)	24,8	14,5

Mais la population n'ayant pas exactement valeur d'échantillon, cette réponse globale ne fournit qu'une indication assez sommaire – d'ailleurs tout comme les Evaluations Nationales pratiquées en CE_2 et en Sixième depuis 1989 – et on ne peut guère en tirer de conséquences.

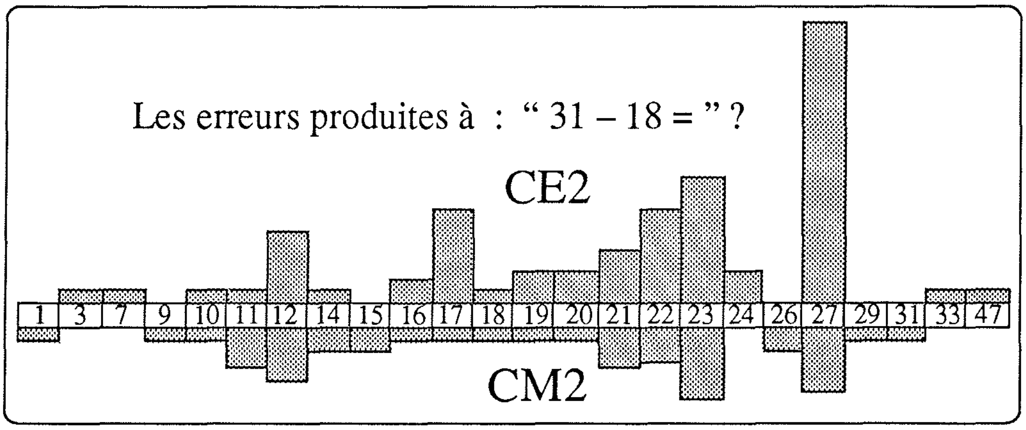
Pour deux raisons au moins :

• Le taux de réponses correctes n'indique pas le pourcentage de la population qui répond correctement ; en effet chaque enfant a répondu trois fois à cette question. S'il a donné trois réponses différentes dont la bonne, en déduirait-on qu'il a réussi 1/3 de cet item ? Peut-on interpréter de la même façon le fait qu'il donne trois fois la même réponse (juste ou fausse), ou bien trois réponses différentes ? On voit que s'il y a environ 1/4 de réponses correctes en CE_2 et 2/3 en CM_2, les taux de réussite (trois réponses correctes) pour la population sont certainement inférieurs.

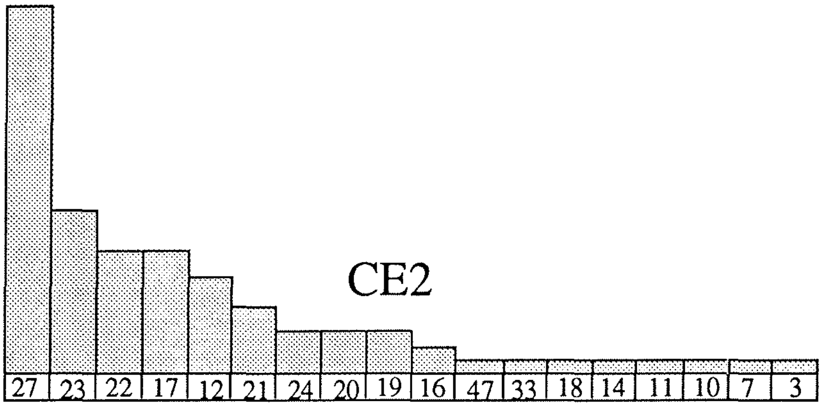
• Le résultat brut d'un item n'est pas en lui-même significatif. Il est indispensable de le croiser avec d'autres, pour les *mêmes* individus, ou d'analyser ces réponses de plus près, et si possible cas par cas. C'est l'objet de ce qui suit.

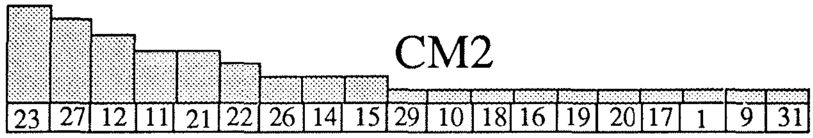
Niveau 2 : Typologie d'erreurs

Un second niveau d'analyse consiste à relever les erreurs. Le graphique ci-dessous ne mentionne ni la réponse exacte [13], ni la réponse [49] qui a pu résulter d'une lecture inexacte du signe opératoire. Il reste néanmoins beaucoup de résultats divers :



Ordonner ces réponses par valeur croissante n'est sans doute pas le plus pertinent. Mieux vaut les relever pour chaque niveau, par fréquence décroissante :





Ceci fait clairement apparaître que non seulement la fréquence mais les types d'erreurs sont différents. Il apparaît néanmoins que le nombre de ces types n'est pas plus faible en CM_2 et que les fréquences sont moins dispersées.

Niveau 3 : Interprétation des erreurs

On dispose, pour tenter d'interpréter les erreurs, de l'entretien individuel lors duquel chaque enfant a expliqué sa démarche. Tous ces entretiens ne sont pas intelligibles et ils ne portent que sur un tiers des opérations calculées. Ils permettent néanmoins d'interpréter une majorité des erreurs.

Ainsi, l'erreur la plus fréquente en CE_2 est aisément analysable :

➡[27] : «on ne peut pas enlever 8 de 1 ; j'enlève 1 de 8, cela fait 7 ; et puis 1 de 3, cela fait 2». Néanmoins, il arrive que ce calcul (en CM_2) soit exprimé autrement : «de 1 à 8, il y a 7 ; de 1 à 3, il y a 2».

➡[23] provient de l'omission de la retenue : on ne peut enlever 8 de 1 ; on enlève alors 8 de 11, cela fait 3 ; puis 3 –1 = 2.

➡[17] provient de la conjugaison des deux démarches précédentes (retournement des unités ; omission de la retenue) : 8 –1 = 7, puis 3 – 2 = 1.

Peuvent s'ajouter à ces schèmes des erreurs de calcul (ou de rappel) : 11– 8 (ou bien «de 8 à 11») est donné égal à 2 ou bien à 4. Ce qui renseigne sur les réponses ➡[12], [14], [22], [24].

Un autre facteur d'erreur concerne la *perte* du signe opératoire : commencée en soustraction, le calcul s'achève en addition en passant à la seconde colonne.

➡[29] : de gauche à droite, 3 –1 = 2, puis 1+ 8 = 9.

➡[19] : on repère une retenue, puis on opère de gauche à droite ; 3 –1 –1 = 1 ; puis 1+ 8 = 9. Ou encore ➡[47] en opérant de droite à gauche, 8 –1 = 7, puis 3+1 = 4.

ou encore ➡[9] : la chaîne d'opérateur –20 +2 devient, en cours de traitement, 20 suivi de –2.

L'analyse qui précède rend déjà compte de plus de 80% des erreurs en CE_2 et environ 60% en CM_2.

On peut difficilement espérer une interprétation rationnelle de *toutes* les réponses erronées. Les conditions d'expérimentations elles-mêmes peuvent en susciter, comme la frappe d'une touche à la place d'une autre ; toutefois, quand l'enfant s'en rendait compte immédiatement, ce «repentir» a été autorisé. Il reste que des résultats tels que [10], [1], [31] demeurent mal interprétables.

Niveau 4 : Typologie des démarches

Ces analyses paraissant un peu disparates, on est tenté de les structurer. D'autant plus qu'apparaissent clairement dans les entretiens deux formes principales d'*évocations*, c'est-à-dire de représentation mentale de la situation proposée.

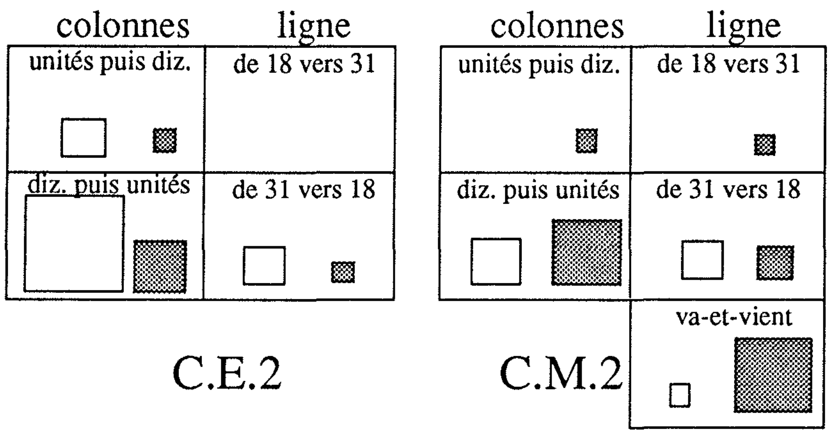
La première forme consiste à «poser l'opération dans sa tête», c'est-à-dire à opérer en colonnes, comme si l'on procédait par écrit. Cette première forme est largement appuyée sur une *procéduralisation verbale*, c'est-à-dire la récitation intérieure (et quelquefois explicite) d'un algorithme. De plus, cette démarche ne s'appuie pas sur les *nombres* 31 et 18, mais sur des *chiffres* (unités ou dizaines). La numération, ainsi que les règles pratiques de calcul, sont au cœur de cette démarche. L'ordre de grandeur du résultat ou sa vraisemblance n'interviennent pas. Il s'agit, à la lettre, d'un processus *machinal*. On distingue deux démarches de ce type : la première procède de droite à gauche (unités puis dizaines), la seconde de gauche à droite (dizaines, puis unités) avec un retour éventuel aux dizaines, en cas de retenue.

La seconde évocation est celle d'une *distance* «aller de 31 à 18» (ou bien de 18 à 31). Elle est plus probablement *visuelle* et, en tous cas n'est pas décalquée de la technique écrite de la soustraction. Elle opère sur des *nombres* et peut se décrire en termes de composition d'opérateurs :

• en croissant : aller de 18 à 31 (en passant par 20 et 30),

• en décroissant : pour enlever 18 à 31, on enlève 10 puis 8, ou bien 8 puis 10 (cet aspect peut encore se diversifier, si l'on décompose l'opérateur –8 en –1–7).

• en va-et-vient, si l'on interprète l'opérateur –18 en –20 +2, ou encore +2 –20.



Ce tableau récapitule, parmi les démarches identifiées par l'entretien, les fréquences de chaque type, leur échec (blanc) ou leur succès (gris). Pour chaque population, les aires sont proportionnelles aux fréquences.

On voit que *l'opération posée* est très majoritaire en CE_2, mais entraîne un faible succès. Du CE au CM, on assiste à un déplacement vers la démarche en ligne, avec une efficacité nettement croissante.

Le niveau suivant dans l'analyse va concerner la comparaison des procédures, mais il demande un détour par la psychologie de la mémoire.

Mémoires

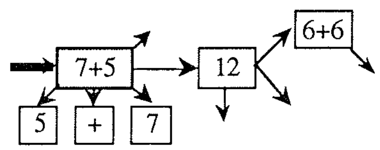
Il est devenu classique de distinguer Mémoire à Court Terme (MCT) et Mémoire à Long Terme (MLT). La première conserve les informations en instance ou en cours de traitement. Mais il ne s'agit pas seulement d'une mémoire-tampon statique. Elle est le lieu du traitement actuel de l'information ; c'est pourquoi on préfère maintenant parler de Mémoire de Travail (WM). A ce titre, elle est en relation de va-et-vient avec la MLT. Sa capacité est estimée à environ une demi-douzaine d'«unités d'information».

Qu'est-ce à dire ?

S'agissant par exemple d'une opération à calculer, quelles sont les informations nécessaires au traitement ? Les règles de calcul, les données fournies, les calculs auxiliaires, les résultats partiels. Une partie de cette information est de type *déclaratif* : « je sais que 7 + 5 = 12 ». Une autre partie est de type *procédural* : « pour traiter une opération à deux chiffres, je commence par les unités, etc. ». On voit par là que ces informations n'étant pas de même nature, la sommation de leur «coût» n'a rien d'immédiat et que la notion d'«unité d'information» est loin d'être éclaircie : il est certainement plus facile de retenir une séquence de six signes s'il s'agit d'un mot français de six lettres, que s'il s'agit d'un nombre de six chiffres. Il n'est même pas équivalent de retenir trois chiffres dissociés « 3, 8, 5 », ou un nombre « trois cent quatre vingt cinq». On s'en rend compte aisément par une petite expérience qui consiste à retenir une séquence de chiffres de plus en plus longue. Une «stratégie» efficace consiste à grouper les chiffres par deux ou par trois, et se répéter (éventuellement à haute voix) les nombres ainsi obtenus. Il est évident cependant qu'il existe un *seuil* de complexité de la tâche, ou de quantité d'informations en instance, au delà duquel la *saturation* entraîne l'échec, puisque des informations sont perdues. Ce seuil est probablement une constante individuelle (à un âge donné) ; mais il est possible de reculer cette limite en constituant des «paquets» d'information, et en les maintenant par auto-répétition (verbale). Ceci vaut pour la Mémoire de Travail.

On voit ici l'importance des conditions d'expérience. Si les nombres demeurent visibles jusqu'à la production de la réponse, la Mémoire de Travail est soulagée de la tâche supplémentaire qui consisterait à les conserver.

En ce qui concerne la MLT, c'est la notion de Réseau qui est maintenant retenue. Les informations stockées sont structurées comme un graphe. L'activitation d'un nœud va, de proche en proche, activer (mais de façon atténuée) les nœuds voisins.



Ainsi le nœud «7+5» va être associé à : «7», «5», «+», mais aussi à «12» ; lequel est associé à «6+6», «double de 6», «pair», «divisible par 3», etc. Un nœud est d'autant mieux activable qu'il est associé à un plus grand nombre d'autres nœuds. On retrouve ici la notion classique –pédagogique et non mathématique – de «petits nombres», ou nombres «familiers». Les «petits nombres» sont fréquentés très tôt, et très surchargés de significations (par les comptines, les figures géométriques, etc.) ; il en est de même des «nombres ronds» (comme 10, 50, 100, 200...) fortement liés au système de numération, aux mesures, aux monnaies, et qui participent aussi d'un réseau dense de relations arithmétiques. C'est sans doute pourquoi il est plus facile de retenir «12» ou «120» que «523» (qui est pourtant le 100 ème nombre premier!).

L'accès à un nœud est d'autant plus facile que le réseau est riche, mais aussi que les liaisons sont plus souvent sollicitées. On retrouve ici la notion déjà évoquée de «coût». Elle semble encore intuitive, puisqu'on est peu capable d'en donner une mesure. Mais faute d'évaluer le *coût* d'une information numérique, on peut néanmoins faire des comparaisons. De plus, il en est des objets arithmétiques comme des procédures. Une procédure est d'autant moins «coûteuse» qu'elle est plus souvent sollicitée et entretenue, c'est-à-dire qu'elle devient routinière. La répétition, souvent décriée, n'est pas dénuée de vertu, pourvu qu'on ne l'exerce pas au détriment du sens.

Cette notion de coût, dans la situation présente, est suggérée notamment par l'observation suivante : lors de l'entretien, après que la réponse est enregistrée, il est demandé à l'enfant « Comment as-tu calculé l'opération ? ». Et, dans une proportion non négligeable, les enfants demandent « C'était quoi déjà ? ». Ce qui peut signifier que lorsque le résultat est produit, une partie des données a déjà disparu de la Mémoire de Travail, et ceci suggère une possible saturation, qui pourrait être responsable d'une partie des *erreurs* de calcul, par disparition de données initiales ou intermédiaires.

Si l'on interroge de plus près cette question «c'était quoi déjà ?», voici ce qui apparaît :

« C'était quoi déjà ? » pour l'opération « 31 – 18 = ? »

	CE 2		CM 2	
	43,2% posent la question parmi lesquels	56,3 % ne posent pas la question	24,5 % posent la question parmi lesquels	75,5 % ne posent pas la question
réponse : 13	**9,1%**	13,6	12,2	**53,1**
Erreur de calcul	34,1	36,3	12,2	12,2
réponse : 49 (addition juste)		6,8		10,2

Les pourcentages sont rapportés à chacune des deux populations. Le taux de réponses correctes peut être légèrement différent de celui annoncé ci-dessus au niveau 1. En effet, il ne concerne que les réponses commentées et porte donc sur 1/3 des réponses.

La question «C'était quoi déjà ?» apparaît sensiblement plus souvent en CE_2 qu'en CM_2. De plus le taux de réussite à cet item est un peu plus faible chez ceux qui posent la question que chez les autres ; la différence est surtout sensible en CM_2. Une étude menée sur 25 items comme celui-ci fait apparaître une corrélation très faible entre la fréquence de la question et le taux d'erreur. L'interprétation en terme de *saturation* est probablement trop simple, et il peut s'agir seulement d'une *persistance* moins grande des informations traitées.

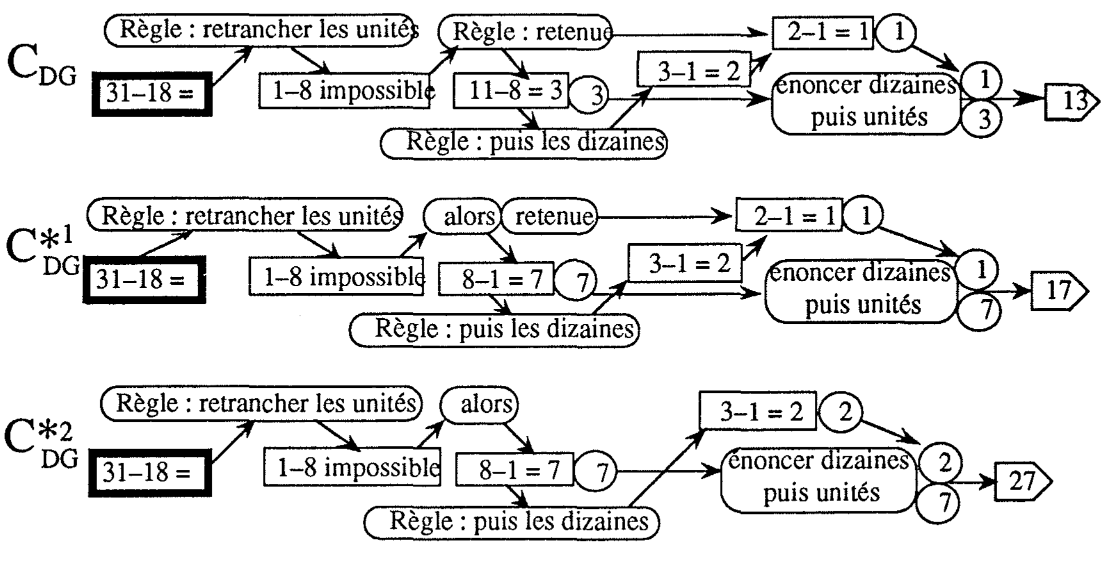
Niveau 5 : Analyse des démarches

Il s'agit de trouver une représentation analysant les diverses démarches de calcul. On a indiqué ci-dessus (tableau du niveau 4) deux grandes familles de résolution. La première famille consiste à poser l'opération dans sa tête :

$$\begin{array}{rc:c} & 3 & 1 \\ - & 1 & 8 \\ \hline & & \end{array}$$

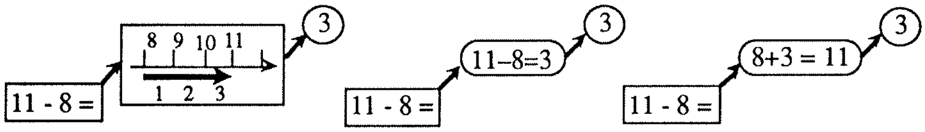
Il reste néanmoins deux façons de procéder : opérer sur les unités, puis sur les dizaines, c'est à dire de droite à gauche (ce qui sera noté C_{dg}) sur les dizaines, puis sur les unités (C_{gd}), ce qui implique un va-et-vient, si l'on n'oublie pas la retenue. Il existe aussi des variantes non valides (marquées ci-dessous d'une astérisque).

Voici quelques exemples de représentations possibles à propos des réponses les plus fréquentes :



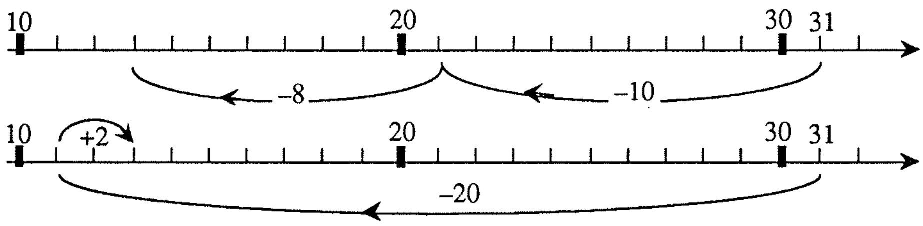
Plusieurs éléments d'informations sont nécessaires à la poursuite du calcul. Certains éléments sont des résultats partiels (signalés ci-dessus dans un rond), d'autres des règles ou des enchaînements prescrits. Une erreur peut provenir d'une règle illicite (cas n°2), de l'évocation partielle d'une règle (omission de la retenue) ou de la perte d'un résultat partiel, ou encore de la perte d'un enchaînement. On n'a pas indiqué l'obtention de tous ces résultats partiels. Classiquement, on sait qu'ils sont obtenus de deux façons au moins :

Soit par *comptage* (ou surcomptage, mentalement, sur les doigts...) ; soit par *récupération* d'un résultat en mémoire.

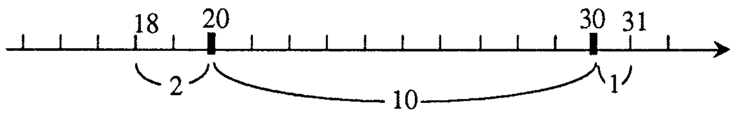


Rien n'indique que ces divers éléments ont le même «poids» cognitif, ni même un poids fixe ; la charge d'une procédure familière, fréquemment exercée est plus faible que celle d'une procédure inhabituelle. Comment estimer cette charge ? On ne peut considérer actuellement qu'il s'agit d'une grandeur mesurable. Mais elle peut donner lieu à des repérages, et des comparaisons. Par exemple en confrontant des opérations voisines, comme 70–10 et 79–19, ou encore 41+9 et 49+1. Cette étude est en cours.

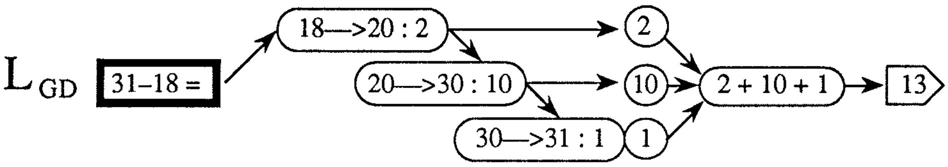
La famille des démarches «en ligne» suggère l'appel à des représentations de nature différente, donc difficilement comparables aux précédentes. Elles opèrent sur les *nombres* et non pas sur les *chiffres* de leur représentation formelle. Ces démarches peuvent cependant être classées selon deux types principaux. Les unes font appel à ce que l'on nommait naguère commodément des «opérateurs» : ôter 18, c'est ôter 10, puis 8 ; ou encore ôter 20 et ajouter 2 (procédures classiques sur un boulier). L'une opère en décroissant, c'est-à-dire de droite à gauche (L_{dg}), l'autre en décroissant puis en croissant (L_{dgd}) :

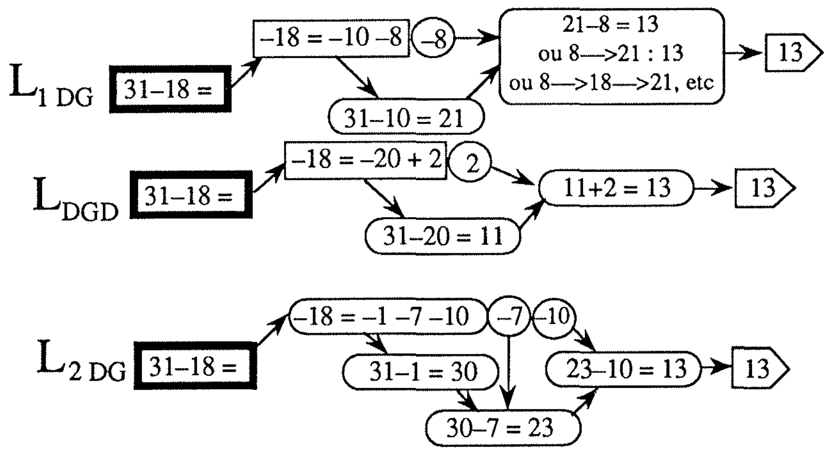


D'autres sont référées au concept de distance : calculer 31–18, c'est évaluer la distance de 18 à 31, ou de 31 à 18. Elles procèdent le plus souvent en croissant de 18 vers 31 (L_{gd}) :

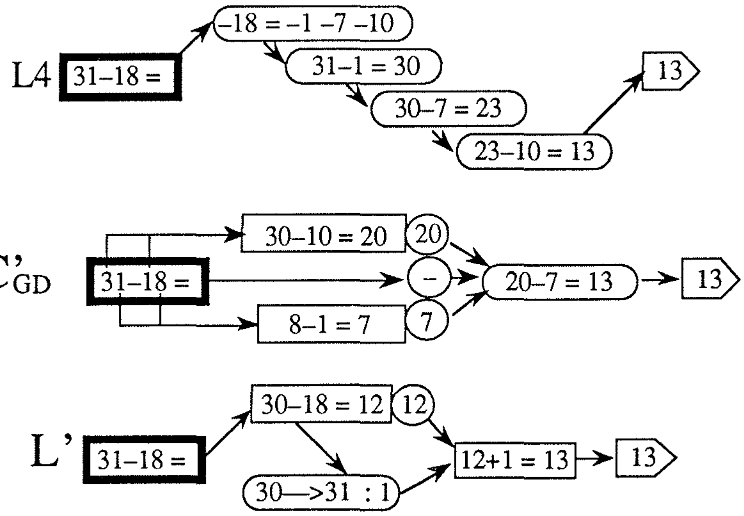


Voici, moins détaillées, quelques représentations de ces démarches :





Et quelques autres encore, quelquefois apparues (C' et L' en particulier) :



On fait intervenir ici des «boîtes» qui peuvent être des contenus déclaratifs («je sais que 30–10=20») ou le résultat d'un calcul (surcompter de 10 à 20, ou par dizaines...) selon les sujets. C'est pourquoi une analyse plus fine passe nécessairement par une étude de cas : examiner comment, pour un sujet donné, est traitée telle ou telle «boîte».

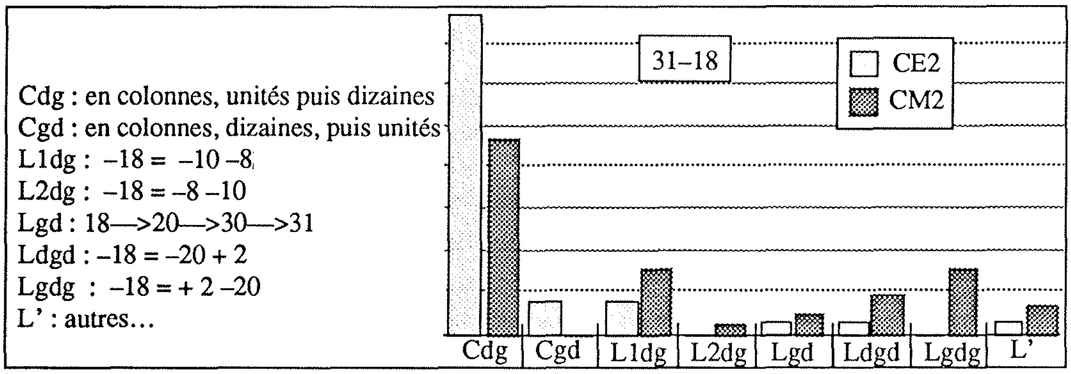
On voit également qu'apparaissent des niveaux d'erreurs très distincts :

• les unes sont procédurales (C1*, C2* par exemple) car dues à l'emploi d'une règle illicite ;

• d'autres sont des erreurs déclaratives (je sais que «11–8 = 4») ;

• d'autres encore sont dues à des pertes d'informations intermédiaires (omission de la retenue, par exemple, ou bien d'un signe : une chaîne –(20+2) qui devient –20, suivi de +2 ou de rien du tout). Il pourrait s'agir dans ce dernier cas de **saturation.**

Quelles sont les démarches utilisées en CE_2 et en CM_2 ? Le tableau suivant indique la répartition des différentes démarches répertoriées :



On remarque qu'il y a un abandon partiel de Cdg au profit de démarches «en ligne», en particulier L1dg, Ldgd, Lgdg.

Mais pourquoi s'intéresser autant à 31–18 ?

Cette opération n'est pas le tout du calcul mental. Mais, parmi celles qui ont fait l'objet de cette étude, elle paraît *révélatrice* (on peut en citer d'autres, comme 59–19 ou 50–13). Elle est révélatrice :

• d'une part, des compétences et des représentations numériques d'un enfant donné, à une époque donnée, et sans doute même de compétences plus générales de mémorisation et de planification ;
• d'autre part, probablement, des conceptions en œuvre dans l'apprentissage scolaire du calcul. Bien sûr, une population d'une centaine d'enfants ne peut être considérée comme un échantillon. Mais, à défaut d'un état des lieux objectif et complet, on dispose désormais de concepts et d'outils étalonnables.

Sous toutes les réserves qui précèdent, on peut émettre quelques *impressions* et avancer quelques *hypothèses* :

1. La première impression est un constat : le calcul mental, s'il est pratiqué, ne l'est pas de façon autonome, c'est-à-dire *avant* ou *à distance* des techniques écrites. Il consiste le plus souvent à se représenter mentalement le déroulement de cette technique. Laquelle n'est pas toujours la mieux adaptée en l'absence de support.

2. La seconde impression est plus générale : il existe un gain moyen de rapidité et de fiabilité, quelle que soit l'opération, entre CE_2 ET CM_2. De plus, les enfants de CM_2 disposent de démarches plus nombreuses, faisant appel à des représentations diverses.

3. Le calcul mental est une activité utile, au même titre que le calcul écrit sur papier ou l'emploi des calculettes ; il leur est complémentaire. Il permet d'établir fermement des représentations numériques variées, algorithmiques ou analogiques. C'est un champ particulier ouvert à la résolution de problème ; il fait intervenir non seulement des algorithmes mais des stratégies ; plus généralement c'est un domaine d'exercice de la mémoire sous toutes ses formes. Son évaluation est facile et très révélatrice.

Esquisse d'un programme

Précisons tout d'abord ce que l'on entend par «représentations numériques».

L'enfant découvre par étapes les nombres et leurs propriétés ; chacune de ces étapes suscite une évocation mentale nouvelle, éventuellement une réorganisation des évocations précédentes. Ainsi la première représentation rencontrée est la **liste** ; elle est verbale et «tubulaire» : on accède à un nombre à partir du précédent et en partant de 1.

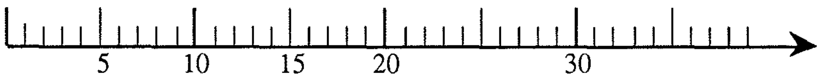
Un	Deux	Trois	Quatre	Cinq	Six		

Après quoi, il devient possible de «surcompter», de compter de deux en deux, ou à rebours. Mais ces étapes sont longues à aborder.

Un autre type de représentation qu'il n'y a pas lieu d'évoquer ici relève de la perception (visuelle) globale, par exemple pour la lecture d'un dé ou d'une carte à jouer.

Même si les chiffres sont déjà connus, la construction du système du numération chiffré (écrit) amorce une nouvelle représentation : la possibilité d'écrire des nombres *aussi grands qu'on veut,* et avec lesquels on peut calculer, ouvre le champ immense des ordres de grandeurs ; c'est celle que l'on voit à l'œuvre dans les démarches ci-dessus nommées «en colonnes». On peut la dire algorithmique (ou procédurale) ; l'enfant dispose de *règles de manipulations des nombres* dont la mémorisation est surtout verbale, même s'il écrit sur un support.

Un autre type de représentation, dont le caractère semble plutôt visuel (analogique), met en jeu une **graduation** numérique. Il ne s'agit plus de la *liste* («tubulaire» et verbale) parce qu'on peut s'y déplacer dans une sens ou dans l'autre et pas seulement de 1 en 1.



L'accès à cette graduation et son fonctionnement, supposent acquis plusieurs instruments :

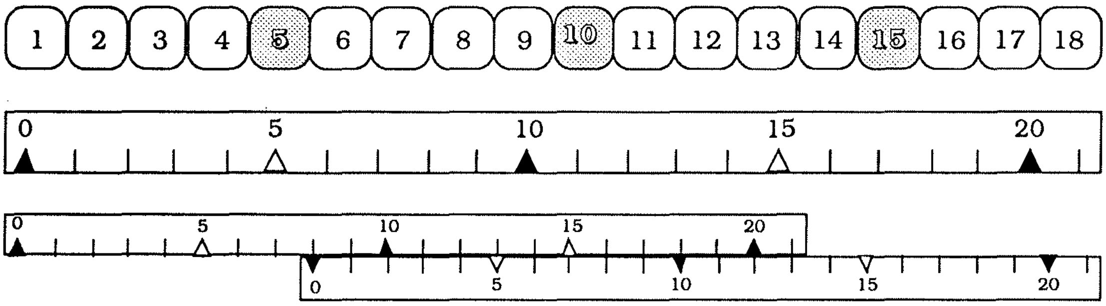
• des faits numériques mémorisés, comme la table d'addition, les compléments à dix, des décompositions additives ;

• une bonne compréhension de la numération, qui imprime un *rythme* (dizaines, centaines...) à cette droite numérique. Voici la différence essentielle entre liste et graduation : la liste est découverte pas à pas, mais jamais anticipée. Alors que la découverte de la graduation est celle de son mode de fabrication, donc de son caractère illimité et de la capacité de survol, dans un sens ou dans l'autre, par l'usage des opérateurs et la connaissance de leurs propriétés.

Ces représentations ne sont pas successives, mais en grande partie superposées. Cependant, une pratique prématurée du calcul écrit a tendance à donner à la représentation «algorithmique» une position dominante, voire exclusive. Les mécanismes peuvent en être renforcés (si toutefois les procédures exercées sont légitimes), mais l'*intuition des nombres* et des *ordres de grandeur* s'en trouvent appauvris.

Découvrir des représentations

Il est donc souhaitable de renforcer, pas à pas mais dès le CP, les représentations du type graduation. Des supports tels que ceux du jeu de l'Oie conviennent, que l'on fera évoluer peu à peu au cours du cycle II jusqu'à l'usage de règles à calcul :



Etablir des faits numériques

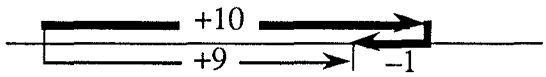
Les compléments à cinq (cf. boulier), à dix, à vingt, les décompositions des «petits nombres», y compris celles qui engagent zéro (pour éviter les erreurs du type 0–9=0). Ce peut être par le moyen de jeux de dés, de dominos, de cartes... L'apparence de jeu n'est que le moyen d'habiller un exercice par lequel on cherche un renforcement.

Plus ce répertoire est étendu, plus on réduit l'appel à des procédures lentes et «coûteuses». Plus il est renforcé, plus rapide et plus sûr est le rappel. Mais il n'est pas utile de l'étendre à l'excès.

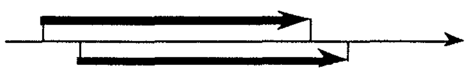
Etablir des procédures

Il existe des démarches types qui doivent devenir des «routines» à la suite des opérateurs simples que sont +1 , –1 , +10 ,–10. Elles mettent en jeu des schémas qui font appel à des faits numériques ; en voici trois exemples :

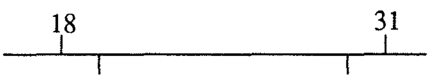
Pivot : +9 = +10 –1



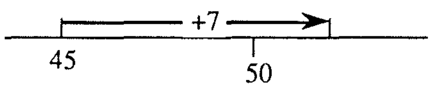
Décalage : 31–18 = 30–17



Jalonnement : 18—>31 c'est 18—>20—>30—>31



ou encore : 45+7 c'est 45+(5+2)



Le rôle important de ces schémas s'analyse en terme de «coût» : l'usage des opérateurs ±10 et ±1, malgré l'allongement de la chaîne de calcul, entraîne une économie.

Estimer des ordres de grandeur

Il ne s'agit pas tant de calcul exact que d'une procédure de contrôle, complément indispensable de l'usage de la calculette, et malheureusement très sous-exercée à l'école ; les dernières Instructions réduisent encore la part qui lui est faite.

Décomposer

Les faits numériques ne concernent pas seulement les tables à un chiffre, mais aussi les doubles, les carrés, les multiples de 25. C'est pourquoi bien des calculs multiplicatifs demeurent de bons exemples de ce que nous examinons ici :
Pour calculer 12×13 : $12 \times 13 = 12 \times (12 + 1) = 12 \times 12 + 13 = 144 + 13$.

Varier la règle

Les exercices doivent être brefs et variés. La variété porte sur l'organisation du groupe aussi bien que sur la règle du jeu.

Organisations possibles :
• Maître/classe : (cf. procédé Lamartinière) avec l'ardoise.
• Farandole : un enfant énonce un nombre ; son voisin ajoute 3, le voisin de celui-ci ajoute 3, etc. (mais on peut aussi ajouter 1, puis 2, puis 3, etc., ou bien multiplier par deux).
• Compétition : on affiche une opération. Il s'agit non seulement d'indiquer le résultat, mais de comparer différentes démarches pour y parvenir.

Règles du jeu :
• Aucun support : l'opération est donnée oralement, et la réponse aussi.
• L'énoncé est écrit ; la réponse aussi, mais sans notation intermédiaire.
• Une chaîne de résultats intermédiaires est autorisée, mais sans «poser» les opérations.

Par ailleurs, les démarches de calcul ne sont pas univoques et automatiques ; la mise en concurrence, l'explicitation, la discussion orale des choix permettent d'étendre l'éventail des choix de chacun et de l'affermir. Plutôt que la rapidité, c'est la simplicité de la démarche, la sûreté du résultat, la qualité de l'ordre de grandeur qui méritent d'être privilégiés.

On le voit, ce n'est pas tant le calcul qui est ici en jeu que des capacités plus générales d'une organisation consciente de la mémoire, de l'anticipation, de la planification des actions. L'esquisse ci-dessus est celle d'un programme pédagogique. L'étude expérimentale didactique ou psychologique n'a pas exactement le même objet : elle vise a mieux connaître les processus cognitifs et sociaux mis en œuvre. Pour intéressante que soit cette connaissance, il n'en découle pas de conséquences pédagogiques nécessaires, lesquelles ne peuvent se passer non plus d'une base expérimentale, qui dépend étroitement de la population, du maître et, sans doute, du temps qui passe.