ÉVOLUTION DU PASSAGE ARITHMÉTIQUE-ALGÈBRE DANS LES MANUELS ET LES PROGRAMMES DU 20ÈME SIÈCLE

CONTRAINTES ET ESPACES DE LIBERTÉ POUR LE PROFESSEUR

Lalina COULANGE,

Équipe DDM, Laboratoire Leibniz, Grenoble

Résumé. Cet article porte sur l'enseignement des systèmes d'équations en fin de collège. Notre cadre théorique nous conduit à questionner l'activité du professeur de Troisième et les pratiques d'introduction officielle des systèmes d'équations. Les résultats d'une analyse de programmes et de manuels actuels et passés et d'une enquête auprès de professeurs de collège nous permettent d'apporter des éléments de réponse aux questions posées.

Introduction

Il existe une littérature abondante sur l'algèbre élémentaire enseignée au niveau du secondaire, plus particulièrement sur les moments de transition arithmétique-algèbre. Des recherches sur ce sujet ont d'ailleurs donné lieu à des articles précédemment parus dans *petit x*, écrits par Booth (1985), Chevallard (1985, 1989 et 1990), Gascon (1994) ou autres. Mais peu d'auteurs s'intéressent directement à l'activité du professeur : ils se centrent essentiellement sur l'étude de curriculum ou des difficultés d'élèves débutants en algèbre. Seuls quelques chercheurs comme Vergnaud et al. (1987) ou Schmidt (1996) évoquent ou questionnent l'activité du professeur lors de l'introduction de l'algèbre élémentaire. Néanmoins si ces derniers auteurs pointent le rôle central de l'enseignant, lors des premiers moments d'enseignement de l'algèbre, ils ne précisent pas en quoi consiste ce rôle et ne décrivent pas les pratiques enseignantes existantes dans les classes « ordinaires ». Comme le souligne Balacheff (1999), ce « point de vue du professeur » reste insuffisamment développé dans les recherches sur l'enseignement/apprentissage de l'algèbre élémentaire. Sur ce point, notre travail reste singulier. Nous nous intéressons ici aux premiers moments de l'étude des systèmes linéaires en fin de Collège.

Le texte qui suit comporte deux parties. Dans la première partie, nous présentons quelques éléments de notre cadre théorique. Ce cadre nous conduit à formuler des questions précises relativement aux pratiques d'enseignement des systèmes d'équations en Troisième. La deuxième partie prend appui sur les résultats d'une analyse de programmes et de manuels et d'une enquête auprès de professeurs pour apporter des éléments de réponse aux questions posées.

I. Point de vue sur l'activité du professeur dans l'enseignement des systèmes d'équations en Troisième

Nous considérons que l'activité du professeur de mathématiques est soumise à des contraintes génériques (relatives à des dispositifs didactiques généraux) et spécifiques (liées à des aspects épistémologiques du savoir mathématique à enseigner, aux objectifs et à l'organisation de l'enseignements fixés par les programmes officiels). Ces contraintes résultent en partie de la position de l'enseignant au sein d'une ou plusieurs institutions.

Néanmoins il reste à l'intérieur de cet ensemble de contraintes institutionnelles un espace de liberté pour l'enseignant. Au sein de cet espace de liberté, les décisions de l'enseignant peuvent être influencées par d'autres systèmes de contraintes institutionnelles rencontrées tout au long de son histoire personnelle.

> La personne X est quasiment toujours dans une certaine mesure, un mauvais sujet de I[1], parce que son rapport s'est formé par l'intégration, au fil du temps, des influences exercées par les divers rapports institutionnels auxquels elle a été assujettie. (Chevallard 1996, p. 4).

On parlera dès lors de libertés institutionnelles. Ainsi, le modèle de l'activité de l'enseignant en termes de libertés et de contraintes institutionnelles peut être schématisé comme suit :

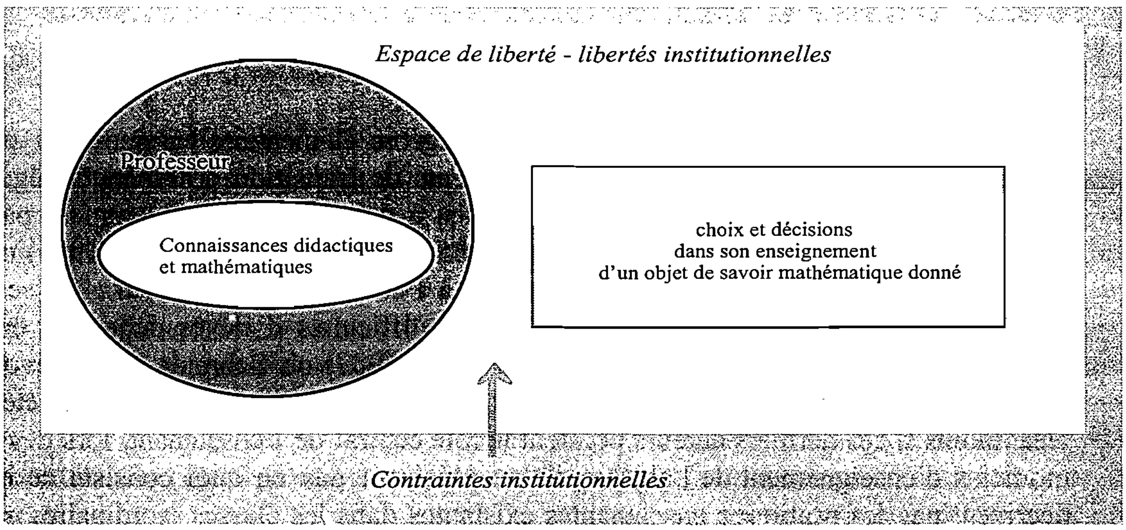


Fig. 1 modèle de l'activité du professeur en termes de libertés et contraintes institutionnelles

Ce modèle nous permet de formuler comme suit des questions au sujet des pratiques d'enseignement des systèmes d'équations en Troisième :

Quelles sont les contraintes institutionnelles qui pèsent actuellement sur l'activité du professeur de Troisième, lorsqu'il envisage l'enseignement des systèmes et de la mise en

[1] l'institution considérée au moment « présent ».

équations ? lorsqu'il prévoit l'organisation et la gestion de l'introduction officielle des systèmes d'équations ?

Quelles sont les origines et les causes de ces contraintes ? Qu'ont-elles pu être à d'autres périodes d'enseignement ? Quelles ont été leur évolution d'une période à l'autre ?

Quelles alternatives ou libertés possibles sont offertes par les « anciens » systèmes de contraintes institutionnelles ?

Afin de donner des éléments de réponse à ces questions, nous avons analysé les programmes de 1902 à 1999 et certains manuels de ces époques (considérant ces éléments textuels du savoir enseigné comme représentatifs de contraintes institutionnelles). Nous avons complété cette première étude par un questionnaire auprès de professeurs de troisième : nous leur avons demandé leurs choix pédagogiques pour introduire les systèmes d'équations en classe de Troisième et les raisons de ces choix. Dans la suite de cet article, nous articulons les résultats de la première étude aux réponses des enseignants.

II. Contraintes et libertés institutionnelles du professeur dans l'enseignement des systèmes d'équations en classe Troisième

II.1. Évolutions des contraintes institutionnelles

Chevallard (1985 et 1989) a analysé l'évolution de l'algèbre enseignée sur une vaste période (du dernier tiers du XVIe au XXe). Cet auteur met en évidence des ruptures historiques dans l'enseignement de l'algèbre, plus précisément liées aux moments de transitions arithmétique-algèbre : il étudie notamment le bouleversement provoqué par la disparition de l'arithmétique élémentaire enseignée à la fin des années soixante.

En lien avec ces ruptures, notre analyse de manuels et des programmes de 1902 à 1999 révèle des changements dans le rôle joué par la mise en équations de problèmes du premier degré.

Fonctions occupées par la mise en équations de problèmes

Le tableau 1 ci-après synthétise les changements principaux apparus dans l'enseignement de la mise en équations relativement au découpage en cinq périodes de la période étudiée : classique, transition, réforme, contre-réforme, contemporaine.[2]

[2] Selon un découpage prenant en compte les changements de programmes en France depuis 1902 : nous justifions plus loin les dénominations.

Période	*Classique (1902-1958)*	*Transition (1960-1971)*	*Réforme (1972-1979)*	*Contre-réforme (1980-1988)*	*Contemporaine (1989-1999)*
Arithmétique élémentaire enseignée	oui : arithmétique traditionnelle	oui : arithmétique « numérique »	non	non	non
articulation	oui	effritée	disparue	disparue	« mimée »
Algèbre enseignée	élémentaire (numérique/littéral)	élémentaire (numérique)	moderne	géométrique	élémentaire morcelée et appauvrie
			Mise en équations de problèmes		
Champs de problèmes à mettre en équations	problèmes concrets traditionnels en arithmétique : mélange, alliage, partages, escomptes et intérêt ... problèmes géométriques problèmes à données littérales	certains problèmes concrets traditionnels en arithmétique : partages, courriers, intérêt... problèmes géométriques	problèmes intra-mathématiques à plusieurs items : les systèmes comme outil reconnu associé à la représentation graphique des fonctions affines	certains problèmes concrets traditionnels en arithmétique quelques énoncés « dérivés » des problèmes typiques de la réforme (sujets de BEPC)	nombreux problèmes concrets traditionnels en arithmétique quelques énoncés « dérivés » des problèmes typiques de la réforme

Tableau 1. Mise en équations de problèmes au sein de l'algèbre enseignée

- Comme on peut le lire dans ce tableau, du début du XXe au début des années 1960 une partie des mathématiques enseignées est organisée autour d'une articulation entre arithmétique et algèbre élémentaires. Cette période d'enseignement est dénommée *classique* en référence à Chevallard (1989) qui parle de « stratégie classique d'introduction à l'algèbre contre l'arithmétique ». Dans les manuels de cette époque sont tenus des propos explicites concernant une articulation entre arithmétique et algèbre faite d'oppositions et de filiations comme Bourlet (1908)[3] :

> Beaucoup de solutions de l'arithmétique sont longues, peu claires, chargées de périphrases et par là fatigantes à suivre ; d'autres par contre, sont d'apparence simples mais reposent sur des observations auxquelles on ne pense pas toujours. Il y a souvent avantage à employer des lettres pour représenter les nombres inconnus et des signes pour indiquer les opérations à effectuer sur les nombres donnés et les nombres inconnus. Les solutions prennent alors une tournure algébrique, elles ne font appel à aucune remarque préliminaire : elles sont rapides et nettes.[4] (op. cité, p. I)

Au sein de cette organisation globale du savoir enseigné, un corpus important de problèmes concrets du premier degré se retrouve à la fois au centre de l'arithmétique et de l'algèbre enseignées.

[3] Dans l'introduction au *Cours abrégé d'Arithmétique élémentaire du premier cycle,* ed. Hachette, 1908

[4] Pour Chevallard, ce propos est une rhétorique familière de la stratégie d'introduction classique de l'introduction à l'algèbre : « Le gain de l'opération est souligné sans détour : la solution algébrique est plus simple et plus rapide que la solution arithmétique. Elle dispense de faire de longs raisonnements. Rhétorique familière. » (Chevallard 1989, p. 25).

Ainsi un nombre important de problèmes concrets pouvant être traités par des systèmes d'équations sont-ils tout d'abord rencontrés par les élèves et leurs professeurs dans le cadre de l'arithmétique enseignée au premier cycle du secondaire. Ces énoncés-types sont dans ce premier contexte d'enseignement, le lieu d'étude de techniques de résolution arithmétique telles que méthodes de fausse supposition et méthodes de substitution sans désignation (s'appuyant sur des graphiques conventionnels sous forme de barre ou de segment algébrique). Nous nommons « substitution arithmétique ». ces dernières méthodes utilisées pour résoudre des problèmes de partage en parties inégales.

Donnons quelques exemples pour éclairer le lecteur sans doute peu familier de telles techniques. Tout d'abord un problème résolu par fausse supposition[5] :

PROBLEME : Fausse supposition
Une couturière reçoit 324f pour confectionner en tout 60 chemises d'homme et de garçonnet. Sachant que la chemise d'homme lui est payée 6f et la chemise d'enfant 4f, on demande combien il y a de chemises de chaque sorte.
Solution arithmétique
Raisonnement – on demande combien il y a de chemises de chaque sorte. On sait que la couturière a reçu en tout 324f ; mais comme les chemises sont de valeurs différentes, on ne peut pas calculer directement le nombre de chemises de chaque sorte. Si toutes les chemises étaient des chemises d'enfant, la couturière recevrait 4f × 60 = 240f, somme inférieure de 324f – 240f = 84f à la somme indiquée. Dans les 60 chemises, il y a donc des chemises d'homme. Chaque fois que la couturière confectionne une chemise d'homme au lieu d'une chemise d'enfant, elle reçoit en plus : 6f – 4f = 2f. Or la somme reçue, en calculant sur 60 chemises d'enfants, doit être augmentée de 84f ; la couturière doit donc confectionner 84/2 = 42 chemises d'homme. D'où la solution suivante :
Solution – Si la couturière confectionnait 60 chemises d'enfants, elle recevrait : 4f × 60 = 240f soit : 324f – 240f = 84f de moins. Chaque fois qu'elle confectionne une chemise d'homme au lieu d'une chemise d'enfant, elle reçoit 6f – 4f = 2f de plus. Pour recevoir le compte exact, elle devra donc confectionner 84/2 = 42 chemises d'hommes. Et 60 – 42 = 18 chemises d'enfants. (Court et Royer 1931, p. 31)

Les deux énoncés suivants sont des problèmes de partage en deux parties inégales (connaissant leur somme et leur différence ou leur somme et leur rapport), tous deux résolu par substitution arithmétique :

PROBLEME : somme et différence (Partage)
Deux ouvriers ont reçu ensemble une somme de 249f. Le premier a reçu 75f de plus que l'autre. Combien chacun d'eux a-t-il reçu ?
Solution arithmétique
Raisonnement – On demande combien chaque ouvrier a reçu. Nous savons : 1/ que les deux parts valent ensemble 249f ; 2/ que le premier a reçu une part égale à celle du second plus 75f.
La somme à partager 249f contient donc : la part du second + 75f + la part du second (Fig. 62).
Si de la somme à partager l'on retranche 75f, il reste donc deux fois la part du second.
Solution – Si l'on retranche 75f à 249f, il reste deux fois la part du second ou : 249f – 75f = 174f. Le second ouvrier a donc reçu 174/2 = 87f. Et le premier : 87f + 75f = 162f.

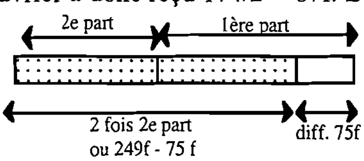


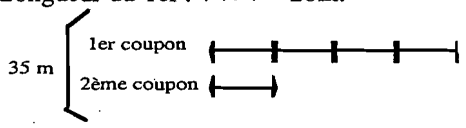
Fig. 62

[5] « Lorsqu'elle ne peut pas procéder du connu vers l'inconnu, l'arithmétique sait éviter l'emploi d'une inconnue [désignation algébrique] par le recours – entre autres procédés – à une fausse supposition » (Chevallard 1989)

Remarque – On aurait pu raisonner aussi bien, en remarquant que la somme 249f augmentée de 75f, contient 2 fois la première part. (Court et Royer 1931, p. 64).

Partages en parties inégales (...) 2 parts – On connaît la somme et le rapport des parts.
284. Problème type : partager une pièce d'étoffe de 35m en deux coupons de manière que le 1er soit 4 fois plus long que le 2e.

Solution. – 35 m = 4 fois long. du 2e + 1 fois long. du 2e = 5 fois long. du 2e.
Longueur du 2e coupon : 35 / (4 + 1) = 35/5 = 7m
Longueur du 1er : 7 × 4 = 28m.



Indication générale : On remplace la plus grande part par 2, 3, ... fois la plus petite. (Delfaut et Millet 1932, p. 14)

Comme l'illustrent ces extraits de manuels d'arithmétique, les techniques arithmétiques sont enseignées sous forme de règles à appliquer à des problèmes-types. L'élève doit savoir rattacher un problème particulier à un problème-type pour ensuite appliquer la méthode correspondante.

Les objets algébriques, tels les systèmes d'équations sont dès lors enseignés en fin de Collège comme des outils en concurrence avec les méthodes arithmétiques sur le même corpus de problèmes concrets. De nombreux énoncés similaires à ceux cités ci-dessus et étudiés en arithmétique peuvent figurer dans les manuels d'algèbre. Il s'agit cette fois de les résoudre en les ramenant à un système d'équations :

1418. Pour 5m de soie et 4m de drap on a payé 292f et pour 4m de soie et 5m de drap on a payé 284f. Quel est le prix du mètre de chaque étoffe ? (Réunion de professeurs 1949, p. 239).

396. Partager 38 francs entre trois personnes de manière que la part de la première soit double de celle de la deuxième, et que la deuxième reçoive 2 francs de plus que la troisième. (Bourlet 1903, p. 190)

D'autre part, au sein d'ouvrages d'algèbre de cette époque, en parallèle aux problèmes arithmétiques (et de quelques énoncés de nature géométrique), existent des énoncés à données littérales comme le suivant :

1446. Un bassin peut être rempli par les conduits A et B en 70 minutes ; par les conduits A et C en 84 minutes, et par les conduits B et C en 140 minutes. Dans combien de temps le bassin peut-il être rempli par chacun des conduits coulant seul ? Généraliser en remplaçant respectivement 70, 84 et 140 par a, b et c. (Réunion de professeurs 1949, p. 246).

1448. Un dirigeable v a de A à B et revient en A. Le vent ayant soufflé de A vers B, on admet qu'à l'aller la vitesse du ballon s'est accrue de celle du vent et au retour elle est diminuée.
1/ Évaluer la vitesse propre du ballon et celle du vent sachant que AB = 50 km et que l'aller a demandé 1 heure et le retour 2h 1/4.
2/ Établir et discuter la formule générale qui donne la durée du trajet aller et retour en fonction du trajet AB = a km et des vitesses du ballon et du vent et démontrer que l'effet du vent est défavorable. (ibid., p. 246).

L'objectif de ces énoncés est clairement d'illustrer en quoi les outils algébriques dépassent et généralisent les méthodes arithmétiques dans la résolution et l'étude de problèmes du premier degré. Gascon (1995) et Chevallard (1989) soulignent le rôle fondamental de la notion de paramètre dans le passage de la problématique arithmétique à celle de l'algèbre : la présence d'énoncés à données littérales manifeste une volonté d'initier les élèves à de véritables pratiques de modélisation algébrique.

- L'articulation de l'arithmétique et de l'algèbre élémentaire décrite s'effrite au début des années 1960. Avec *la période dite de transition*, s'amorce la disparition des problèmes concrets d'origine arithmétique. L'importance accordée aux pratiques de mise en équations, diminue, celles-ci n'ayant plus de rôle à jouer dans le nouveau courant d'enseignement qui s'installe, au sein duquel s'efface déjà l'arithmétique élémentaire enseignée.

- *La Réforme des mathématiques modernes* bouleverse effectivement l'ensemble de l'enseignement secondaire au début des années 1970 : l'arithmétique traditionnelle disparaît et une problématique des structures algébriques s'instaure dans le savoir enseigné en fin de collège. Ce bouleversement signe la disparition des problèmes concrets au sens classique, voire celle de tout énoncé « à mettre en équations ». Les énoncés du premier degré conservent une apparente importance au sein des ouvrages étudiés. Mais ils ont changé de forme et de contenu. Ce sont majoritairement des problèmes intra-mathématiques, à plusieurs items, qui font intervenir les systèmes comme seul outil, en lien avec la représentation graphique de fonctions affines : il s'agit de faire correspondre la solution d'un système de deux équations à deux inconnues, obtenue algébriquement ou graphiquement, aux coordonnées du point d'intersection de deux courbes représentatives de fonctions affines. Par exemple:

19. I.a. Résoudre le système de deux équations suivant : $\begin{cases} 3x=14y \\ y=14-\frac{2x}{3} \end{cases}$

b. Représenter graphiquement, pour chaque équation, les variations de y en fonction de x (unité : 1 cm sur chaque axe).
II - Soit un triangle ABC de côtés AB = 5 cm, AC = 6 cm, BC = 3 cm.
Soit M un point variable de BC. Par M, on mène la parallèle à AC, qui coupe AB en P.
On pose BM = x.
Calculer en fonction de x :
1. Le périmètre y_1 du triangle BMP ;
2. Le périmètre y_2 du quadrilatère APMC.
En utilisant les résultats de la question 1 et en justifiant la réponse, indiquer la valeur de x pour laquelle $y_1 = y_2$. (On pourra utiliser soit la question a, soit la question b) » (Boursin et Jordan 1971, p. 434).

17. Transformer l'expression suivante en produit de trois facteurs du premier degré :
$A = (3x - 2)(x + 1)^2 - 9(3x - 2)$.
Pour quelles valeurs de x l'expression A est égale à zéro ?
2. Construire sur un même graphique les représentations des fonctions
$y = 3x - 2$ et $y = x - 2$
On prendra des axes orthonormés, un vecteur unitaire égal à 1 cm.
3. Les droites correspondantes concourent au point A et coupent l'axe des abscisses en B et en C.
Calculer les coordonnées des trois points A, B et C. (ibid., p. 430)

C'est précisément un rapprochement entre fonctions et équations linéaires qui semble l'enjeu de ce type de problèmes. Une promiscuité plus générale entre fonction et équation est d'ailleurs flagrante dans tous les manuels étudiés. Celle-ci est cohérente avec le parti pris axiomatique[6] des auteurs de la Réforme des mathématiques modernes : l'association

66 Les auteurs de la Réforme insistent sur la nécessité d'une construction axiomatisée du savoir enseigné dans l'idée d'un rapprochement avec des mathématiques savantes de l'époque.

avec les fonctions permet de traiter « rigoureusement » des équations et de démontrer des questions d'équivalence, d'unicité et d'existence de solutions.

- *Pendant la période de contre-réforme*, en parallèle de l'avènement d'une algèbre de type géométrique, une volonté de « retour au concret » se fait sentir, exprimée par les enseignants qui s'insurgent contre l'abstraction excessive des mathématiques modernes. Cette idéologie conduit à une reprise (plus ou moins importante selon les manuels) de problèmes semblables à certains énoncés concrets de la période classique, à titre d'applications des notions algébriques enseignées. Parallèlement, on relève quelques problèmes à habillage concret, dérivés des énoncés typiques de la Réforme, essentiellement dans les sujets du brevet des Collèges : il s'agit de consignes « à plusieurs items », qui font intervenir des systèmes à résoudre graphiquement. S'amorce ainsi un mouvement qui aboutit au début des années 1990 à l'organisation contemporaine du savoir enseigné autour de la mise en équations et des systèmes d'équations.

- *La période contemporaine* marque un rapprochement avec l'ancienne problématique d'enseignement d'une algèbre élémentaire sous une forme que l'on peut qualifier d'appauvrie. Dans la continuité de ce courant et d'ambitions « utilitaristes » cette fois exprimées haut et fort par les initiateurs de la réforme de 1989, les problèmes concrets font un retour en force au sein même de l'habitat emblématique des systèmes d'équations pendant la période contemporaine. On constate parfois une véritable explosion de ces énoncés à mettre en équations, au sein des ouvrages contemporains : le manuel *Pythagore* (Bonnefond et al. 1993) en est un exemple flagrant. Ces problèmes correspondent pour la plupart à des énoncés typiques de la période classique, héritage de l'arithmétique traditionnelle, éventuellement remis au goût du jour :

> **59. La mule et le baudet (un vieux classique)**
> Une mule et un baudet chargés de sacs également pesants cheminent de concert. Le baudet se plaignant de sa charge, la mule lui dit : « De quoi te plains-tu ? Si je prenais un de tes sacs, je serais chargée deux fois autant que toi, et si tu me prenais un des miens, je serais encore aussi chargée que toi. » (Bonnefond et al. 1993, p. 84).
>
> *Dans la vie pratique (ou presque)*
> **21. Au marché**
> Une fermière a vendu une première fois 3 canards et 4 poulets pour 272F, puis une deuxième fois 2 canards et 3 poulets pour 192F. Combien coûte un canard ? Un poulet ? (ibid., p. 81).

Certains auteurs vont jusqu'à mettre en avant leur nature ancienne en parlant de « folklore mathématique » ou de « problèmes du grenier » (Bonnefond et al. 1993, pp. 80-84). Mais tout enseignement d'arithmétique traditionnelle a définitivement disparu du collège depuis la Réforme des mathématiques modernes. Par suite, ce corpus d'énoncés repris partiellement, ne joue pas le même rôle qu'à l'époque classique et leur résolution algébrique ne prend pas le même sens qu'à cette période. Ces problèmes ne sont plus présents pour nourrir une articulation arithmétique-algèbre du savoir enseigné, mais plutôt, selon l'idéologie marquée de cette époque, pour illustrer une efficacité concrète ou pratique de l'outil système d'équations. Ce premier ensemble de problèmes du premier degré joue également un rôle dans la topogenèse[7] des systèmes d'équations. Comme nous y reviendrons par la suite, on constate une baisse importante du niveau des exigences contemporaines associées au calcul algébrique. La variabilité des énoncés destinés uniquement au travail des techniques de résolution algébrique de systèmes d'équations s'en trouve réduite. Ceux-ci deviendraient vite répétitifs aux yeux des élèves et des enseignants, ce qui n'est plus dans l'air du temps. L'habillage concret apparaît comme un moyen pour faire varier la forme des exercices où il s'agit de résoudre des systèmes d'équations.

Par ailleurs, les problèmes dérivés de la réforme subsistent, sous un habillage souvent concret, composés de plusieurs items : ils font intervenir la résolution graphique de systèmes, explicitement en lien avec la représentation graphique de fonctions affines :

47. Au club de judo

Un club de judo propose deux formules de prix à ses adhérents :

- La formule A : la séance coûte 60 F.
- La formule B une carte d'abonnement coûte 350 F pour l'année et qui réduit le coût de la séance à 35 F.

a/ Compléter le tableau ci-dessous après l'avoir reproduit :

Nombre de séances	5	10	20	30
Coût avec la formule A				
Coût avec la formule B				

b/ Exprimer les coûts annuels A(x) et B(x) de x séances pour chacune des formules A et B.

c/ Tracer dans un repère orthogonal les demi-droites d'équation $y = 60x$ et $y = 35x + 350$ où x est un nombre positif.

d/ Calculer le nombre de séances pour lequel les coûts annuels dans les deux formules seront les mêmes. Quel sera alors le prix à payer ?

e/ Expliquer comment on peut retrouver graphiquement le résultat précédent. (Bonnefond et al., p. 101).

49. Rendez-vous

Deux personnes habitent l'une à Paris, l'autre au Havre. Ces deux villes sont distantes de 200 km. Les deux personnes se sont fixé un rendez-vous dans une ville V, située entre Paris et Le Havre. La distance entre Paris et la ville V est de x km. Les deux personnes vont à leur rendez-vous en automobile. La voiture du Parisien consomme 6 litres d'essence aux 100 km et la voiture du Havrais consomme 9 litres aux 100 km.

a) Exprimer en fonction des quantités $f_1(x)$ et $f_2(x)$ de litres d'essence consommées par les deux voitures pour aller respectivement de Paris à V et du Havre à V.

b) Représenter graphiquement $f_1(x)$ et $f_2(x)$ en fonction de x (indiquer précisément les unités utilisées).

c) Où devrait se situer la ville V pour que les deux véhicules consomment la même quantité d'essence ?

Retrouver le résultat à l'aide des graphiques de la seconde question. (ibid., p. 101).

En nombre relativement important, ce type d'énoncés nourrissent à nouveau un rapprochement entre les notions de fonctions affines et d'équations linéaires. Processus amorcé pendant les années 1990 qui se confirme : c'est un des éléments centraux de la période actuelle qui a débuté avec les programmes en vigueur depuis septembre 1999. La disparition de la géométrie analytique d'une part, l'appauvrissement du traitement algébrique des équations d'autre part aboutissent à une nouvelle organisation du savoir enseigné où les fonctions « dominent » l'objet système : au sein de certains des manuels de

[7] « La dichotomie des places [entre enseignant et élève] suppose une dichotomisation de l'objet de savoir : une version pour l'enseignant, une version pour l'enseigné. » (Chevallard 1991, p. 76).

Troisième les plus récents (Vinrich et Delord 1999), les systèmes d'équations sont introduits au sein du chapitre intitulé « fonctions affines ».

L'analyse de manuels et programmes révèle d'autres évolutions de ce type : au sein même du savoir enseigné autour des systèmes d'équations. Il s'agit maintenant d'exposer brièvement ces changements en lien avec les différents rôles prêtés à la mise en équations retracés ci-dessus.

Principales évolutions de l'enseignement des systèmes d'équations

Le tableau 2 ci-après synthétise les principales évolutions de l'enseignement des systèmes d'équations de 1902 à 1999, associées à différentes problématiques d'enseignement de l'algèbre au Collège :

Période	*Classique (1902-1959)*	*Transition (1960-1971)*	*Réforme (1972-1979)*	*Contre-réforme (1980-1988)*	*Contemporaine (1989-1999)*
Algèbre enseignée	élémentaire (numérique/littéral)	élémentaire (numérique)	moderne	géométrique	élémentaire morcelée et appauvrie
Systèmes d'équations au sein de l'algèbre enseignée					
Résolution algébrique	*substitution et élimination ou réduction* - travail important et riche des techniques : numérique (solution unique) et littéral	*substitution et addition ou combinaison* - travail important et riche des techniques : numérique (solution unique)	*combinaisons linéaires et substitution* - travail faible des techniques : numérique (**3 cas**) et littéral	*combinaison ou addition et substitution* - travail appauvri des techniques : numérique (3 cas).	*substitution et combinaison ou addition* - travail faible et appauvri des techniques : numérique (solution unique)
Résolution graphique	forme réduite y = ax + b présence très faible dans l'habitat des fonctions affines	forme réduite y = ax + b présence faible dans l'habitat des systèmes d'équations.	forme cartésienne ax + by + c = 0 présence faible dans l'habitat des systèmes d'équations (visualiser 3 cas)	forme cartésienne ax + by + c = 0 et réduite y = ax + b présence forte dans l'habitat des systèmes d'équations (**3 cas**)	forme réduite y = ax + b présence dans l'habitat des systèmes d'équations (solution unique)

Tableau 2. Les systèmes d'équations au sein de l'algèbre enseignée

Brefs commentaires du tableau 2.

- Une problématique d'algèbre élémentaire règne de façon stable pendant les *périodes classique* et *de transition*. Dans ce cadre, l'étude du traitement algébrique voire littéral[8] des systèmes, prime. Du côté « de l'élève », on relève notamment un nombre important d'exercices variés, réservés au travail et à l'approfondissement des techniques de résolution algébrique par substitution et par addition ou combinaison. Ce travail nourrit la résolution de problèmes de premier degré dont l'importance a été évoquée ci-dessus. Ceci peut expliquer le fait que l'accent soit mis sur la résolution algébrique de systèmes d'équations à coefficients numériques admettant une solution unique. Un problème concret, c'est-à-dire inspiré de la réalité n'admettant aucune solution ou une infinité de solutions apparaîtrait

[8] Avant la réforme de 1958.

comme mal posé. Il est ainsi parfois explicitement affirmé dans certains manuels de la période classique ou de transition :

> ***Un système de deux équations du premier degré à deux inconnues admet en général une solution unique.*** (Hémery et Lebossé 1960).

Parallèlement, isolée dans l'habitat emblématique des fonctions affines, l'étude de la résolution graphique (avec un passage obligé aux équations réduites associés à la fonction « y = ax + b ») est quasi-inexistante.

- Comme nous l'avons dit plus haut, *la Réforme des années 1970* marque la disparition de l'arithmétique et de son corpus de problèmes concrets ainsi que l'avènement d'une algèbre moderne dès le début du secondaire. Du côté du cours identifiable au côté « de l'enseignant », cette nouvelle problématique d'enseignement se traduit par des exposés théoriques en langage ensembliste sur les systèmes d'équations et sur la technique de résolution algébrique par combinaisons linéaires. Mais par ailleurs, peu d'importance est accordée aux résolutions effectives - algébriques ou graphiques, des systèmes d'équations : le nombre d'exercices réservés à ce type de tâches est considérablement réduit.[9] On note que les trois cas de résolution (solution unique, infinité de solutions ou aucune solution) qui ont joué un rôle important dans l'histoire de l'algèbre linéaire (Dorier 1990, Coulange 2000), sont « visualisés graphiquement » et étudiés de la même façon dans le cours et les exercices des manuels étudiés.

- Pendant la période de *contre-réforme*, une problématique d'algèbre géométrique donne au type de tâches : « résolution graphique du système de deux équations à deux inconnues », une importance nouvelle. L'accent est mis sur les trois cas de résolution, associés aux trois positions possibles de deux droites dans le plan. Une place plus importante est donnée à la résolution algébrique effective de systèmes (parfois étroitement interreliée à la résolution graphique) mais les exigences vis-à-vis des compétences en calcul algébrique ont diminué.

- La *réforme contemporaine de 1989* conduit apparemment à un rapprochement avec la problématique d'algèbre élémentaire du début du XXe siècle. La résolution algébrique des systèmes à coefficients numériques et à solution unique redevient un enjeu central, qui nourrit de nouveau la résolution de problèmes concrets. Cependant, le travail des techniques algébriques est appauvri : les exigences à ce sujet, restent d'un niveau qui peut paraître très bas si par comparaison aux périodes précédentes. La technique graphique redevient similaire à celle présente avant la Réforme des maths modernes avec un passage obligé par les « équations réduites » voire par la fonction affine; elle perd de son importance relativement à la période de contre-réforme. Au vu des différents manuels des années 1990, on peut parler d'un enseignement appauvri et morcelé des systèmes d'équations comme objet de l'algèbre élémentaire.

---

9 « Une fois la théorie apprise par l'élève, son travail revient à l'appliquer à l'intérieur d'exercices essentiellement calculatoires, finalement de peu d'intérêt par rapport au savoir. Ainsi [à cette époque], s'en trouvent modifiés les termes du contrat didactique : **le professeur fait la théorie ; l'élève l'apprend** ; le professeur est détenteur du savoir, l'élève applique ce que le professeur a transmis. » (Matheron 1993, pp. 67-68).

À partir des évolutions de l'enseignement des systèmes et de la mise en équations retracées ci-dessus, nous sommes maintenant en mesure de préciser des contraintes institutionnelles plus ponctuelles associées à l'introduction officielle des systèmes d'équations.

II.2. Des contraintes et des libertés institutionnelles dans l'introduction officielle des systèmes d'équations

II.2.1. Traces d'un discours technologique visant à introduire les systèmes d'équations

Dans certains manuels contemporains étudiés, on trouve les traces d'un discours technologique d'introduction des systèmes d'équations, au sein de la partie identifiable à un cours (restant donc « du côté du professeur »). On peut citer l'extrait suivant de *Pythagore* (Bonnefond et al. 1993) pour illustrer :

> **1. Exemple d'équation à deux inconnues**
> $8x - 5y = 1$ est une équation à deux inconnues.
> - Le couple (2 ; 3) est une solution (parmi d'autres) de cette équation.
> En effet, pour $x = 2$ et $y = 3$, on a : $8x - 5y = 8 \times 2 - 5 \times 3$
> $= 16 - 15$
> $= 1$
> (on dit aussi que le couple (2 ; 3) vérifie l'équation $8x - 5y = 1$)
> - Le couple (3 ; 2) n'est pas solution de l'équation $8x - 5y = 1$.
> En effet pour $x = 3$ et $y = 2$, on a : $8x - 5y = 8 \times 3 - 5 \times 2$
> $= 24 - 10$
> $= 14 \neq 1.$
> **2. Systèmes de deux équations à deux inconnues**
> Exemple : $\begin{cases} 2x-5y=12 & (E_1) \\ 3x+4y=-5 & (E_2) \end{cases}$ est un système de deux équations à deux équations.
> Résoudre ce système, c'est trouver tous les couples (x ; y) qui vérifient simultanément les équations (E_1) et (E_2).
> Autrement dit, c'est trouver toutes les solutions communes aux équations (E_1) et (E_2).
> (op. cité, p. 77).

L'objet système d'équations est présenté comme un moyen de répondre à la question : *sachant qu'une équation à deux inconnues a « plusieurs » solutions, peut-on trouver les couples solutions qui vérifient deux équations à deux inconnues ?* La question de l'existence et l'unicité du couple solution est éludée par les auteurs contemporains ; le système linéaire est quasiment introduit comme une « méthode de calcul » des solutions communes à deux équations.

Nous avons relevé des discours visant à introduire les systèmes en continuité avec les équations à deux inconnues au sein de tous les manuels des périodes précédentes. Les propos tenus varient d'une époque à l'autre et peuvent prendre une forme plus théorique. Par exemple, dans les manuels de la *période dite de contre-réforme*, de 1980 à 1989, la notion de système est introduite à travers un discours ensembliste, associé à la question : *quelle est l'intersection des ensembles infinis de couples solutions de deux équations à deux inconnues correspondant à deux droites du plan ?*

Ce discours semble une alternative encore envisagée par un nombre non négligeable d'enseignants contemporains. Comme en atteste le tableau 3, cinq des dix-neuf professeurs interrogés parlent de « montrer » le lien avec les équations de droite ou avec l'intersection de deux droites du plan, au moment de l'introduction des systèmes dans leur classe de Troisième.

Choix dans l'introduction officielle des systèmes d'équations
Équations de droite
Montrer aux élèves la correspondance entre les « 3 cas » de positions de droites dans le plan et d'ensembles solutions des systèmes de 2 équations à 2 inconnues.
Qu'est ce qu'une solution ? Un couple choisi est-il solution ou non (d'une équation du système) ? Représentation graphique de ces solutions
Jusqu'à présent, je montrais aux élèves de 3^e^ que résoudre un tel système, c'était en fait chercher l'intersection de deux droites. Mais toute la partie géométrie analytique pure ayant été supprimée des nouveaux programmes de 3^e^, je ne sais pas encore comment, je vais l'introduire cette année ni combien de temps je vais leur consacrer [10]
Intersection de droites

Tableau 3. Réponses conformes au rapport institutionnel de la *période de contre-réforme*[11]

- Cependant, l'étude des manuels et programmes des années 1990, ainsi que des réponses de la part d'autres enseignants au questionnaire, montre que ce propos, typiquement du côté de l'enseignant, tend à perdre de son importance. Il se trouve supplanté par des « activités introductives » destinées à faire participer l'élève à l'enseignement d'une notion mathématique nouvelle.

II.2.2. Activités préparatoires destinées à introduire le système d'équations comme outil de résolution de problème concret

En effet, au-delà d'idées directrices sur le savoir à enseigner, c'est surtout une nouvelle approche de l'enseignement des mathématiques, souhaitée par les personnalités du moment, qui est mise en place en 1989. Cette conception de l'enseignement met l'accent sur l'activité de l'élève et l'utilité des mathématiques « dans la vie quotidienne ». Elle amène la création et l'utilisation de nouveaux outils didactiques génériques et marque un bouleversement dans l'enseignement des mathématiques au collège. L'organisation de l'étude du savoir mathématique autrefois traditionnellement divisée en deux parties : « cours » puis « exercices » est remplacée par une structure ternaire qui fait intervenir un nouveau type de dispositif didactique réservé à l'élève : les « activités ».

> Or l'organisation réelle de l'étude est aujourd'hui au collège et, un peu moins sans doute au lycée, à structure essentiellement ternaire : elle se divise en principe, en Activités (lesquelles

---

[10] Ce professeur a été interrogé l'année de l'entrée en vigueur des nouveaux programmes de 3ème qui font disparaître la notion d'équations de droite au profit de celle de représentations graphiques des fonctions affines. Cet enseignant n'est pas le seul à protester contre la disparition des équations de droites pour la résolution graphique des systèmes. De nombreux professeurs se sont exprimés dans ce sens lors de la consultation nationale sur le projet de « nouveau » programme (synthèses académiques).

[11] Nous n'avons pas fait apparaître ici les raisons de ces choix, explicitement données par les enseignants interrogés. Signalons seulement que certains de ces professeurs font référence à l'algèbre linéaire : le rapport personnel de ces enseignants au système d'équations n'est pas sans influence sur leurs choix qui permet de montrer les « 3 cas », la notion de « couple » solution... autant d'objets caractéristiques de l'algèbre linéaire.

n'existaient pas comme telles dans le modèle classique), Synthèse (laquelle prend la place de cette synthèse a priori qu'était le cours d'autrefois), et Exercices. (Chevallard 2000, p. 111).

Dans le contexte de l'enseignement des systèmes d'équations, les activités introductives relevées dans les différents manuels étudiés, font massivement intervenir des problèmes concrets, semblables aux énoncés de la période classique. Suivant l'idéologie « utilitariste » du moment, ces activités sont censées donner une raison d'être aux systèmes linéaires comme outil de résolution de problèmes concrets, dès les premiers moments de leur enseignement.

C'est le choix affiché par la majorité des enseignants qui ont répondu à notre questionnaire. Conformément à leur position au sein de l'institution contemporaine, onze des dix-neuf professeurs interrogés prévoient d'introduire officiellement l'objet système d'équations par l'intermédiaire d'un problème concret (voir tableau 4).

On constate à l'étude de telles activités introductives, que certains auteurs de manuels contemporains cherchent à cette occasion, à introduire le système d'équations contre d'autres techniques de résolution non algébriques, censées être mises en œuvre, plus ou moins spontanément par les élèves. Par un effet de mimétisme culturel,[12] les problèmes concrets qui ont longtemps été un lieu de concurrence entre arithmétique et algèbre sont ainsi ici présents, afin de servir l'émergence de l'outil algébrique contre des stratégies par essais, tâtonnements ou autres.

À titre d'exemple, on peut citer l'activité introductive du début du chapitre emblématique des systèmes d'équations de *Pythagore* (Bonnefond et al. 1993, pp. 72-73). S'y succèdent trois énoncés concrets ressemblant à ceux de la *période dite classique*. Les deux premiers énoncés ne sont pas à mettre en équations : les auteurs indiquent dans la consigne que l'élève est censé adopter une stratégie par « essais successifs » :

A/ Au foyer
À la première table, on a servi 3 oranginas et 2 cocas pour 39 F.
À la deuxième table, on a servi 1 orangina et 3 cocas pour 34 F.
Combien coûte l'orangina ? Le coca ? (on pourra procéder par essais successifs).

B/ L'omnibus de 1900
Le conducteur d'un omnibus a reçu 2,85 F pour 12 places, les unes d'intérieur, les autres d'impériale. On sait que la place d'intérieur se paye 0,30 F et celle d'impériale 0,15F.
Combien y a–t-il de places de chaque sorte ?
Résoudre ce problème tiré d'un vieux cahier d'élève. (On pourra chercher des couples d'entiers dont la somme est 12). (op. cité, p. 72).

La consigne associée au troisième problème induit une résolution intermédiaire : entre algébrique et numérique : les questions posées guident l'écriture de deux équations linéaires à deux inconnues (dont la conjonction admet une solution unique), à partir de l'énoncé. Mais les techniques de résolution algébrique n'ayant pas encore été introduites, la consigne indique que le système obtenu est à résoudre par « tâtonnements et essais successifs » :

C. Le cheval et les deux bœufs
Voici un texte du début du siècle :

[12] Effet de mimétisme pointé dans la dernière colonne du tableau 1.

Un fermier pour se libérer envers son propriétaire, lui offre un cheval ou une paire de bœufs, ces trois bestiaux estimés ensemble 1040 F. Si le fermier donne son cheval, il redevra encore 70 F. et s'il donne les deux bœufs, le propriétaire lui devra 10 F. On demande : - le prix du cheval et celui de la paire de bœufs. - ce que doit le fermier.

On note x le prix du cheval et y celui de la paire de bœufs.
1/ écrire l'équation traduisant le fait que les trois bestiaux coûtent ensemble 1040 F.
2/ écrire la seconde équation traduisant la suite du texte.
3/ Donner une solution à ce problème.
(On pourra procéder par tâtonnements et essais successifs). (ibid., pp. 72-73).

Il s'agit à travers la succession de ces trois énoncés concrets, d'amorcer une progression vers la démarche de résolution algébrique en s'appuyant sur et contre les connaissances numériques des élèves… comme lorsqu'au cœur de la période classique, on souhaitait introduire l'algèbre élémentaire en s'appuyant sur et contre l'arithmétique élémentaire enseignée.

Cependant, si les techniques de tâtonnements, ou d'essais successifs, ainsi mises en concurrence avec l'outil algébrique nécessitent un réinvestissement de connaissances numériques acquises depuis les classes élémentaires, celles-ci n'ont pas fait l'objet d'un enseignement explicite au collège. C'est en cela que le contexte contemporain d'introduction des systèmes d'équations comme concurrent de telles techniques que nous disons numériques ou arithmético-numériques est radicalement différent de l'articulation classique entre arithmétique et algèbre évoquée en II.1. C'est en cela également que de nouvelles questions relatives à l'émergence de stratégies non algébriques dans les classes actuelles et aux pratiques des professeurs autour de ces stratégies se posent : nous y reviendrons en conclusion.

D'après les réponses à notre questionnaire, le choix d'une telle activité visant à introduire les systèmes linéaires est fait par un nombre non négligeable d'enseignants de Troisième. Parmi les onze enseignants qui prévoient d'introduire les systèmes d'équations comme outil de résolution de problèmes concrets, six professeurs précisent qu'il s'agit de proposer une activité permettant de mettre l'outil algébrique en concurrence avec différentes méthodes de résolution telles que des stratégies numériques par « essai-erreur », par « tâtonnements », voire avec une équation à une inconnue…

Le tableau qui suit rassemble l'ensemble des réponses au questionnaire, plus ou moins conformes au rapport institutionnel contemporain, les raisons des choix des enseignants considérés (qui viennent pour la plus grande part en écho aux ambitions utilitaristes dans l'enseignement des mathématiques de cette époque).

Commentaires sur les choix dans l'introduction des systèmes d'équations	**Raisons données de ces choix**
Introduction « ostensive » du système d'équations comme outil de résolution de problème	
Résoudre un pb qui se ramène à un système de deux équations à deux inconnues. Je « montre » les 2 inconnues aux élèves. On écrit ensemble le système et je leur donne les 2 techniques de résolution à appliquer.	Intérêt des systèmes en mathématiques *résolution de problèmes « concrets », géométriques (pbs d'aires).*

Introduction des systèmes d'équations comme outil de résolution de problèmes concrets	
Par un pb « concret » à mettre en équations, avec deux inconnues. On résout le système obtenu algébriquement et graphiquement.	*Montrer l'utilité des systèmes d'équations aux élèves »* Intérêt des systèmes en mathématiques *résolution de pbs concrets, arithmétiques, géométriques*
Mathématisation d'un pbleme concret	Intérêt des systèmes en mathématiques *- Résoudre des problèmes concrets à 2, 3... n inconnues - Résoudre des pbs de géométrie*
Petits problèmes à mettre en équations : permet de montrer l'intérêt de modéliser algébriquement : + rapide, économique...	Intérêt des systèmes en mathématiques *- permet de modéliser des problèmes simples à 2 inconnues vérifiant plusieurs contraintes*
Par des problèmes simples à mettre en équations et en laissant les élèves résoudre seuls : 1 plutôt par substitution, 1 par addition	Intérêt des systèmes en mathématiques *résoudre des problèmes*
Introduction des systèmes comme outil de résolution de problèmes concrets « contre » d'autres méthodes numériques, arithmético-numériques, arithmétiques ou algébriques	
Résolution d'un problème concret où la solution est accessible de tête ou par le « calcul ».	Intérêt des systèmes en mathématiques *Résolution de problèmes concrets*
Par l'activité Pyramides:[13] *Les élèves comprennent vite la situation et se mettent en recherche rapidement. Les variables*[14] *de la situation les conduisent à abandonner rapidement les méthodes de recherche par tâtonnements ou essais successifs ou fausse supposition.*	*les élèves comprennent vite la situation et se mettent en recherche rapidement* Intérêt des systèmes en mathématiques *résolution de problèmes – modélisation*
Résolution de problème simple ou la substitution est « naturelle » (traduction d'un problème de mise en équation) puis de pbs plus difficiles pour mettre en place l'écriture $\begin{cases} eq. \\ eq. \end{cases}$	Intérêt des systèmes en mathématiques *permet de résoudre des problèmes à plusieurs inconnues (donner une solution unique ou une relation entre les inconnues plus « simple » que les équations de départ).*
Recherche d'un série de 3 ou 4 pb.	*mettre en évidence « l'utilité » d'introduire une deuxième inconnue.* Intérêt des systèmes en mathématiques *résoudre des problèmes*
Pb simples : objectif -> un pb peut parfois être résolu simplement en commençant par faire un dessin, en écrivant une inconnue en fonction de l'autre -> choix des variables didactiques -> passage où il est plus judicieux d'écrire un système.	Intérêt des systèmes en mathématiques *sert à résoudre des problèmes du 1er degré à deux inconnues .*
Problème dans lequel les élèves peuvent trouver les solutions par différentes méthodes (essai/erreurs / écriture d'une seule équation à une inconnue...).	*Donner du sens et motiver l'utilisation des méthodes de résolution.* Intérêt des systèmes en mathématiques *résoudre des problèmes que l'arithmétique résout à plus fort coût.*

Tableau 4. Réponses conformes au rapport institutionnel *contemporain*

La lecture de ce tableau montre que la diversité reste inhérente aux projets d'enseignants pourtant conformes à ceux d'un « bon » sujet de l'institution *contemporaine*, c'est-à-dire ayant fait le choix d'une activité pour introduire les systèmes d'équations comme outil de résolution de problèmes concrets, éventuellement en concurrence avec des techniques numériques ou arithmético-numériques. Des différences surgissent dans les précisions données sur l'activité introductive, le ou les problèmes concrets décrits. Nous

[13] Activité tirée de la revue *Petit x, Hors série 1998-1999, Activités mathématiques au Collège 1993-1998.*

[14] Qu'on ne s'étonne pas d'entendre parler ici de « variables » d'une « situation » : l'enseignante interrogée est une formatrice d'IUFM qui a participé à l'Université d'Eté de Didactique des Mathématiques de la Rochelle en 1998. On relève plus loin dans les propos d'un autre enseignant, le terme de « variables didactiques » pour les mêmes raisons.

constatons également que certains professeurs évoquent des « séries » de problèmes éventuellement à complexité croissante, d'autres parlent d'un seul énoncé. Les différences ainsi constatées montrent la capacité des professeurs à occuper l'espace de liberté qui leur est toujours laissé dans le cadre d'une position institutionnelle donnée.

Retenons également le caractère imprécis et divers des commentaires faits par les professeurs autour des stratégies non algébriques d'élèves censées émerger au sein des activités introductives envisagées. Les enseignants interrogés évoquent des stratégies « avec des dessins », « numériques », par « essai/erreur », ou « par tâtonnements » ou « par le calcul »... Leurs propos illustre le flou laissé par le contexte institutionnel contemporain autour des techniques de résolution non algébriques censées devenir les concurrentes « malheureuses » de l'outil algébrique au travers de telles activités préparatoires. Flou qui constitue une différence essentielle entre l'époque *contemporaine* et la *période classique*, et qui nous fait interroger le fonctionnement interne de ce type de situations d'enseignement.

En guise de conclusion

En effet, comment l'enseignant contemporain gère-t-il la rivalité entre stratégies algébriques et non algébriques à instaurer lors de l'introduction des systèmes d'équations linéaires ? L'arithmétique élémentaire a disparu du savoir enseigné au début du secondaire depuis la fin des années 1960. Le fait que les méthodes de résolution arithmétique de problèmes ne fassent plus (et depuis longtemps) l'objet d'un enseignement explicite au Collège, questionne l'économie des dispositifs contemporains d'introduction des systèmes d'équations : tant du côté de l'activité des élèves, de celle des professeurs, que du sens pris par les techniques algébriques enseignées. Les enseignants sont-ils en mesure d'être à l'écoute des démarches non algébriques de leurs élèves ? De quels moyens disposent-ils pour gérer la concurrence entre des stratégies arithmético-numériques ou numériques et les stratégies algébriques, au sein de leur classe : tant dans l'élaboration de leur projet d'enseignement, dans leurs choix de problèmes qu'en situation de classe ? Quelles conséquences ont les décisions des enseignants sur le sens donné aux notions algébriques enseignées ? Autant de questions qui peuvent être reformulées en termes de connaissances sur la nature épistémologique des problèmes du premier degré et sur les méthodes de résolution arithmétique de ces énoncés. L'étude de l'activité d'un professeur introduisant les systèmes d'équations en Troisième (second volet de notre recherche) atteste de la difficulté à gérer la concurrence arithmétique-algèbre dans le contexte actuel d'ignorance institutionnelle de l'arithmétique élémentaire autrefois enseignée : cette difficulté se traduit par des phénomènes de décalage et d'incompréhension entre élèves et enseignant dans le « flou institutionnel » laissé autour des démarches non algébriques. Ces questions sont autant de pistes de réflexions pour les enseignants et les formateurs au sujet des premiers moments d'enseignement des notions algébriques.

BIBLIOGRAPHIE

BALACHEFF N. (1999), Symbolic Arithmetic versus Algebra. The core of a didactical dilemma. *In: Sutherland R. (ed.) Teaching and Learning Algebra.* Dordrecht : Kluwer Academic Publishers.

BOOTH L. (1985), Erreurs et incompréhensions en algèbre élémentaire, *Petit x,* n° 5, 5–17.

CHEVALLARD Y. (1985), Le passage de l'arithmétique à l'algébrique dans l'enseignement des mathématiques au Collège, Première partie, L'évolution de la transposition didactique., *Petit x*, n° 5, 51–94.

CHEVALLARD Y. (1989), *Arithmétique, algèbre, modélisation. Etapes d'une recherche,* Publications de l'IREM d'Aix-Marseille, n° 16.

CHEVALLARD Y. (1989), Le passage de l'arithmétique à l'algébrique dans l'enseignement des mathématiques au Collège, Deuxième partie, La notion de modélisation., *Petit x*, n° 1943–75.

CHEVALLARD Y. (1990), Le passage de l'arithmétique à l'algébrique dans l'enseignement des mathématiques au Collège, Troisième partie, Voie d'attaque et problèmes didactiques, *Petit x*, n° 30, 5–15.

CHEVALLARD Y. (1991), *La transposition didactique : du savoir savant au savoir enseigné,* Ed. La Pensée Sauvage.

CHEVALLARD Y. (1994) Les processus de transposition didactique et leur théorisation, In Arsac et al. (eds.) *La transposition didactique à l'épreuve,* Ed. La Pensée Sauvage.

CHEVALLARD Y. (1995-1996), *Séminaire d'analyse et d'ingénierie didactique,* IUFM d'Aix-Marseille.

CHEVALLARD Y. (2000) La recherche en didactique et la formation des professeurs : problématiques, concepts, problèmes, *Actes de la dixième École d'Été de didactique des mathématiques, Houlgate 1999,* in Bailleul (éd.), 98 - 112.

COULANGE L. (2000), *Étude des pratiques du professeur du double point de vue écologique et économique – Cas de l'enseignement des systèmes d'équations et de la mise en équations en classe de Troisième,* Thèse de l'Université Joseph Fourier-Grenoble I.

DORIER J.-L. (1990), *Contribution à l'étude de l'enseignement à l'université des premiers concepts d'algèbre linéaire.* Approches historique et didactique, Thèse de l'Université Joseph Fourier-Grenoble I.

GASCON J. (1994), Un nouveau modèle de l'algèbre élémentaire comme alternative à l'algèbre généralisé, *Petit x,* n°37, 43–63.

MATHERON Y. (1993), Les répercussions des changements de programme entre 1964 et 1989 sur l'enseignement du théorème de Thalès, *Petit x,* n° 34, 59-82

SCHMIDT S. (1996), La résolution de problèmes, un lieu privilégié pour une articulation fructueuse entre arithmétique et algèbre, *Revue des sciences de l'éducation,* Vol. XXII n°2, 277–294.

VERGNAUD G., CORTES A., FAVRE-ARTIGUE P. (1987), Introduction de l'algèbre auprès de débutants faibles. Problèmes épistémologiques et didactiques in *Actes du colloque de Sèvres : Didactique et acquisition des connaissances scientifiques,* 259 - 288, Editions la Pensée Sauvage.

MANUELS SCOLAIRES

BONNEFOND G., DAVIAUT D., REVRANCHE B. (1993), *Mathématiques 3ème Pythagore,* Ed. Hatier.

BOURLET C. (1903), *Eléments d'Algèbre 1e et 2e cycle,* Ed. Hachette.

BOURLET C. (1908), *Cours abrégé d'Arithmétique élémentaire du premier cycle,* Ed. Hachette et cie.

BOURSIN, JORDAN (1971), *Mathématiques 3ème collection Cossart et Théron,* Ed. Bordas 1971.

DELFAUD M., MILLET A. (1932), *Arithmétique cours moyen et supérieur,* Ed. Hachette.

DELORD R., TERRACHER P-H., VINRICH G. (1993), *Mathématiques 3ème,* Ed. Hachette.

DELORD R., VINRICH G. (1999), *Mathématiques 3ème collection Cinq sur Cinq,* Ed. Hachette.

HÉMERY C., LEBOSSÉ C. (1960), *Algèbre, Arithmétique et Géométrie, classe de Troisième,* Ed. Fernand Nathan.

RÉUNION DE PROFESSEURS (1949), *Algèbre et notions de Trigonométrie pratique,* Ed. libraire générale de l'enseignement libre.

ROYER M., COURT P. (1931), *Arithmétique cours supérieur,* Ed. Armand Colin.