UNE PETITE HISTOIRE DE LA DIVISION : DE SES ORIGINES JUSQU'À LA MÉTHODE «GALLEY»

Jeanne GUIET
Maître de Conférence en sciences de l'éduction
I.U.F.M. de Picardie, centre de Beauvais

L'évolution de la pédagogie et de l'idéologie sous-jacente (la première imposée et (ou) acceptée, la seconde peu mise en lumière) exige de l'enseignant (celui qui transmet le savoir) des révisions parfois déchirantes. Entre autres, s'il lui appartient toujours de faire acquérir des connaissances, il n'a plus uniquement à transmettre un savoir venu d'ailleurs, mais à accompagner le jeune dans la construction de son savoir. Rien n'est simple, cependant, car la cohérence interne de ce savoir construit doit s'inscrire dans celle du savoir scientifique socialisé. L'histoire des sciences et des techniques illustre bien cette idée, essentielle pour la didactique, que les concepts ont une histoire. Ils apparaissent dans un certain état de la problématique des savants, et se développent ultérieurement pour faire face à de nouveaux problèmes. Ce n'est qu'après une longue période historique, le plus souvent, qu'ils atteignent un état relativement stable et peuvent faire l'objet de définitions complètes et claires.

Notre interrogation porte sur la signification de l'évolution de la technique de la division. Un algorithme, comme celui de la division, est un ensemble fini de règles d'action, qui permet de générer une suite d'opérations permettant de traiter une situation d'une classe donnée à l'avance. L'usage du symbole mathématique traduit un certain éloignement par rapport à la réalité perçue : une figure représentant une division est un instrument. Mais le passage à des symboles marque aussi un progrès, dans la mesure où il ouvre la voie à l'enrichissement d'un certain type d'abstraction, éventuellement une régression par rapport à la connaissance directe : la division mathématique renvoie souvent aux situations quotidiennes, dont elle fournit des interprétations cohérentes, mais le moment peut venir assez vite, où les divisions, issues du monde empirique, butent sur des difficultés : partager 0,8 litre de jus de pomme entre deux enfants par exemple. Ce n'est pas d'ailleurs uniquement chez les enfants que la division soulève des difficultés.

Nous abordons ici dans ce premier texte l'étude de l'histoire de la division d'une période que nous situons à partir des Égyptiens jusqu'au XVIIème siècle environ.

«Grand N» n° 57 pp. 33 à 54, 1995-1996

Les processus de duplication et de médiation : les Égyptiens

Probablement la préhistoire de la division écrite, ou sa plus vieille forme, est celle utilisée par les Égyptiens. Celle-ci était basée sur le processus de duplication et médiation. Ainsi, pour diviser 19 par 8, on peut envisager le travail suivant.

On commence par écrire les multiplications suivantes par 8, qui est le diviseur :
$2 \times 8 = 16$
$\frac{1}{2} \times 8 = 4$
$\frac{1}{4} \times 8 = 2$
$\frac{1}{8} \times 8 = 1$

Puis, sachant que $19 = 16 + 2 + 1$, on sélectionne les nombres composant cette somme.

Le quotient est par conséquent : $2 + \frac{1}{4} + \frac{1}{8}$

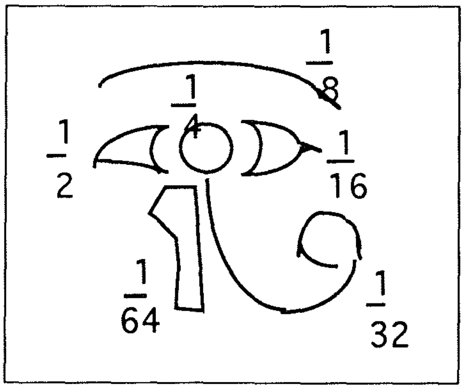
Ce qui nous donne : $19 \div 8 = 2 + \frac{1}{4} + \frac{1}{8}$.

Signalons que la numération hiéroglyphique est à base dix, non positionnelle : on dispose de symboles différents pour désigner 1, 10, 100 etc. ; on répète un symbole autant de fois qu'il le faut et, pour lire un nombre, on additionne la valeur de l'ensemble des symboles intervenant dans son écriture ; l'ordre de ceux-ci n'importe donc pas, la représentation pouvant être aussi bien horizontale que verticale. La numération hiératique est aussi décimale, mais des signes spéciaux supplémentaires évitent la répétition des symboles du système hiéroglyphique.

En dehors des entiers, les Égyptiens ne conçoivent que les fractions unitaires. Dans les deux numérations, il les écrivent en faisant surmonter le symbole représentant le dénominateur d'un signe particulier. Cependant, la fraction $\frac{2}{3}$ semble jouir d'un statut privilégié et un symbole spécial lui est associé (celui-ci ressemble à un 7 en écriture hiératique).

Les Égyptiens utilisaient donc des quantièmes telles que un demi, un quart, etc. souvent appelées «unités rationnelles». Ces unités sont obtenues par fractionnement. On divise l'unité originelle en deux, puis la nouvelle unité encore en deux, et ainsi de suite. Ces unités à base deux sont parmi les plus anciennes que l'humanité ait utilisées ; une fois nommées, plutôt que de parler des $\frac{3}{4}$ de quelque chose, il suffisait de demander une moitié, plus une moitié de moitié. A notre époque, la fraction $\frac{1}{2}$ reste privilégiée. La division par deux est la forme la plus élémentaire du partage.

Une illustration des fractions chez les Égyptiens est connue sous la forme d'un mythe, celui de l'oeil d'Horus. En simplifiant l'histoire de ce mythe, car il existe plusieurs versions de celle-ci, on peut retenir ceci : Thot, protecteur de la lune et créateur du calendrier, communément appelé le «dieu qui sait compter», a régné sur l'arithmétique. Il a inventé l'écriture et joué un rôle déterminant dans le calcul des années du règne des rois, ce qui fondait la chronologie. Thot compte le temps de l'année en 12 mois lunaires de 30 jours (soit 360 jours). La légende dit que pour rétablir l'année dans sa durée réelle, il faut justifier les cinq jours supplémentaires, en les offrant à Nout, déesse du ciel. Nout ayant eu un commerce secret avec Geb, dieu de la terre, Râ, le soleil, qui s'en aperçoit, prononce contre elle un charme qui la rend stérile durant l'année ; elle peut enfanter un dieu chacun de ces cinq jours qui sont considérés comme volés à la Lune. Elle en obtient donc cinq qui sont : Osiris, Haroeris (ou Horus l'ancien), Seth, Isis, Nephtys. Par la suite, Osiris épouse Isis, ce qui occasionne la jalousie de Seth, qui tue alors Osiris. Isis élève son fils Horus dans un esprit de vengeance, ce qui engendre un combat entre Seth et Horus. A l'issue de celui-ci, Seth arrache l'oeil d'Horus et le brise en six morceaux. Thot réunit alors les différentes parties de l'oeil, dont la configuration est à la fois celle d'un oeil humain et celle d'un faucon. Chaque partie de l'oeil reçoit une valeur numérique, correspondant aux moitiés successives d'unités : la partie droite de la cornée est $\frac{1}{2}$, l'iris $\frac{1}{4}$, le sourcil $\frac{1}{8}$, la partie gauche de la cornée $\frac{1}{16}$, la marque colorée oblique $\frac{1}{32}$, la marque colorée verticale $\frac{1}{64}$; soit $\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \frac{1}{32} + \frac{1}{64} = \frac{63}{64}$. L'addition de ces fractions ne correspond cependant pas tout à fait à l'unité : c'est une suite qui, si elle était prolongée, convergerait vers l'unité.



L'œil d'Horus

A part $\frac{2}{3}$ (pour lequel les Égyptiens disposent d'un graphisme spécial), on peut dire qu'il s'agit de divisions «à base deux». Les parties de l'oeil d'Horus sont réservées aux mesures de capacité uniquement pour les céréales et le minerai. «Certains érudits ont l'air de penser que les Égyptiens confondaient avec l'unité l'expression numérique obtenue en additionnant les six premières puissances négatives de 2. Nul doute qu'ils étaient assez bons mathématiciens pour savoir qu'il y avait une différence et quelle était l'expression mathématique de celle-ci. Si l'on découpe dans un segment de droite sa moitié, à laquelle on ajoute la moitié du reste et ainsi de suite, la différence avec le segment initial est toujours égale au dernier segment ajouté ; c'est une propriété simple qui caractérise le système dyadique. Or la multiplication et la division des nombres entiers exigeaient justement en Égypte l'intervention de ce type de système, il est donc naturel que la somme des termes d'une progression géométrique limitée de premier terme $\frac{1}{2}$ et de raison $\frac{1}{2}$ ait attiré leur attention. On peut même se demander si ces considérations simples ne les ont pas incités à rechercher la décomposition d'une fraction quelconque en la somme de fractions toujours de numérateur 1» (Guitel, G., 1975).

Ainsi, l'arithmétique égyptienne s'organise-t-elle autour de quelques règles :

- la possibilité de multiplier et de diviser par deux un nombre entier, ce qui permet ensuite d'effectuer par addition n'importe quelle multiplication ;
- la capacité de trouver les $\frac{2}{3}$ de n'importe quelle fraction unitaire suivant la règle : $\frac{2}{3} \times \frac{1}{n} = \frac{1}{2n} + \frac{1}{6n}$

Enfin, se refusant à admettre des fractions autres qu'unitaires, ils sont conduits à décomposer des fractions de la forme $\frac{2}{n}$ en sommes de fractions unitaires ; comme par exemple : $\frac{2}{5} = \frac{1}{3} + \frac{1}{15}$

Mais ce calcul étant compliqué, ils se réfèrent à une table établie une fois pour toutes. Ainsi, le papyrus de Rhind (daté vers 1650 avant Jésus Christ) débute par une liste de décompositions de $\frac{2}{n}$, de n = 5 à n = 101. Le papyrus de Rhind acheté à Louqsor, au cours du XIXème siècle par un Anglais nommé A.H. Rhind a été légué au British Museum. Il s'agit d'une conception des fractions qui n'a été inventée qu'une fois dans l'histoire de l'humanité, et qui a essaimé durant toute l'Antiquité et jusqu'au Moyen-Age.

Dans ce fameux papyrus, le scribe Ahmnès donne une table de conversion des fractions de la forme $\frac{2}{n}$ en sommes de quantièmes jusqu'à n = 101. Par exemple :

$$\frac{2}{7} = \frac{1}{28} + \frac{1}{4}$$
$$\frac{2}{5} = \frac{1}{15} + \frac{1}{3}$$
$$\frac{2}{13} = \frac{1}{104} + \frac{1}{52} + \frac{1}{8} \cdots$$

Dans ce papyrus de Rhind, on trouve la résolution de problèmes théoriques relatifs à l'art difficile de calculer les fractions. Notons que le symbolisme actuel, s'il nous aide à comprendre le processus, n'est sans doute pas la marche opératoire réelle de l'Égyptien. Le système de calcul nous paraît bien lent et primitif, mais il ne nécessite aucun effort de mémoire ; le maniement des fractions unitaires, pourtant complexe, est effectué avec habileté par les scribes. Ce développement est sans doute lié au fait que le système social pharaonique impliquait une énorme comptabilité matérielle dans le contrôle et la répartition des ressources, des denrées alimentaires et des objets, tâche qui incombait aux scribes.

D'après Guitel G. (1975), la division était considérée par les Égyptiens comme une sorte de multiplication : on s'efforçait de reconstituer le dividende en multipliant le diviseur par le nombre convenable, ce qui supposait, au moins à l'origine, que l'opération donnerait un nombre entier. Citons encore quelques exemples issus de son ouvrage (p. 91, 1975).

Papyrus de Rhind n° 69 : division de 1 120 par 80, ce que le scribe énoncera : «additionne en commençant par 80 jusqu'à ce que tu trouves 1120».

1	80
/ 10	800
2	160
/ 4	320

somme 1120 (les nombres retenus sont munis d'une barre oblique)
soit $1120 \div 80 = 10 + 4$

Notons que nous présentons ici ces calculs suivant la numération décimale, que les Égyptiens n'utilisaient pas à cette époque.

Le quotient est 14, obtenu en tenant compte des traits obliques, qui retiennent les éléments du résultat que l'on veut obtenir, mais pour l'Égyptien, qui accompagne tout résultat d'un graphisme représentant un rouleau scellé, le quotient est curieusement placé à côté du dividende (ici 1120). Le processus est ici lié à une décomposition additive, d'où l'importance de la somme.

Papyrus de Rhind n° 24 : diviser 19 par 8

1	8
/ 2	16
$\frac{1}{2}$	4
/ $\frac{1}{4}$	2
/ $\frac{1}{8}$	1

soit $19 \div 8 = 2 + \frac{1}{4} + \frac{1}{8}$

Une duplication permet de trouver la partie entière du quotient, une série de médiations permet ensuite de trouver la partie fractionnaire de ce même quotient.

Papyrus de Rhind n° 25 : diviser 16 par 3

/ 1	3
2	6
/ 4	12
$\frac{2}{3}$	2
/ $\frac{1}{3}$	1

soit $16 \div 3 = 4 + 1 + \frac{1}{3}$

Il est singulier de constater que le calcul débute à la quatrième ligne, par une multiplication par $\frac{2}{3}$. Il eût été plus simple de multiplier 3 par $\frac{1}{3}$, puisqu'on voulait justement ajouter l'unité à 15, mais cette procédure montre l'importance que les mathématiciens égyptiens attribuaient à $\frac{2}{3}$, quitte à lui substituer ensuite $\frac{1}{3}$ (d'après Guitel, p. 93, 1975).

Papyrus de Rhind n°21 : diviser 4 par 15

1	15
$\frac{1}{10}$	$1+\frac{1}{2}$
$/\frac{1}{5}$	3
$/\frac{1}{15}$	1

soit $4 \div 15 = \frac{1}{5} + \frac{1}{15}$

Quand on effectue une division dont le quotient est entier, on peut, pour le trouver, procéder par duplications successives du diviseur. Si le quotient est composé d'un entier et d'une fraction, on ne peut pas procéder par médiations successives du diviseur pour déterminer la partie fractionnaire. Il n'y a de solution que si le dividende et le diviseur étant premiers entre eux, le diviseur est une puissance de deux.

Reprenons les exemples traités. La division $19 \div 8$ est très simple puisque $8 = 2^3$; la résolution est faite par duplications et médiations. Ensuite, la division $16 \div 3$ donne par duplications la partie entière du quotient et $\frac{1}{3}$ est visiblement la partie fractionnaire. L'exemple $4 \div 15$ ne peut être résolu par médiation, la fraction étant irréductible et 15 n'étant pas une puissance de 2. L'importance mathématique de ce type de calcul a dû échapper à ses concepteurs. Il nous apparaît toutefois intéressant de constater qu'**il n'apparaît pas a priori inconcevable aux Égyptiens d'effectuer un calcul avec un dividende inférieur au diviseur**.

La division par deux est aussi un des premiers sujets de l'apprentissage de la division à l'école élémentaire de nos jours, que cela soit dans les manuels scolaires ou dans les leçons données par des instituteurs dès le cours élémentaire deuxième année, c'est à dire à des enfants âgés de huit ans environ. Il est intéressant de faire le parallèle entre ces conceptions primitives de duplication et de médiation et le schème partager-distribuer, qui fonctionne très bien pour les enfants dans la vie courante : partager une pomme, une banane ou un gâteau en deux, puis encore en deux, pour créer des parts. Dans les procédures d'approche, par tâtonnements successifs, on retrouve ce type de démarche.

Le produit de $\frac{1}{a}$ par b : les civilisations babyloniennes et sumériennes

La civilisation babylonienne comprend un ensemble de peuples qui ont vécu en Mésopotamie entre 5000 avant Jésus-Christ et le début de notre ère, avec Babylone comme principal centre d'activité culturelle. Plusieurs centaines de tablettes d'argile exhumées au XIXème siècle, sont frappées au stylet en écriture cunéiforme, et probablement cuites ensuite, ce qui explique leur bon état de conservation.

Vers 2000 avant Jésus-Christ, la numération écrite de position était parfaitement organisée ; elle a été d'un usage ininterrompu en Babylonie presque jusqu'à notre ère. Le système de numération est une combinaison d'un système sexagésimal et décimal avec un principe de position : l'unité et le nombre 10 sont représentés par deux signes différents et des combinaisons interviennent au-delà de 60, suivant le principe de position. Aucun symbole spécifique pour le zéro n'est repéré dans les textes les plus anciens. A Babylone, il n'y avait ni zéro opérateur, ni virgule. Le zéro a été noté tardivement et seulement en position médiale. La multiplication et la division étaient étroitement associées. Les Babyloniens remplaçaient la division de b par a, par le produit de $\frac{1}{a}$ par b ($\frac{1}{a}$ étant écrit en sexagésimales). Dans l'usage courant, une numération de base dix, était utilisée progressivement, qui ne faisait que traduire la numération parlée acadienne qui avait survécu. La numération sexagésimale, se maintient dans l'usage savant. Malgré la maladresse dans le choix de 60 (c'est une écriture assez lourde, de conception archaïque pour les nombres entiers de 1 à 59), les Babyloniens ont réussi à rendre bénéfique cette complication en inventant des procédés de calcul d'une grande originalité. Les Sumériens ont eux, profité que leur numération était de position, et ont joué sur deux aspects : le premier, est le fait que 10 apparaît dans l'écriture des nombres comme une base auxiliaire, et le second est le fait que, comme 60 a douze diviseurs, la table de multiplication peut servir à effectuer certaines divisions avec une meilleure aisance que les processus égyptiens.

Guitel G. (p. 350, 1975) nous dit que pour effectuer une division par n ($n \leq 60$, et diviseur de 60), les Babyloniens possédaient des tables qui associaient à n l'expression de $\frac{1}{n}$ écrit en numération sexagésimale. La plus ancienne de ces tables a été découverte à Tello et publiée par Delaporte dans la Revue d'Assyriologie. Thureau-Dangin (1912) a reproduit les premières et dernières lignes de ce texte, restitué en partie, et qui peut remonter à une date un peu antérieure à la première dynastie babylonienne :

2 igi 30	la 2ème partie est 30
3 igi 20	la 3ème partie est 20
4 igi 15	la 4ème partie est 15
5 igi 12	la 5ème partie est 12
6 igi 10	la 6ème partie est 10
7 igi nu	la 7ème partie n'est pas (convertible)

et ainsi de suite jusqu'à :

59 igi nu	la 59ème partie n'est pas (convertible)
1 igi 1	la 60ème partie est 1.

(On n'explicitera pas ici dans quel type d'écriture ce document a été écrit).

L'usage des tables permet ainsi de faire une multiplication d'un nombre avec une fraction exprimée en sexagésimales. En général, les calculs étaient destinés à présenter sexagésimalement des éléments du système métrologique, lequel était presque toujours construit à partir de nombres ne comportant pas d'autres facteurs premiers que 2, 3 ou 5.

La multiplication est exécutée en se référant à des tables, sans doute établies à l'origine par additions successives ; et l'utilisation des tables réciproques permet de remplacer les divisions par les multiplications. Ce type de procédure existe actuellement dans les classes d'écoles élémentaires. Une illustration intéressante de la plus ancienne division qui soit parvenue jusqu'à nous remonte à environ quatre mille ans. Guitel (1975) nous signale une étude de celle-ci, parue dans la Revue d'Assyriologie et d'Archéologie Orientale, qui nous montre une tablette sumérienne, remontant à 2500 avant Jésus-Christ, dont l'interprétation est due à Maurice Lambert. On y fait mention du dividende, du diviseur, du quotient et même du reste, mais pas de la technique opératoire de l'opération. La forme générale révèle des divisions successives qui peuvent être exécutées à l'aide de soustractions successives. La simplicité de cette division est caractérisée par un diviseur inférieur à dix, et un dividende, multiple des unités fondamentales.

La numération babylonienne comporte donc des fractions placées sur le même pied que les nombres entiers, d'où le fait qu'il n'y ait pas de signe analogue à notre virgule. La manipulation des fractions sexagésimales était communément utilisée, aussi bien que les nombres entiers. Enfin, comme 60 a beaucoup de diviseurs, le principe de position des Babyloniens donne à ces diviseurs un rôle privilégié qui n'existe pas chez les Égyptiens, dans l'écriture des fractions. Les Babyloniens excluent les inverses des nombres qui ne sont pas produits des facteurs premiers de 60 et ne s'écrivent pas $2^p\ 3^q\ 5^m$ (avec p, q, m, entiers), car ces inverses n'ont pas de développement fini dans la base 60.

Les Sumériens, puis les Babyloniens ont ainsi disposé de la première numération organisée en système :

- ils avaient des unités de mesure pour le temps, le cercle, les angles, cohérentes avec la base du système et cohérentes entre elles ; les fractions ou nombres étaient exprimés en soixantièmes, soixantièmes de soixantièmes etc.
- les fractions sexagésimales en usage chez les mathématiciens et astronomes ont été utilisées jusqu'au moment de l'apparition des fractions décimales, voire au-delà.

Les Babyloniens étaient confrontés à une impasse pour le calcul de certaines racines carrées. Du fait de leur système de numération, il était impossible d'opérer certaines divisions. Remarquons aussi que le système sexagésimal était au service des spécialistes qui étaient capables d'effectuer des calculs compliqués.

Finalement, le scribe sumérien d'après Guitel suivait une méthode identique à celle que les élèves pratiquent encore de nos jours : la recherche du nombre de fois où le diviseur est contenu dans le dividende, par encadrements successifs éventuellement.

Quelques tentatives contre le monopole des fractions sexagésimales : Diophante

La connaissance des mathématiques grecques pose des problèmes de sources. Hormis quelques fragments de papyrus alexandrins, il n'y a pas de manuscrits originaux. Vers le VIème siècle avant J.C., en contact avec les peuples orientaux, de Babylone et d'Égypte, les Grecs ne se contentent pas d'assimiler leurs connaissances, mais rendent les mathématiques abstraites et déductives ; ils sont avant tout des géomètres.

Le système attique a progressivement été remplacé par le système ionique. Son utilisation s'est généralisée à Alexandrie (dès le IIIème siècle avant J.C.). C'est un système décimal de numération alphabétique, additif, non positionnel, formé des vingt-quatre lettres de l'alphabet grec (d'origine phénicienne) plus trois autres signes.

Le système grec se prête difficilement à l'écriture des fractions, mais il existe un symbole pour $\frac{1}{2}$. Comme les Égyptiens, les Grecs sont tentés de n'utiliser que les fractions unitaires. Le dénominateur est marqué par un accent.

D'autres tentatives furent faites, mais aucune ne réussit à s'imposer jusqu'à ce que Diophante (début de notre ère), introduise une notation non ambiguë : il place le dénominateur légèrement au-dessus du numérateur. La pratique du calcul des quantièmes chez les Égyptiens étant difficile, les astronomes grecs préfèrent recourir au système d'écriture des fractions des Babyloniens et adoptent dans leurs calculs les fractions sexagésimales.

Le système grec peut être utilisé pour effectuer les opérations fondamentales d'arithmétique de multiplication ou de division, à condition qu'elles ne portent pas sur des nombres trop grands. On sait aussi que les fractions sexagésimales étaient employées (Guitel, 1975).

La numération écrite de l'époque avait l'inconvénient de sa simplicité. La moindre représentation chiffrée exigeait une répétition démesurée de chiffres identiques. «Pour le nombre 7699 par exemple, il fallait ainsi mettre en jeu 31 symboles» (Ifrah, p.175, 1985). A partir du VIème siècle avant J.C., les Grecs simplifièrent leur notation numérique en introduisant un chiffre spécial pour 5, un autre pour 50, un troisième enfin pour 500, puis 5000, etc. Ils abandonnèrent peu à peu les anciennes formes graphiques et les remplacèrent par des lettres alphabétiques. Aucun chiffre spécial n'est attribué à l'unité et à chaque puissance de sa base. En introduisant des chiffres supplémentaires à leur liste initiale, les Grecs privèrent celle-ci de toute possibilité opératoire.

Soulignons enfin que le système grec de numération étant trop compliqué pour effectuer facilement les opérations par écrit, ces opérations sont fréquemment effectuées sur une abaque, table sur laquelle des lignes parallèles figurent les unités, les dizaines, les centaines etc. L'abaque sera largement utilisée par les Grecs et par les Romains dans l'Occident médiéval chrétien, même après l'introduction de la numération décimale de position qui est la nôtre actuellement. La numération grecque savante a pu s'adapter à la notation de la numération sexagésimale, ce qui lui a permis de transcrire très facilement les tablettes babyloniennes ; naturellement cela a prolongé leur emploi.

Exemple d'une méthode de calcul chinoise

Les calculateurs du temps de Han, (206 avant J.C, 220 après J.C.), utilisaient 271 fiches qui, serrées dans leurs mains, formaient un faisceau hexagonal. Ces fiches servaient à figurer les nombres ; aucun chiffre du reste n'était inscrit sur leur surface. Une fiche ne valait que 1, et lorsqu'il s'agissait d'effectuer une multiplication ou une division, on disposait ces fiches sur une surface plane, les unes en long, les autres en travers. On en saisissait ensuite en un instant la disposition. Le système consistait en une alternance dans la direction des fiches. Sans s'étendre davantage sur l'explication de la méthode employée, on ne doit pas passer sous silence l'invention de cette remarquable numération figurée. C'est cette présentation qui est devenue classique sur leur table à compter, c'est elle qui a permis ensuite d'écrire les nombres sous forme de monogrammes.

Sachant que, dès le temps des Han, les mathématiciens chinois savaient effectuer sur la table à compter multiplication, division et extraction de racines, exposons maintenant (d'après Guitel, 1975) ce qu'était pour eux la technique de la multiplication, qui conditionne celle de la division. Le commentaire écrit que les Chinois ont laissé de leur technique opératoire est très bref, et peu clair ; par contre leurs dessins, fort nombreux, restituent les différentes étapes de l'opération. Cette conception suit aussi celle de Leibniz sur sa «théorie de la multiplicatrice», et part de la définition du produit de deux nombres, comme suit :

Soit à multiplier 973 par 746. Par définition, il faudra additionner 746 nombres égaux à 973. On profite de ce que le multiplicateur de l'opération se décompose en :
7 centaines, 4 dizaines, 6 unités.

Dans ces conditions, le produit de 973 par 7 centaines pourra être remplacé par le produit de 97300 par 7. En déplaçant d'un bloc le multiplicande de deux rangs vers la gauche, on passe de 700 additions à 7 additions. Ce sont les suites de cette présentation naïve qui impliquent une présentation abstraite de l'opération. La table à calcul chinoise, vaste échiquier sur laquelle on plaçait les fiches à calcul, a favorisé de telles opérations. En fonction du nombre des chiffres des nombres à diviser ou à multiplier, on procédait à des décalages du diviseur ou du multiplicateur.

Déjà, le maniement de la table à compter exigeait un effort mental de qualité. On comprend dans ces conditions que l'usage du boulier pour la pratique des opérations telles la multiplication, ou la division, ait été une grande invention. Un effort mental était exigé de l'opérateur quand il utilisait la table à compter, celle-ci ne peut ainsi qu'être antérieure au boulier.

Les intermédiaires entre l'Inde et l'Occident : le renouveau apporté par les Arabes

Moins d'un siècle après la mort de Mahomet (en 632) et la chute d'Alexandrie (en 640), les anciennes tribus nomades d'Arabie unifiées par le prophète, puis sous l'égide de ses successeurs, les califes, ont conquis d'immenses territoires de l'Inde à l'Espagne, comprenant l'Afrique du Nord et l'Italie du Sud. Cette progression ne s'essouffle qu'aux frontières de la Chine. L'immense empire musulman a d'abord Damas, en Syrie, pour capitale, mais il se scindera ensuite au VIIIème siècle en deux royaumes indépendants d'Orient et d'Occident. La civilisation arabe va donc prédominer du VIIème au XIIIème siècle. Pendant cette période, les Arabes sont dépositaires du savoir, les promoteurs de la connaissance. L'ensemble des conquêtes explique aussi que la pensée scientifique des Arabes soit aussi l'héritière de la culture grecque.

Les Arabes savent assimiler les apports indiens, dont le plus notable est la numération décimale de position avec usage du zéro. Celle-ci va être popularisée par les traités du célèbre Al-Khowarizmi, mais elle subsistera longtemps sous la forme littérale à côté des deux systèmes de chiffres arabes d'Orient et d'Occident apparus au cours du Xème siècle. «La contribution des mathématiciens arabes est absolument décisive dans le domaine de l'algèbre, qu'ils constituent comme une discipline autonome. Elle est à la fois une science théorique, une technique algorithmique, et un art du calcul. Citons les noms prestigieux, d'Al-Kariji, d'Al-Khayyam, d'Al-Kashi...» (Dahan-Dalmenico, Peiffer, p.22, 1986).

Quand ils furent mis en présence de la numération et des méthodes de calcul venues de l'Inde, les Arabes avaient eu assez d'esprit pour en apprécier les avantages, reconnaître leur supériorité et les adopter aussitôt. Les chrétiens d'Europe, en revanche, se sont montrés si attachés à leurs systèmes archaïques, si réticents devant la nouveauté, qu'il a fallu attendre des siècles avant que le triomphe de «l'algorisme», comme on appelait alors le calcul écrit, fut enfin total et définitif.

Aux alentours de 1580, Montaigne écrivait : «Je suis né et nourry aux champs parmy le labourage ; j'ay des affaires et du ménage en main depuis que ceux qui me devançaient en la possession des biens que je jouis m'ont quitté leur place. Or, je sçay compter ny a get ny a plume» (Essais, livre II). Cet homme, si érudit, ne savait pas compter. L'influence indienne n'a gagné l'Europe que plus d'un millénaire après son existence. Les Arabes, médiateurs entre l'Inde et l'Occident, avaient d'abord commencé par s'intéresser aux numérations alphabétiques, grecque et juive, dont ils adaptèrent l'usage aux vingt-huit lettres de leur propre alphabet. Par l'intermédiaire des Grecs et des chrétiens de Syrie et de Mésopotamie, ils récupérèrent aussi le système sexagésimal positionnel et le zéro des savants babyloniens, qu'ils adoptèrent en l'adaptant à leur propre écriture. Puis ils adoptèrent, à la fin du VIIème siècle, l'ensemble du système numérique indien : chiffres, numération décimale de position, zéro et méthodes de calcul.

Référons nous ici à l'étude de Hantouche (1984) sur les «problèmes posés par l'acquisition des décimaux», notamment sa traduction d'une partie du travail d'Al-Kashi, considéré comme l'inventeur des décimaux sous leur forme actuelle. Les premiers écrits parvenus datent du Xème siècle après Jésus-Christ. Soulignons en outre que les Chinois travaillaient déjà sur un système décimal, 13 siècles avant Jésus-Christ. Al-Kashi, né vers 1370, se rend à Sarmacande en Iran vers 1420 ; il explique dans son ouvrage «La clé de l'Arithmétique» (1427) la conversion des fractions sexagésimales en fractions décimales.

Al-Khowarizmi (780-850), un des premiers mathématiciens arabes, pour faire des opérations de division sur des fractions sexagésimales «fait d'abord une conversion en nombres entiers (base dix), les exprime sous forme d'unités du dernier ordre, effectue les opérations dans le système des entiers (base dix) et les convertit», Hantouche (1984). Al-Kashi, lui, pour vérifier le résultat d'une multiplication utilise la division. Latinisé, le nom d'Al-Khowarizmi fut transformé successivement en *Alchoarismi*, puis en *Algorismi*, *Algorismus*, *Algorisme*, et enfin en *Algorithme* (Ifrah, p. 284, 1985).

Le développement de l'opération avant les années 1000 reste ainsi attaché à la conception des nombres sexagésimaux et des calculs qui en découlent. La présentation donnée est essentiellement faite sous forme fractionnaire. Il paraît plus intéressant de voir, et ceci après que l'apport des Arabes ait été introduit en Europe, comment les longues divisions étaient accomplies après l'introduction de nos nombres modernes, c'est-à-dire environ dans les années 1000.

La première introduction des chiffres arabes en Europe

Depuis la chute de l'Empire romain jusqu'à la fin du Moyen Age, «l'instruction» en Europe occidentale, est restée très rudimentaire. Les rares privilégiés à qui on prodiguait un enseignement, apprenaient d'abord à lire et à écrire. On leur expliquait ensuite la théorique. Puis, on leur donnait des cours très sommaires d'astronomie et de géométrie. Et, en même temps, on leur apprenait à compter sur les doigts, à noter et à lire les chiffres romains. Mais on n'enseignait rien de plus, l'initiation à l'art de faire des calculs ne faisait même pas partie du programme.

Il faut dire que la pratique des opérations arithmétiques, même des plus élémentaires, n'était pas, en ce temps-là, à la portée de tout le monde. Elle était alors le domaine réservé de spécialistes, à qui de longues et fastidieuses études avaient transmis l'usage mystérieux, et compliqué, des vieux abaques romains. Le grand respect dans lequel ces calculateurs étaient tenus à cette époque, montre d'ailleurs à quel point **les techniques opératoires étaient difficiles.** Une multiplication pouvait demander plusieurs heures de travail.

Ifrah (1985) raconte dans son livre «Les chiffres», qu'un riche marchand du Moyen Age, suffisamment enrichi pour faire donner une instruction commerciale à son fils, alla un jour consulter un éminent spécialiste pour savoir à quelle institution il fallait confier le jeune homme. La réponse du professionnel semblera certainement renversante pour l'homme moyen du XXème siècle : «si vous voulez vous contenter de lui faire apprendre la pratique des additions ou des soustractions, n'importe quelle université allemande ou française fera l'affaire. En revanche, si vous tenez à pousser son instruction jusqu'à la multiplication ou la division (si tant est qu'il en soit capable !), alors il vous faudra l'envoyer dans les écoles italiennes».

Il est vrai que l'Italie était à cette époque en plus grand contact avec les Arabes et les Byzantins et que ses écoles s'étaient rapidement spécialisées dans les opérations complexes. Tandis que les Universités allemandes ou françaises ne s'occupaient que des opérations courantes, et cela encore aux XIVème et XVème siècles.

Cette situation est restée substantiellement la même dans les administrations européennes, pendant les périodes suivantes, à travers le Bas Moyen Age et la Renaissance, jusqu'au XVIIème et XVIIIème siècles, comme en témoigne l'histoire d'un certain Samuel Pepys que cite Ifrah (p.290, 1985) : celui-ci était fonctionnaire attaché à la Marine de Guerre britannique et sortait tout droit de l'Université de Cambridge. Il fut nommé par la suite au Secrétariat de l'Amirauté et acquit, en 1662, la responsabilité des marchés avec les fournisseurs. Doté d'une instruction très correcte, ce «clerc des actes» se trouva pourtant incapable d'effectuer les calculs nécessaires à la vérification des achats de bois de charpente conclus pour la marine anglaise ! Il jugea alors nécessaire de retourner à l'école, ou plutôt de parcourir l'Europe, pour apprendre à bien maîtriser l'art du calcul. Et comme les opérations ne se faisaient, dans les administrations anglaises que sur des tables à jetons, il fut longtemps obligé de se lever à quatre heures du matin pour étudier et assimiler les règles correspondantes. Il parvint finalement à dominer son handicap et entraîna son épouse dans cette étude. Et voici ce qu'il écrivît dans son journal en 1663 : «Ma femme est maintenant capable d'effectuer sans peine les additions, les soustractions et même les multiplications. Mais je n'ose pas encore la troubler avec la pratique des divisions» (Ifrah, p.290, 1985).

La division courte

Parmi les premières méthodes écrites, la division courte anglaise (d'après Smith, 1958), qui était basée sur la reconnaissance des produits dans les colonnes des tables de multiplication, a été connue comme une division dite par *«colonnes»*, par *«règles»*, ou par les *«tables»*, ou même comme division dite *«orale»*, ou de *«tête»*. Les premiers livres imprimés en Italie ont été publiés dans un monastère à Subiaco près de Rome en 1465. Treize ans plus tard (1478), un livre anonyme d'arithmétique imprimé à Treviso, près de Venise, contient des techniques de calcul. Entre autres, l'illustration de la méthode de division dans le livre de Treviso est la suivante :

Lo partitore	.2.	7624	
		0	lauanzo
La parte		3812	

qui veut dire que 7624 ÷ 2 = 3812, avec 0 au reste. La technique utilisée est celle de la méthode dite «Galley», le diviseur est cependant ici à gauche du dividende. La présentation utilisée par Sfortunati (1534) pour un cas similaire est signalée dans l'exemple suivant (signalé dans son Arithmétique) :

P 14 (« P» signifie *parte*)
1037382
$74098\frac{10}{14}$

ce qui voulait dire : 1037382 : 14 = $74098\ \frac{10}{14}$. On note ici **le reste présenté sous forme fractionnaire.**

Dès lors, la méthode fut plus généralement utilisée avec **un diviseur à un chiffre**, et n'était pas très populaire auprès des professeurs (d'après Smith, 1958), qui préféraient le recours aux tables de division.

Méthode de Gerbert

Gerbert (940-1003), tour à tour précepteur et conseiller de l'empereur Otton III, futur pape Sylvestre II (en 999), voyage en Espagne entre 967 et 969 et y fréquente les écoles arabes. C'est là qu'il aurait appris le système de numération indo-arabe. En France, on comptait encore de façon digitale ou par le système de jetons. Gerbert aurait construit une table à calcul, ou abaque, dans laquelle il aurait remplacé dans chaque colonne le nombre total de jetons par un seul, qui portait au dos le nombre de jetons substitués. C'est ainsi qu'il aurait introduit les chiffres arabes en Europe. La méthode des abacistes, dont Gerbert serait le promoteur, présente des facilités analogues à notre arithmétique de position, du moins pour l'addition et la soustraction, car la multiplication et la division restaient très compliquées (voir chapitre 4-3).

L'enseignement de Gerbert exerce une influence prépondérante sur les écoles de son temps. D'après Ifrah (1985) c'est bien lui qui est à l'origine de la première introduction des chiffres arabes dans notre culture. Mais à chaque fois, qu'il a voulu faire prévaloir les procédés indo-arabes, Gerbert s'est heurté à une grande résistance, la plupart des clercs de l'époque ne pouvant accepter la supériorité d'une autre tradition. Les temps n'étaient pas encore mûrs pour une telle révolution.

Au cours du XIème et du XIIème siècle, grâce à l'intervention des Juifs en Europe, on se mettra à faire des opérations comme les Arabes, en les traçant sur du sable et de la poussière. L'abacisme fera place à l'algorisme qui, lui, utilise le zéro, la méthode arabe de division et d'extraction de la racine carrée. Ces nouveaux procédés de calcul s'avéreront être un des apports capitaux pour la préparation intellectuelle en Occident, en particulier quand on se rappelle les complications de la logistique grecque.

Dès cette période, l'Italie méridionale jouit d'une situation privilégiée : la culture latine autochtone s'allie aux vestiges d'une longue occupation byzantine, tandis que la proximité des Arabes, maîtres de la Sicile, crée des liens avec leur civilisation. L'école de Salerne, principalement tournée vers la médecine fut célèbre et des cours y étaient donnés en quatre langues : l'arabe, l'hébreu, le latin, le grec. Constantin l'Africain, ancien marchand de Carthage converti au christianisme, aurait réuni des manuscrits pour les ramener à Salerne ; finalement, il rédige des oeuvres en latin qui sont des traductions inavouées de l'arabe que l'on identifie aujourd'hui comme des ouvrages d'origine arabe. On assiste ainsi aux toutes premières infiltrations de la science arabe en Occident.

Une des plus anciennes méthodes qui ait été utilisée dans les divisions longues, est donc attribuée à Gerbert (980), bien qu'il soit incertain qu'il l'ait réellement créée, et qu'il n'utilisât pas le zéro. Cela peut être illustré par le simple cas de $900 \div 8$. Le processus consiste à diviser 900 par (10 - 2), 2 étant le complément du diviseur (source du document Smith, p.134, 1958) :

$$10 - 2)\ 900\ (90 + 18 + 3 + 1 + \frac{1}{2} = 112\ \frac{1}{2}$$

$\underline{900 - 180}$
180
$\underline{180 - 36}$
36
$\underline{30 - 6}$
$6 + 6 = 12$
$\underline{10 - 2}$
$2 + 2 = 4, \quad \frac{4}{8} = \frac{1}{2}$

Avec le concours de R. Gras (Université de Rennes I), nous proposons la décomposition de ce calcul de la façon suivante :

$(10 - 2)(90) + 180 = 900$ soit $900 \div 8 = 90 + \frac{180}{8}$

Pour diviser 900 par 8, on prend le premier diviseur (par 10) de 900, soit 90, que l'on multiplie par 8 ou (10 - 2), et on ajoute le reste, soit 180 (180 + 720 = 900). La procédure se poursuit ensuite de la même façon, en divisant à chaque fois le reste par 10.

$(10 - 2)(18) + 36 = 900$ soit $180 \div 8 = 18 + \frac{36}{8}$

$(10 - 2)(3) + 12 = 900$ soit $36 \div 8 = 3 + \frac{12}{8}$

$(10 - 2)(1) + 4 = 900$ soit $12 \div 8 = 1 + \frac{4}{8}$

d'où $900 \div 8 = (90 + 18 + 3 + 1)\frac{4}{8}$

$= 112 \frac{1}{2}$

La même méthode est une des trois données par Adelard de Bath (*«Regulae abaci»*, 1120), qui l'attribue à Gerbert. Ces trois méthodes sont la *«divisio ferrea»*, comme celle mentionnée au-dessus *«la divisio aurea»*, qui ressemble à notre division longue et enfin la *«divisio permixta»*, qui serait une méthode intermédiaire dont nous n'avons trouvé aucune illustration dans nos lectures.

Division par facteurs

Une autre méthode de division qui était connue au Moyen Age consistait à utiliser les facteurs du diviseur, et était connue sous les termes *«per repiego»*. Par cette méthode $216 \div 24$ se réduisait à $216 \div 8 \div 3$, celle-ci prônant d'apprendre précisément les tables, et montre que l'usage étant de préserver les diviseurs à un chiffre qui pouvaient être utilisés *«per tavoletta»*. D'après Smith (1958), l'illustration de Pacioli (1494) est donnée avec $9876 \div 48$. Il divise d'abord 9876 par 6, le résultat étant 1646. Il divise alors 1646 par 8, autre nombre de *«repiego»*, et obtient $205 \frac{6}{8}$ ou $205 \frac{3}{4}$. **Là encore, chaque division est composée d'un diviseur à un chiffre.**

Remarquons ici que cette décomposition est parfois en usage actuellement à l'école élémentaire, mais pas communément enseignée.

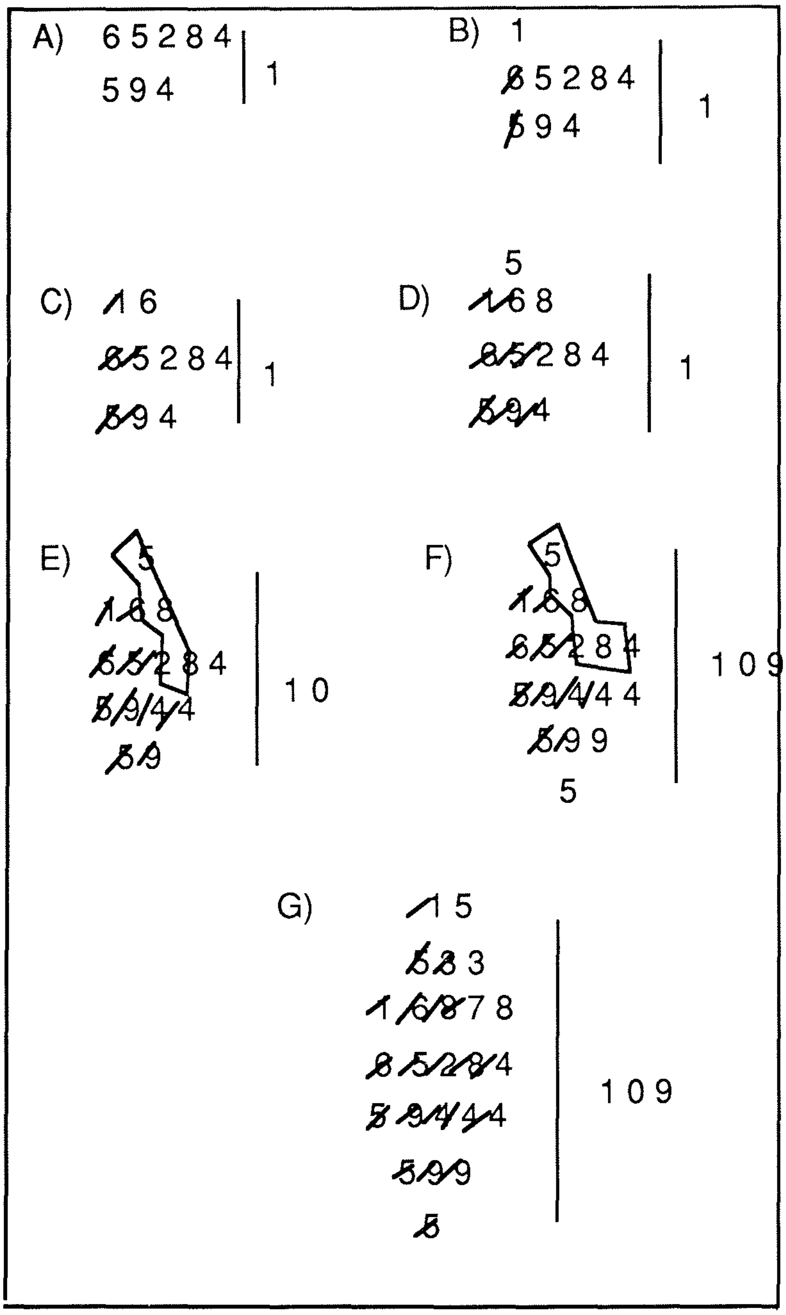
Si le diviseur était un multiple de 10, les auteurs du XVIème siècle avaient recours à *«partire per il scapezo»*, c'est-à-dire qu'ils effectuaient une «division par découpage» du dividende. Ainsi, pour diviser 84 789 par 20, le dividende était coupé par une barre, (soit 84 78/9), la première partie (soit 8478) étant divisée par 2 et le 9 étant divisé par 20. Soit : 84 789 divisé par 20 est égal à 4239 $\frac{9}{20}$

La méthode Galley ou «à rayures»

La méthode appelée Galley, *batello*, ou *«méthode des rayures»* fut en usage avant 1600 et semble être d'origine hindoue. Elle peut être illustrée ici par l'exemple : 65284 ÷ 594, comme celui donné dans l'Arithmétique de Treviso (1478).

Pour effectuer le travail clairement, nous interprétons les six premières étapes données séparément comme suit :

soit 65 284 ÷ 594 = 109 (reste 538).



Le travail est achevé par une explication de deux pages et demi (d'après Smith, 1958) et on a la conclusion suivante :

«C'est 65 284 ÷ 594 = 109 avec un reste de 538».

Nous nous proposons d'expliquer les étapes ci-dessus :

A) En divisant 65284 par 594, par exemple, le premier chiffre du quotient est 1. Il est écrit à la droite du calcul.

B) Le premier chiffre du diviseur est soustrait du premier chiffre du dividende, et les deux chiffres qui ont été utilisés sont alors rayés, le même procédé est utilisé à chaque fois dans les étapes suivantes du calcul.

C) 9 est soustrait de 15, ce qui donne 6, la retenue 1 est alors soustraite du chiffre placé en haut à gauche, soit 1.

D) 4 est soustrait de 12, ce qui donne 8, la retenue 1 est soustraite du 6, soit 5.

E) **Le diviseur est alors réécrit** avec des chiffres alors déplacés d'une «place» vers la droite. On considère alors 594 et 588, le deuxième chiffre issu du dividende étant inférieur au premier le chiffre zéro est requis au quotient.

F) On réécrit de nouveau le diviseur, de nouveau déplacé vers la droite du calcul, pour continuer le calcul. Notons que cette réécriture n'est pas horizontale, ce qui engendre une présentation générale assez compacte. Finalement, les étapes de calcul intermédiaires sont peu lisibles.

G) Le calcul achevé, on obtient le quotient, à droite de la barre verticale, et le reste, composé des chiffres non rayés, résultats des dernières soustractions partielles.

La complexité du calcul s'accroît d'autant plus que la «lecture» du nombre à considérer requiert une succession de chiffres placés de façon inégale d'une colonne à une autre, et d'une ligne à une autre. L'ensemble du nombre à considérer (le dividende partiel) est, de surcroît, placé en diagonale ; aucune lecture littérale de droite à gauche, ou de gauche à droite n'est possible. La question est ici de savoir si la suggestion de Smith concernant la compacité de cette présentation est due à l'économie de place voulue sur le papier (ce qui est une interprétation pour le moins originale !), ou à l'usage qui demandait d'aligner et de rassembler dans un même plan l'ensemble des chiffres utilisés dans le calcul. La procédure est ici liée à une somme de soustractions successives.

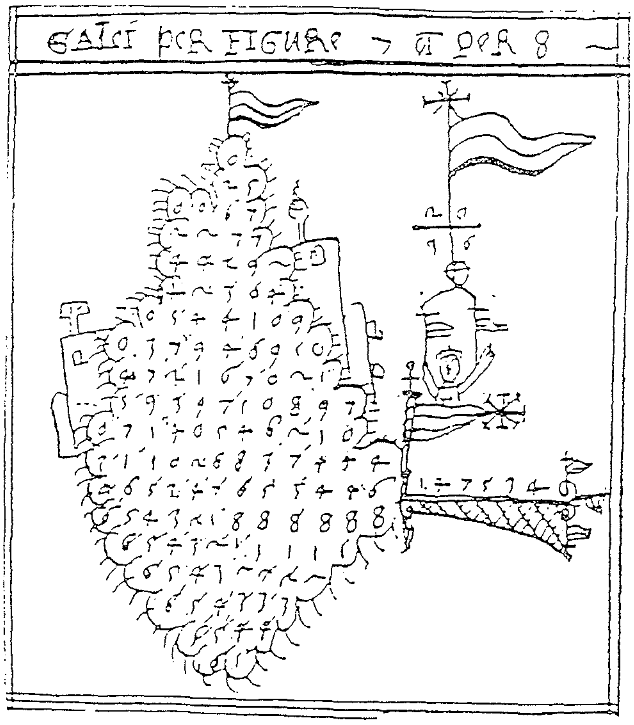
La présentation de l'algorithme actuel que nous connaissons a été introduit au cours du quinzième siècle environ, la méthode «Galley» a continué cependant à fonctionner durant trois siècles encore.

Maximus Planude (1340) fournit quelque lumière sur son origine première en disant que si cette division est difficile à exécuter sur du papier, ce n'était pas le cas cependant quand on utilisait l'abaque de sable. La nécessité de rayer certains nombres et d'en écrire d'autres à leur place augmente les risques de confusion, surtout quand il faut s'interrompre pour «reprendre» de l'encre. Sur une abaque de sable, il était d'après lui plus facile d'effacer les chiffres avec les doigts et d'en écrire d'autres à leurs places. Par contre, dès l'introduction de l'encre et du papier, la présentation donnée change, au détriment de la lisibilité du calcul lui-même.

Cette méthode était adoptée par Fibonaci (1202). Par exemple voici le cas de l'opération 18 456 ÷ 17 :

```
          6
        1 4 9
      1 8 4 5 6 ——► dividende
            1 7 ——► diviseur
        1 0 8 5 ——► quotient
 11
 ——     1 0 8 5 ——► écriture finale
 17
                    composée d'un reste
                    fractionnaire
```

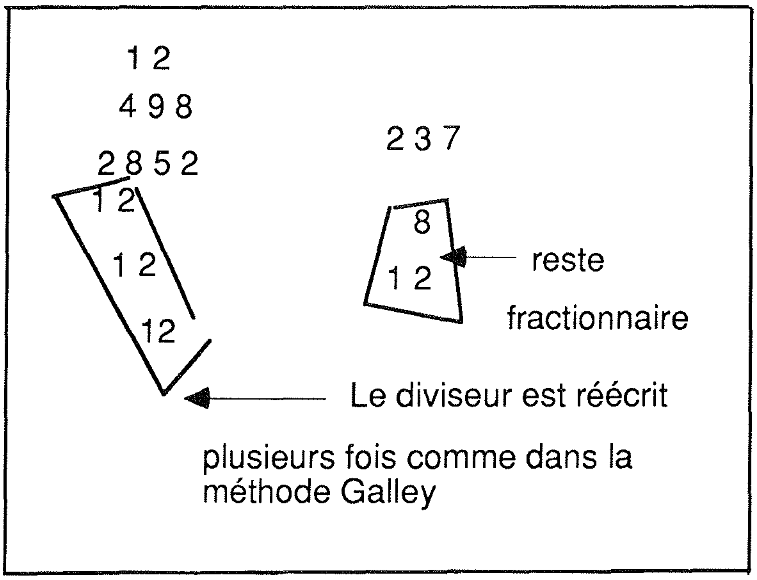
Si l'on veut comparer ce calcul à notre algorithme actuel, notons que les restes des dividendes partiels sont écrits au-dessus du dividende. Il faut lire 145 non pas en ligne, mais de façon «décalée», selon le principe de la méthode «Galley». Il faut lire le chiffre 9, comme étant un reste partiel d'une soustraction. Le reste est donné sous forme fractionnaire ($\frac{11}{17}$). Les noms *galea* et *batello* référaient à un bateau auquel le profil du travail de cette division ressemblait. Une illustration intéressante de cette ressemblance est notifiée dans un manuscrit de 1575, (voir ci-dessous). Tartaglia nous dit que les professeurs vénitiens avaient l'habitude de demander de telles illustrations à leurs élèves quand ils avaient terminé le travail (illustration donnée dans l'ouvrage de Cajori, p.487, 1970).



GALLEY DIVISION, 16TH CENTURY

Ce manuscrit fut écrit par un élève vénitien appelé Honoratus vers 1550-1600.

Cette méthode de division était utilisée par les auteurs arabes du temps de Al-Khowarizmi (825) avec quelques variations. Par exemple, Al-Nasavi (1025) utilisait la forme suivante pour $2852 \div 12 = 237 \frac{8}{12}$:



Ce calcul se présente de la même façon que la méthode Galley, sauf que le diviseur est réécrit à chaque fois horizontalement. Le début de cette division s'explique de la façon suivante :

Après avoir évalué le premier chiffre du quotient, soit 2, on effectue (de droite à gauche), 2 x 1 = 2, mais on ne raye pas les chiffres utilisés et on n'inscrit pas le zéro. Puis il faut multiplier 2 par 2 et soustraire le résultat, 4, de 8, et écrire le reste au-dessus du 8. La suite se déroule selon les mêmes principes que ceux énoncés dans notre exemple précédent (division dont l'illustration est donnée dans l'ouvrage de Smith, pp. 41-42, 1958).

Le fait d'avancer le diviseur d'une place à droite chaque fois est ici visualisée d'une façon plus claire que les dispositions italiennes usuelles. Les auteurs latins médiévaux appelaient quelquefois cette caractéristique *«anterioratio»*. Cette façon de faire n'était pas universelle, cependant Rudolff (1526) disait que les Français, entre autres, plaçaient souvent le diviseur en bas du calcul, et une seule fois. Une fois établie, la méthode dite «Galley» était celle que préféraient les arithméticiens avant 1600 et qui était préconisée vers la fin du XVIIIème siècle. Smith précise que «si on trouve certains exemples de ces divisions sans que les chiffres soient effectivement barrés, c'est probablement par oubli» (p.139, 1958). En fait, le processus lui-même ne requiert pas obligatoirement de barrer les chiffres utilisés.

Que les chiffres soient rayés ou non, la méthode était choisie non seulement par certains commerciaux, mais aussi par quelques scientifiques comme Regiomontanus.

Même un mathématicien aussi célèbre que Heilbronner, au milieu du XVIIIème siècle, préférait cette méthode avec tous les longs exemples qui expliquaient les étapes de sa résolution.

Au XVIIème siècle, un peu plus tard, Hodder disait qu'il censurait cette méthode, car cette façon de diviser n'était pas linéaire, et il cite le témoignage de certains écrivains italiens des deux siècles précédents.

D'après Smith (1958), la méthode Galley serait encore enseignée dans les écoles mauresques de l'Afrique du Nord, et à coup sûr dans d'autres régions du monde arabe.

CONCLUSION

L'introduction de notre opération actuelle de la division a ensuite remplacé la méthode «Galley» qui était en usage jusqu'alors. Ceci se confirme grâce à l'étude que nous avons faite des documents de cette époque, que nous présenterons dans le prochain numéro de «Grand ℕ».

Il y a certainement un rapport à établir entre le processus historique du développement de la division par lequel les modèles se sont construits, et les processus de mathématisation que l'on s'efforce de favoriser chez l'enfant pour qu'il s'approprie l'algorithme. Notre intérêt a porté ici sur la question de savoir comment la division actuelle a été introduite.

Pour tout individu et pour toute notion, on assiste à une combinatoire complexe de mécanismes. Bachelard, dans «La formation de l'esprit scientifique» (1938), expose sa méthode pour parler des obstacles épistémologiques historiques. Si Bachelard reconnaît des contenus à une notion, s'il réfère ces contenus à des modes de pensée, c'est qu'il insiste sur le particulier, le singulier et la culture, et sur les processus de formation sociale des concepts. Il nous propose ainsi de penser que la culture intègre et dépasse la croissance historique des idées. Ceci appelle des questions sur lesquelles nous devons continuer à réfléchir, afin d'avancer dans le sens d'une mise en relation entre la construction historique et l'appropriation individuelle des connaissances.

BIBLIOGRAPHIE

ARTIGUE M., (1991), Épistémologie et didactique, *Recherches en didactique des Mathématiques*, pp 241-286, Vol 10/2.3, La Pensée Sauvage éditions.

BACHELARD G., (1938), La formation de l'esprit scientifique, Vrin.

BROUSSEAU G.,(1989), Éléments pour l'étude du sens de la division, *article occasionnel n°6, I.R.E.M.* , Bordeaux.

BROUSSEAU G., (1983), Les obstacles épistémologiques et les problèmes en mathématiques, *Recherches en didactique des mathématiques*, Vol. 4.2., La Pensée Sauvage, Grenoble.

BROUSSEAU G., (1987), Représentation et didactique du sens de la division, Didactique et acquisition des connaissances scientifiques, *Recherches en didactique des mathématiques*, Actes du colloque de Sèvres, p.47-64.

BUTLEN D., (1985), Introduction de la multiplication à l'école primaire : histoire, analyses didactiques, manuels actuels, *Cahier de didactique des mathématiques, n°19,* I.R.E.M., Paris.

DAHAN-DALMEDICO A. PEIFFER J., (1986), *Une histoire des mathématiques*, Éditions du Seuil.

DHOMBRES J., (1992), *L'école normale de l'an III, Leçons de mathématiques*, Dunod.

GUIET J., (1994), «Algorithmes et schèmes : cas de la division», in Artigue M., Laborde C., Gras R., Tavignot P., *Vingt ans de Didactique des Mathématiques en France. Hommage à Guy Brousseau et Gérard Vergnaud,* La Pensée Sauvage, Grenoble, pp 225-230.

GUIET J., (1994), *La division : une longue souffrance,* Thèse de doctorat en sciences de l'éducation, Université Paris V.

GUITEL G, (1975), *Histoire comparée des numérations écrites*, Flammarion.

HANTOUCHE A. L., (1984), *Les problèmes posés par l'acquisition des nombres décimaux*, Thèse, E.H.E.S.S.

HARLE A., (1984), *L'arithmétique des manuels de l'enseignement élémentaire français au début du XXème siècle*, Thèse de Doctorat de 3ème cycle en Didactique des Mathématiques, Université de Paris VII.

PIAGET J., (1950), *Introduction à l'épistémologie génétique* (Vol. 1), Paris, P.U.F.

PIAGET J., (1977), *Épistémologie génétique et équilibration*, Delachaux et Niestlé.

SMITH D. E., (1958), *History of mathematics*, New York, Dover publications Inc.

SMITH D. E., (1970), *Rara arithmetica, a catalogue of the arithmetics written before the year 1601*, Chelsea publishing company, New York.

VERGNAUD G, (1985), Concepts et schèmes dans une théorie opératoire de la représentation, *Psychologie Française*, tome 30, 3-4.

YOUSHKEVITCH A.P., (1976), *Les mathématiques arabes*, Paris, Vrin.