LES ACTIVITES : UN THEME A RETRAVAILLER

Suzette ROUSSET-BERT
IREM de Strasbourg

Résumé. Les « activités », à la mode dans les manuels, permettent-elles vraiment des apprentissages mathématiques ? Que pensent de jeunes enseignants sur le sujet ? Quel minimum didactique introduire en formation pour privilégier le point de vue des conditions de l'acquisition des connaissances par les élèves dans le choix ou le rejet des activités trouvées dans les manuels ?

Introduction

On constate depuis quelques années une sorte d'engouement pour « les activités » dans l'enseignement des mathématiques, activités de réinvestissement ou activités préparatoires à l'introduction d'un concept. Nul manuel scolaire ne peut commencer un chapitre sans proposer des activités dites « préparatoires ». Ces activités permettent-elles vraiment des apprentissages mathématiques ?

À l'occasion de stages de formation des jeunes enseignants dans l'académie de Strasbourg, nous avons cherché à savoir ce que recouvraient pour eux les mots d'activités et de situations, tels qu'ils étaient présentés dans les objectifs généraux des programmes de mathématiques.

Voici ce que l'on peut lire dans les programmes de seconde, niveau auquel se situe notre étude. Il s'agit des programmes de 1990 en vigueur à l'époque. Depuis la rentrée 1999 les programmes de seconde ont changé mais le document d'accompagnement comporte encore une rubrique développant l'importance de l'activité mathématique dans la classe.

> Il existe pour chaque classe des dominantes de contenus et d'activités...Il faut entraîner les élèves à l'activité scientifique...les professeurs vont avoir à choisir des situations créant un problème dont la solution fera intervenir des outils c'est à dire des techniques ou des notions déjà acquises, afin d'aboutir à la découverte ou à l'assimilation de notions nouvelles...

On devra privilégier l'activité de chaque élève... »
La lecture des programmes successifs du secondaire montre que l'idée de développer l'activité de l'élève, de recourir au concret pour mieux aborder les concepts est assez ancienne dans les consignes (on la trouve par exemple dans les instructions de 1957).
C'est dans les programmes de 1989 et les rapports de mission qui les accompagnent qu'apparaît clairement une rupture dans la conception de l'enseignement des mathématiques. La démarche qui est préconisée doit permettre « de bâtir des mathématiques à partir de problèmes rencontrés dans plusieurs disciplines et, en retour d'utiliser les savoirs mathématiques dans des spécialités diverses .
[...] Ainsi il faut poser des problèmes qui aient du sens pour l'élève et construire avec lui les outils nécessaires à leur résolution

On y affirme que c'est dans l'activité mathématique que l'élève peut se former, et qu'il est nécessaire de reconstruire dans l'enseignement une démarche qui soit semblable à celle du chercheur. Dix ans après, l'idée d'entraîner les élèves à l'activité scientifique est toujours présente dans les préambules des programmes, sans que le choix des situations que devra faire le professeur soit explicitement mis en relation avec une réflexion sur les conditions de l'acquisition des connaissances par les élèves.

Les premières analyses des réponses données par les jeunes enseignants nous montrent que le choix de proposer aux élèves des activités est justifié par des arguments tels que le rejet du cours magistral, la motivation des élèves, la nécessité de faire du concret plus que par la prise en compte des conditions d'apprentissage des connaissances scientifiques. Nous analyserons, en liaison avec les réponses au questionnaire, quelques exemples d'activités préparatoires trouvées dans les manuels que les jeunes professeurs disent utiliser dans leurs classes et nous nous interrogerons sur la pertinence de ces activités par rapport au concept à introduire.

Ceci nous amène à nous poser la question suivante : quels outils donner aux jeunes stagiaires (dans des stages de courte durée et avec les contraintes institutionnelles) pour que le point de vue des conditions de l'acquisition des connaissances par les élèves soit privilégié dans le choix ou le rejet des activités trouvées dans les manuels ?

1. Le contexte de l'étude

Le travail présenté s'appuie sur deux années d'expérience d'animation de stages des jeunes professeurs (moins de 5 ans d'ancienneté) dans l'académie de Strasbourg de 1997 à 1999. L'un des thèmes de travail, parmi d'autres, était celui de l'activité pour deux raisons.

- C'était le choix des formateurs qui avaient tous une expérience des visites conseil dans les classes. Leur expérience d'observateur au fond de la salle leur avait montré que le passage le plus délicat était celui de l'articulation entre une « activité » supposée travaillée sur l'introduction d'un concept donné et le « cours » qui suit.

- C'était une demande exprimée par les jeunes stagiaires au travers des questions suivantes qu'il s'agissait donc pour nous de reformuler dans une problématique didactique :

> Les élèves ne sont pas motivés. Comment choisir des activités qui les motivent, donc des activités concrètes ?
> Comment introduire des notions mathématiques difficiles dans les classes non scientifiques en leurs rendant ces notions familières, tangibles, non artificielles
> Que reste-t-il dans le cahier de cours de l'élève ? faut-il faire un cours ? comment conclure des activités pour qu'il en reste quelque chose ?

Beaucoup d'entre eux affirmaient « travailler par activités » pour motiver les élèves c'est pourquoi nous avons repris cette formulation dans le questionnaire.

2. Les analyses des réponses au questionnaire

2.1. les conditions de passation du questionnaire

Le questionnaire a été proposé en début de stage après le tour de table et l'expression des attentes des stagiaires. Les préambules des programmes de seconde étaient à la disposition de ceux qui souhaitaient les consulter. Les réponses étaient individuelles. Le questionnaire a été soumis aux 18 professeurs du groupe lycée, le groupe collège ayant plutôt fait un tour de table oral sur la question des activités.

L'étude qui suit n'a donc aucune prétention statistique. Il s'agit plutôt d'une étude clinique permettant de mettre en relation les réponses proposées et les exemples cités spontanément par les enseignants ainsi que les discussions qui ont eu lieu dans le stage à partir des exemples proposés. Nous ne saurions trop insister sur le fait que ces réponses ne sont qu'un état de la réflexion, à un moment donné, et qu'elles n'enferment nullement leurs auteurs dans ce premier stade de réflexion. En effet, à l'issue de la première année, un petit groupe de stagiaires très motivés a souhaité poursuivre la recherche engagée dans un groupe recherche formation. Le titre de la recherche est « Activités au banc d'essai ». Le travail consiste à analyser des activités trouvées dans les manuels et les brochures IREM, à les modifier ou à en écrire de nouvelles, et à faire des comptes rendus d'observation après expérimentation dans les classes. Ces analyses montrent pour un premier travail de recherche, une réflexion de qualité en particulier sur l'introduction de la dérivée. Mais notre étude ici ne portera pas sur ces travaux.

2.2. les réponses aux questions posées

Question 1. Qu'évoquent pour vous les mots « activités » et « situations » dans l'enseignement des mathématiques ?

Réponses à propos du mot *situation* :

> Elle doit être plus concrète, plus pratique (balance pour introduire le barycentre).
> État concret où le problème est moins abstrait.
> Problème issu de la vie courante.
> Je rapproche ce mot de « concret », un exercice basé sur une situation concrète est parfois plus motivant qu'un exercice théorique.

Situation évoque un problème assez court, simple de présentation, dont la solution n'est pas immédiate et les chemins nombreux pour y arriver.

Réponses à propos du mot *activité* :

l'élève doit être en mesure de formuler ensuite des conjectures.
Problème concret que les élèves peuvent résoudre de manière presque autonome (en étant guidé si nécessaire) ; il va révéler des notions nouvelles qu'il s'agira de formaliser.
L'élève doit se heurter à une difficulté de résolution qui motivera l'introduction de nouveaux outils.
L'élève doit être placé dans une situation de demande.
Une activité permet d'aborder une notion nouvelle, d'assimiler une notion déjà vue, de faire deviner quelque chose aux élèves en les guidant pas à pas.
Activité, c'est le contraire du cours magistral.
L'activité est une application relative à un domaine (chapitre).

On peut remarquer que l'activité est très liée à l'idée de début de chapitre, à l'introduction d'une notion nouvelle à partir des connaissances anciennes (12 réponses sur 18). Tous les participants donnent ou tentent de donner une « définition » de l'activité alors que très souvent (dans un tiers des cas) il n'y a pas de réponse pour situation.

Question 2. Pourquoi travailler par activités en mathématiques ? Qu'est-ce qui justifie ce choix ?

Les enseignants mettent en avant trois types de justifications.

• Opposition entre le cours magistral et la motivation des élèves (10 réponses sur 18)

Pour éviter un cours trop magistral, pour éviter d'introduire du vocabulaire nouveau trop tôt.
L'élève peut ne pas se sentir motivé par un cours, c'est plus difficile pour une activité.
Pour donner un côté attrayant au cours.
Activités attrayantes et motivantes, qui évitent de tomber dans le piège du cours magistral.
Les élèves sont plus motivés, plus calmes.

• L'élève doit être actif (9 réponses sur 18)

L'élève doit être actif, pas seulement récepteur d'informations.
Cela permet le travail de groupe et la communication.
L'apprentissage est actif, cela permet de réfléchir, de mettre en relation des connaissances.
C'est l'élève qui s'active dans le but de découvrir un nouvel outil.
L'élève doit être actif, à lui d'établir les principaux résultats.

Cette activité de l'élève semble un but en soi, et seuls deux enseignants de ce groupe mettent en relation l'activité de l'élève avec la construction des connaissances mathématiques.

• Opposition entre concret et abstrait, artificiel et tangible (6 réponses sur 18)

La notion est introduite de manière moins artificielle que sous forme d'un cours magistral.

Pour fournir des repères à l'élève et rendre tangible une notion mathématique.
Pour éviter d'introduire un vocabulaire abstrait trop tôt .

Citons enfin quelques réponses isolées qui ne rentrent pas dans les catégories précédentes

Travailler par activités ne m'a jamais paru évident, je le fais presque par obligation ; l'attitude des élèves me conforte dans mon opinion (renoncement devant l'acte de chercher).
Pour donner une raison d'être aux mathématiques.
Pour se rappeler même imparfaitement de notions déjà acquises.
Pour amener les élèves à prendre conscience de la nécessité d'une méthode.

Question 3. Avant d'introduire une notion nouvelle beaucoup de manuels scolaires proposent des « activités préparatoires » .

a) Les utilisez-vous avant de démarrer votre cours ?
b) A partir de quels critères allez-vous décider qu'une activité est intéressante à proposer à vos élèves ? *(s'appuyer sur un exemple)* .
c) Si vous avez été amené à modifier une activité, expliquer comment et avec quel objectif ? *(s'appuyer sur un exemple)* .
d) Qu'est ce qui vous amène à rejeter une activité trouvée dans un manuel et à décider de ne pas la donner à chercher *(s'appuyer sur un exemple)* .
e) Quelles sont pour vous les qualités d'une « bonne activité » d'introduction à un concept donné *(s'appuyer sur un exemple)*

Nous ne donnerons ici que quelques éléments de réponse, les exemples proposés étant étudiés dans le paragraphe suivant.
Tous s'accordent à dire que l'activité doit être *encadrée dans le temps.*

Énoncé court qui peut se résoudre en une heure ou deux
Encadrée dans le temps pour que la conclusion vienne en fin de séance

Les avis sont très partagés sur le fait qu'elle doit être *simple ou difficile.*

Activité gardée si elle comporte une difficulté, ou alors si elle fait le lien avec un autre chapitre.
Elle ne doit être ni trop simple ni trop difficile.
Activité gardée si elle est simple, détaillée efficace.
Activité rejetée elle est trop simple et que l'élève est sur des rails.

Les avis sont également très partagés sur le fait qu'elle doit être *fermée ou ouverte.*

On rajoute des questions quand c'est trop ouvert, on détaille plus
On supprime des questions pour ne garder que l'essentiel

Remarquons enfin qu'aucun enseignant ne parle de la façon dont il gère l'activité en classe, mais le questionnaire ne l'y incitait sans doute pas...

2.3. les conclusions sur les résultats de l'enquête

Le mot situation est très nettement rattaché à l'idée du concret de situation de la vie courante, ce concret étant réputé aider les élèves à comprendre les mathématiques.

Bien que l'idée de la construction des connaissances ne soit pas absente des définitions du mot activité, ce qui apparaît comme prioritaire est que les élèves soient « actifs » donc motivés, cette activité de l'élève semblant être recherchée pour elle-même et indépendamment des savoirs qu'il s'agit de construire.

3. Étude des exemples cités

Les exemples d'activités spontanément cités par les jeunes enseignants, concernent majoritairement sur le plan mathématique, les vecteurs et tout ce qui concerne l'enseignement en seconde (ou première éventuellement) au sujet des fonctions. C'est peut-être dû à la date de l'enquête, mi-novembre…

On retrouve six fois les activités sur les vecteurs (multiplication d'un vecteur par un nombre, activités sur la somme vectorielle, activité sur l'introduction de la colinéarité) et dix fois des activités sur les fonctions (activités qui mettent en place le langage relatif aux fonctions, l'étude des fonctions de référence, l'introduction aux fonctions à partir de courbes ou de la modélisation d'un problème, la mise en équation pour introduire la notion de fonction, la mise en équation pour rechercher un maximum (boîte de volume maximal), l'optimisation en géométrie ; l'équation f(x) = a peut avoir plusieurs solutions, le nombre de racines d'un polynôme du troisième degré et l'interprétation graphique).

Apparaissent ensuite des exemples isolés tels que la notion d'angle orienté (seul exemple où la difficulté du concept en jeu soit explicitée), les probabilités, les statistiques en seconde, la valeur absolue, la distance…

Nous avons choisi de travailler dans ce paragraphe *sur les activités citées explicitement (plusieurs fois) avec une référence bibliographique, dont nous avons pu étudier le texte avec précision et qui ont fait l'objet d'une discussion ou d'un travail dans le stage.* Nous sommes tout à fait conscients que ce sont les premiers exemples cités et nous ne réduisons pas la pratique de ces enseignants à ces seuls exemples. La convergence des exemples cités nous a paru significative d'une certaine conception *a priori* quant au rôle de l'activité dans l'enseignement des mathématiques.

3.1. activités mettant en place un nouveau langage

Après lecture et discussion des activités proposées, nous avons regroupé une première série d'exemples *qui sont présentés par les enseignants sous la rubrique « activités mettant en place un nouveau langage »* . Ces activités ont comme objectif plus ou moins avoué de faire deviner des définitions. Elles concernent le langage des fonctions (antécédents, images, ensemble de définition …), les notions de fonctions paires ou impaires, la valeur absolue la multiplication d'un vecteur par un réel. En voici quelques exemples.

La situation du bateau (annexe 1)

C'est une fiche de travail extraite du manuel Pythagore seconde (page 82) et retravaillée par un groupe de cinq stagiaires pour en faire une « bonne » activité d'introduction à la notion de fonction. Leur objectif déclaré était l'introduction des principaux éléments de vocabulaire tels que images, antécédents...

Dans ce cas, le rôle supposé de l'activité est de manière caricaturale le suivant. On peut voir sur le dessin une courbe *concrète* par exemple celle qui à chaque instant de la matinée associe la hauteur de la mer dans le port. Le bateau dessiné est sans doute destiné à susciter l'intérêt de l'élève. L'élève est *motivé* pour répondre aux questions « *pratiques* » (quelle est la hauteur de la mer à minuit ?) le vocabulaire sera *ancré dans la réalité* et la situation concrète donnera du sens aux notions d'image, d'antécédent, d'intervalle de définition. Or que peut-on prévoir ?

L'aspect concret n'a pas éclairé miraculeusement la notion d'image et d'antécédent, notion longue à se mettre en place chez les élèves qui n'arrivent pas à coordonner la lecture de deux informations sur deux axes différents. De plus, ce bateau dessiné par dessus la courbe qui donne la hauteur de la mer en fonction du temps accentue la confusion possible entre cette courbe et la trajectoire du bateau dans le port. L'expérimentation a montré que les élèves très en difficulté ne savaient pas très bien quels genres de bonds faisait ce bateau sur les vagues...

L'utilisation de fonctions issues de la physique ou de la vie courante n'est sans doute pas à remettre en cause mais encore faut-il que la situation proposée n'engendre pas des confusions et il est illusoire de penser que les difficultés propres à la conceptualisation mathématique vont être adoucies par le soi disant recours au concret.

La fonction paire (extrait de Pythagore, classe de seconde page 86, annexe 2)

Cette activité a été proposée par deux stagiaires et fortement rejetée par deux autres comme n'ayant pas le statut d'une activité.

Un encadré baptisé *entre nous*, rend le lecteur complice d'un petit jeu qui consiste à « découvrir les notions de fonctions paires et impaires et en formuler les définitions; interpréter géométriquement la parité ». Le cours de mathématiques ressemble alors à un petit jeu de devinettes pour motiver les élèves... Que propose l'activité du manuel et qu'attend-on de l'élève ? Qu'il soit capable de construire un morceau de courbe symétrique par rapport à l'axe des ordonnées, de comparer deux valeurs de la fonction pour deux valeurs numériques opposées de la variable, de généraliser hâtivement la comparaison de f(x) et de f(-x) et de formuler une définition.

La visibilité de la notion sur la représentation graphique semble aller de soi et l'élève serait donc conduit *naturellement* à donner la définition algébrique à partir des propriétés simples de la courbe. Est-ce aussi simple que cela et où sont les vraies difficultés ? La notion de fonction paire est difficile précisément parce qu'elle se construit dans l'articulation entre de deux registres de représentation (au sens où l'entend Raymond Duval), le registre des représentations graphiques et celui des écritures algébriques. Il n'y a donc pas un dessin qui serait simple, concret, tangible...et une écriture algébrique un peu plus compliquée qu'il suffirait de déduire du graphique, mais bien plutôt un concept qui n'est utile à l'élève que s'il dispose de ses différentes représentations dans différents registres et s'il peut les mobiliser simultanément. L'examen du graphique pour les élèves en difficulté ne suffira donc pas à faire le lien entre les écritures algébriques x, -x, f(x), f(-x) d'une part et leurs traductions graphiques d'autre part. Un travail systématique avec les élèves sur ces articulations entre deux registres sera donc nécessaire. Enfin ce n'est pas l'examen d'une seule fonction paire puis, dans un autre paragraphe, d'une seule fonction impaire qui permettra l'appréhension du concept mais la mise en correspondance de plusieurs courbes ayant ou non des symétries avec les variations pertinentes de leurs expressions algébriques. Et dans ce cas précis, le changement de registre se heurte à des difficultés spécifiques de non congruence.

La multiplication d'un vecteur par un nombre réel

Cette activité suscite un débat chez les jeunes enseignants : certains parlent du « langage des vecteurs » d'autres de « l'introduction d'un nouveau concept ». Le vecteur étant l'outil qui permet de passer de l'espace affine à l'espace vectoriel, il nous semble difficile de le réduire à un nouveau langage. Mais l'appauvrissement des programmes ces dernières années au sujet du vecteur et l'impossibilité de recourir à la notion de classe d'équivalence risquent bien de réduire dans l'esprit des élèves et celui des enseignants la portée de ce concept. Nous allons examiner deux activités à propos des vecteurs :

• *Multiplication d'un vecteur par un réel* (proposée par Transmath classe de seconde page 258, annexe 3).

Quelle est ici l'activité de l'élève ? Elle est très réduite.

a) L'élève doit remarquer que l'on fait la somme de deux vecteurs égaux comme celle de deux nombres égaux (on calcule $A\bar{B}+A\bar{B}=2A\bar{B}$ dans l'ensemble des vecteurs du plan comme $x+x=2x$ dans R) donc deviner que le formalisme de R s'applique aussi à l'ensemble des vecteurs à propos d'une loi externe, analogie qui peut présenter quelques dangers si on la transporte ailleurs sans précaution.
b) On lui propose de réunir deux informations (sur le sens et la longueur) en une seule (écriture vectorielle). Pourquoi deux informations ? En fait l'écriture vectorielle résume trois informations : l'une d'entre elles (concernant la direction) n'étant pas répétée et étant contenue implicitement dans le dessin d'une droite graduée. L'objectif affiché est une économie d'écriture : *on résume plusieurs informations en une* mais l'économie d'écriture est rarement une préoccupation d'élèves.
c) L'élève n'est placé que devant des exemples où il doit multiplier des vecteurs par des entiers ou éventuellement par une fraction simple (renforçant ainsi l'idée que les nombres ne sont que des entiers ou des petites fractions) et jamais par un irrationnel (ce qui est pourtant facile à introduire dès que l'on travaille dans un triangle équilatéral)

• *Multiplication d'un vecteur par un nombre* (proposée par le manuel Fractale seconde page 33, annexe 4).

Il s'agit de faire décrire une figure au téléphone. Certes l'outil vectoriel permet de décrire simplement la figure pour celui qui connaît cet outil, mais à qui fera-t-on croire qu'un élève normalement constitué va être amené à construire, à partir de ses connaissances actuelles, l'outil vectoriel pour décrire sa figure au téléphone ?

Dans les cahiers DIDIREM n°28 à propos de l'observation de pratiques de séances d'introduction sur les vecteurs, C.Hache et A.Robert avancent l'idée que nous reprenons ici :

> Il n'existe pas de problème de niveau seconde dont la résolution nécessite l'outil « multiplication d'un vecteur par un réel ».
> Il n'y a donc pas la possibilité d'amener les élèves au nouveau de manière continue, au moins partiellement, à partir de problèmes qu'ils auraient résolus avec leurs connaissances déjà présentes même implicites.
> Or qu'est-ce que le nouveau que l'on doit introduire ?
> Un concept généralisateur, celui de loi externe, qui va peut être servir à simplifier ultérieurement des démonstrations ...

D'autres exemples pourraient encore être donnés qui relèvent de la même intention : activités destinées à faire deviner la définition du sinus et du cosinus sur le cercle trigonométrique, activités pour rendre concrètes la valeur absolue....

Dans tous ces exemples, le scénario est le suivant. L'enseignant a repéré que la notion était difficile, la considère abstraite. L'introduction de cette notion nécessite un nouveau langage, un nouveau symbolisme (vecteurs, valeur absolue...). On cherche alors à « aménager » les mathématiques pour qu'elles soient moins artificielles en proposant à l'élève des situations détournées et pseudo-concrètes et en lui faisant croire que c'est simple parce qu'il peut deviner par lui-même les définitions au moyen de quelques analogies avec ce qui lui est familier !

3.2. la mise en équation pour rechercher un maximum, la rencontre avec la fonction au travers de problèmes de modélisation

Cette formulation de mise en équation pour rechercher un maximum revient suffisamment souvent pour que nous nous arrêtions sur ce point. L'activité type est celle proposée en annexe 5, extraite de Pythagore seconde page 83 et intitulée *« un maximum d'aire »*. Tous les enseignants disent proposer de telles activités à leurs élèves à propos des fonctions. Le problème est posé dans le cadre géométrique. Une longueur est inconnue (l'énoncé suggère en général de l'appeler x) il faut calculer une aire en fonction de x qu'il s'agit ensuite d'optimiser. L'objectif affiché est dans notre exemple « construire une courbe point par point, déterminer une fonction, rencontrer la notion de maximum ». On peut noter au passage le vocabulaire : la « rencontre » avec la fonction est sans doute plus conviviale.

L'objectif formulé par les stagiaires à propos de cette activité est *montrer que l'outil fonctionnel s'impose pour résoudre ce problème* et donc par là *donner de l'intérêt au cours sur les fonctions* et plus généralement *montrer l'utilité des mathématiques* qui seules permettent de trouver une solution à ce type de problème.

Un autre objectif affiché est aussi *la nécessité de démontrer que l'on a bien trouvé la vraie valeur du maximum*, mais il n'est pas sûr du tout que le problème proposé conduise à cette nécessité de démonstration, le maximum étant obtenu pour la valeur 2 de x, donc quand M est au milieu de [OB] et P au milieu de [OA] et donc quand l'aire du rectangle est la moitié de celle du triangle....

Pour mettre en évidence que ces objectifs ne sont pas nécessairement atteints, le problème du *parallélogramme qui tourne* (voir annexe 6) a été proposé par le formateur. Ce problème, à la différence des activités précédemment citées est proposé *avec son scénario*. Un début d'analyse a priori nous permet de voir que des choix didactiques ont été faits. L'énoncé ne suggère pas de poser AM = x, donc l'éventuel changement de cadre (le problème est posé dans le cadre géométrique et sa résolution se fait dans le cadre algébrique) est laissé à la charge de l'élève.

Dans le cadre algébrique on est conduit, après avoir posé AM = x, à rechercher le minimum d'une fonction définie par $f(x) = 2x^2-10{,}5x+26$, minimum obtenu pour la valeur 2,625. Il est possible d'obtenir ce résultat par des considérations purement géométriques, mais la démonstration est bien trop difficile pour les élèves.

Ce problème a été proposé à une classe de première S au tout début de l'année. Les élèves disposaient donc uniquement de leurs connaissances de seconde sur les fonctions et n'avaient pas encore abordé le chapitre sur le second degré et la forme canonique du trinôme. Les conditions de l'expérimentation étaient les mêmes que celles proposées en seconde dans le document cité. Le professeur n'est pas intervenu pendant une heure quinze environ. Les résultats sont les suivants (il y a quinze copies de binômes).

• Six binômes passent dans le cadre algébrique. L'un d'entre eux n'arrive pas au bout en raison d'erreurs de calcul algébrique, quatre aboutissent à l'expression de la fonction, la programment sur la calculatrice et trouvent une valeur approchée du minimum.

Le dernier binôme dont la copie figure dans l'annexe 7 (Christelle et Nicolas) est particulièrement intéressant à étudier. Ces deux élèves calculent l'aire du parallélogramme en fonction de AM, et arrivent au résultat $2AM^2-10{,}5AM+26$ et écrivent :

> x aire minimum du quadrilatère MNPQ
> $x \leq 2AM^2-10{,}5AM+26$
> $0 \leq 2AM^2-10{,}5AM+26+x$

puis s'arrêtent et semblent très troublés.

Le professeur passant dans les rangs leur demande d'expliquer ce qu'ils ont écrit et pourquoi ils sont bloqués. Les élèves répondent :

> on ne peut pas faire $2AM^2-10{,}5AM+26 = 0$, comme c'est le minimum on a une inégalité, on ne peut pas poser = quelque chose alors on pose le minimum = x mais on ne connaît pas x.

Ces deux élèves restent bloqués dans une problématique de résolution d'équation ou d'inéquation. AM garde le statut d'inconnue et ils n'arrivent pas à faire le changement de point de vue qui consiste à considérer AM comme une variable et à passer dans le cadre fonctionnel pour traiter la question du minimum. Auraient-ils fait ce passage s'ils avaient posé AM = x ? Nous sommes incapables de répondre à cette question.

• Cinq binômes procèdent par tâtonnement en essayant des valeurs pour AM.

Quatre d'entre eux essaient uniquement les valeurs entières pour AM voient que pour 2 l'aire trouvée est la plus petite et affirment que 2 est la bonne réponse. Un groupe propose la valeur 1,5 en disant qu'ils ont effectué plusieurs calculs (non visibles sur la copie).

• Trois groupes sont convaincus *a priori* que le minimum est obtenu pour M au milieu de AB et s'arrangent pour que leurs calculs le prouvent. L'un des binômes est alors amené à remettre en cause cette certitude au cours des calculs.

• Enfin un dernier groupe semble fonctionner avec la règle d'action suivante : pour que l'aire de MNPQ soit minimum, il faut que l'un des côtés soit minimum puis précise que finalement il n'en est pas sûr.

La phase de bilan (deux heures en classe entière) après analyse des copies par le professeur confirme que certains élèves ont bien du mal à envisager que AM puisse être autre chose qu'un entier ou à la rigueur un décimal simple, que la bijection entre la droite et l'ensemble des réels n'est pas disponible, que la présomption du milieu persiste chez certains élèves et que le recours à l'outil fonctionnel pour résoudre un problème posé dans le cadre géométrique est loin d'être immédiat.

La « rencontre avec la notion de fonction et avec la notion de maximum et de minimum » nécessite donc tout un travail préalable. Il est important de réfléchir au choix des valeurs des variables didactiques (longueurs des côtés, mention explicite ou non d'une variable x...). L'enseignant doit organiser les différentes phases (recherche autonome des élèves, confrontation des résultats, bilan...) en ayant réfléchi aux difficultés mises en évidence dans ce type de problème.

4. Conclusion

Les exemples précédents nous montrent que les activités, telles qu'elles sont proposées dans les manuels, ne sont le garant ni d'apprentissages mathématiques ni de remédiations aux difficultés des élèves. Beaucoup de ces activités y compris celles qui sont les plus choisies ne permettent pas de parvenir à l'objectif affiché de « donner du sens » aux notions enseignées. Les activités ne tiennent donc pas leurs promesses !

Lorsqu'on interroge de jeunes professeurs, leur discours justifiant le recours aux activités ne permet pas une régulation suffisante du choix des activités.

La première urgence est de donner aux jeunes enseignants (et sans doute aux moins jeunes aussi) des outils pour analyser des activités trouvées dans les manuels et réfléchir *à leur pertinence au regard des connaissances que l'on veut faire acquérir à l'élève.*

Quelques objectifs modestes pourraient être dans un premier temps :

• de repérer les activités préparatoires qui font deviner des définitions ou des règles en s'appuyant sur des analogies formelles douteuses

• de repérer celles qui travaillent à côté de la connaissance visée (l'enseignant vise l'introduction la transformation géométrique appelée symétrie et l'activité conduit l'élève à rester au niveau du pliage)

• de savoir modifier les questions d'une activité pour l'améliorer et de prévoir l'incidence de ces modifications sur les réponses apportées par les élèves.

• de prévoir le scénario qui accompagne une activité et en particulier le rôle de l'enseignant ce qui ne signifie pas qu'on ne sera pas conduit à le changer en cours de séance et à prendre des décisions locales imprévues.
• de ne pas rechercher à tout prix la motivation de l'élève dans des énoncés contournés et pseudo-concrets.
• de ne pas s'obliger (sous prétexte de rejet du cours magistral) à introduire toute notion par une activité préalable censée faire la liaison entre l'ancien et le nouveau car il n'existe pas toujours (au niveau scolaire où l'on se place) un problème dont la résolution nécessite l'outil que le programme demande d'introduire.

Tout un travail est donc à faire sur le choix des situations d'apprentissage, travail qui est le centre de nombreuses recherches des IREM. Les recherches en didactique des mathématiques nous apportent des outils pour analyser ces activités par rapport à la construction du savoir. Nous n'avons évoqué que quelques pistes.

L'analyse *a priori*, l'analyse des tâches que doit faire l'élève, et la réflexion épistémologique sur le concept mathématique permettent de repérer le décalage entre le concept visé et le travail effectif (souvent très réduit) que fournit l'élève durant l'activité.

Dans tous les problèmes d'articulation entre la représentation graphique d'un objet mathématique et son expression dans un autre registre (écriture algébrique ou écriture vectorielle par exemple), l'analyse en terme de registre de représentations, telle qu'elle est développée par Raymond Duval, permet de réfuter l'idée naïve souvent rencontrée « le graphique est concret et la compréhension de l'écriture algébrique est facilitée par le recours au graphique ». Les passages d'un registre de représentation à l'autre sont complexes, ils doivent faire l'objet avec les élèves d'un travail systématique. Le graphique n'est pas spontanément porteur de la connaissance mathématique de l'objet qu'il représente. Aucune de ces théories ne peut être approfondie dans des stages de courte durée et la question du minimum didactique à introduire en formation reste entière. Ouvrir ce chantier serait engager un autre article.

Bibliographie

DUVAL R., (1996) Quel cognitif retenir en didactique des mathématiques ? *Recherches en Didactique des Mathématiques*, n°16-3, La pensée sauvage éd., Grenoble.

MATHERON Y., (1994) Les répercussions des changements de programme entre 1994 et 1989 sur l'enseignement du théorème de Thalès, *petit x*, n° 34, IREM de Grenoble

IREM de ROUEN (1995) *Autour de la notion d'activité.*

ROBERT A., et HACHE C., (1998) Comment, en didactique des mathématiques prendre en compte les pratiques effectives, en classe, des enseignants de mathématiques du lycée ? Une approche à travers des analyses de pratique de quelques enseignants des mathématiques dans des séances d'introduction aux vecteurs en classe de seconde. *Cahier de DIDIREM*, n° 28, IREM de Paris 7.

Annexe 1

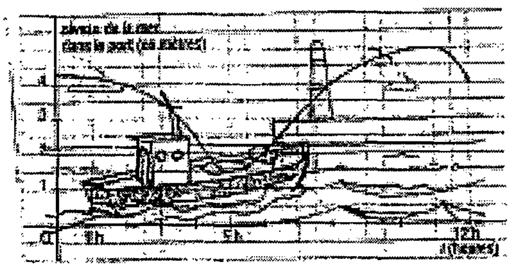
FONCTIONS

Prérequis :
- intervalles
- réunion d'intervalles

ACTIVITE 1 : Arrivée à bon port.

Il est juste minuit, le commandant DELAMER arrive en vue du port où il doit faire escale dans la matinée.

Le bureau maritime lui fait parvenir les renseignements nécessaires à son entrée dans le port, notamment le graphique d'une fonction f qui associe à chaque instant t de la matinée, la hauteur de la mer dans le port.



A- Ensemble de définition.
- Quelle est la hauteur de la mer à minuit ? à 6h ? à 12h ? à 14h ?
- Sur quel ensemble la fonction f est-elle définie ?
- *L'ensemble de définition de la fonction f est ....*

B- Images par f.
- Quelle est la hauteur de la mer à 2h ?
- Par quelle égalité peut-on traduire ce résultat ?
- *On dit que : l'image de .... par ...., est ....*
- Quelle est l'image de 6 par f ?
- Lire sur le dessin la valeur de f(8).

C- Antécédents par f.
- A quelles heures la hauteur de la mer est-elle de 2m ?
- *On dit que ces heures sont les antécédents de 2 par f.*
- Quels sont les antécédents de 3 ? De quelle équation ces nombres sont-ils les solutions ?
  Mêmes questions pour 1 et pour 1,5.

D- Une équation.
- Résoudre graphiquement dans [0,12] l'équation : f(t) = 2,5.

Annexe 2

7 Fonctions paires et fonctions impaires

A. Domaines symétriques par rapport à zéro

Information

[illegible]

Objectifs
- Découvrir les notions de fonctions paires et de fonctions impaires et en formuler les définitions.
- Interpréter géométriquement la parité.

Un domaine D est symétrique par rapport à zéro si pour tout x de D, $-x$ appartient à D.

Parmi les ensembles suivants, indiquer ceux qui sont symétriques par rapport à zéro.

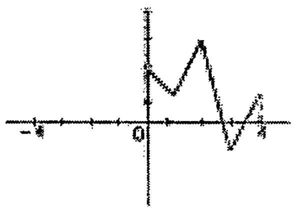
a) $[-4 ; 4]$ b) $[-2 ; 1]$ c) $]-6 ; 6]$
d) $[0 ; +\infty[$ e) $[3 ; 4]$ f) $]-5 ; 5[$
g) $]-\infty ; -1] \cup [1 ; +\infty[$

B. Fonctions paires et représentations graphiques

Information

La représentation graphique d'une fonction **paire**, dans un repère orthogonal, est symétrique par rapport à l'axe des ordonnées.

Voici un morceau de la représentation graphique d'une fonction paire f définie sur $[-4 ; 4]$.



1. Compléter la représentation graphique de f.
2. Comparer les nombres $f(1)$ et $f(-1)$; $f(2)$ et $f(-2)$; $f(3,5)$ et $f(-3,5)$.
Soit $x \in [-4 ; 4]$; comparer $f(x)$ et $f(-x)$.
3. Compléter :

Définition

Une fonction f, définie sur un intervalle I symétrique par rapport à zéro, est paire si pour tout x de I, on a $\ldots = \ldots$

Annexe 3

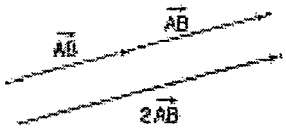
Activité

MULTIPLICATION D'UN VECTEUR PAR UN RÉEL

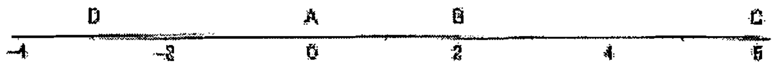
1 Exemples

1. Lorsqu'on additionne le vecteur $\overrightarrow{AB}$ et le vecteur $\overrightarrow{AB}$, il apparaît commode de noter le vecteur somme $2\,\overrightarrow{AB}$, plutôt que $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AB}$.

$$\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AB} = 2\,\overrightarrow{AB}.$$



2. A, B, C, D sont les quatre points de la droite graduée ci-dessous.



a) Les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ sont de même sens, et de plus, $AC = 3 \times AB$.
On réunit ces deux renseignements en une seule égalité, $\overrightarrow{AC} = 3\,\overrightarrow{AB}$.

b) Les vecteurs $\overrightarrow{AD}$ et $\overrightarrow{AB}$ sont de sens différents, et de plus, $AD = \frac{3}{2} \times AB$.

On réunit ces deux renseignements en une seule égalité, $\overrightarrow{AD} = -\frac{3}{2}\,\overrightarrow{AB}$.

2 Plus généralement

Si k est un réel non nul et $\overrightarrow{AB}$ un vecteur non nul, alors le vecteur $k\,\overrightarrow{AB}$ a :
– pour direction, celle de $\overrightarrow{AB}$;
– pour sens, celui de $\overrightarrow{AB}$ si $k > 0$, et le sens contraire si $k < 0$;
– pour longueur, $|k| \times AB$.

3 À vous à présent

Dessinez une droite graduée (unité de longueur : le centimètre).
Placez ensuite les points suivants :
• M tel que $\overrightarrow{AM} = \frac{1}{2}\,\overrightarrow{AB}$; • N tel que $\overrightarrow{AN} = \frac{7}{4}\,\overrightarrow{AB}$; • P tel que $\overrightarrow{AP} = -3\,\overrightarrow{AB}$;
• Q tel que $\overrightarrow{BQ} = -2\,\overrightarrow{AB}$; • R tel que $\overrightarrow{BR} = -\frac{1}{2}\,\overrightarrow{AB}$; • S tel que $\overrightarrow{AS} = \frac{1}{2}\,\overrightarrow{AP}$;
• T tel que $\overrightarrow{ST} = \frac{1}{4}\,\overrightarrow{PN}$.

Annexe 4

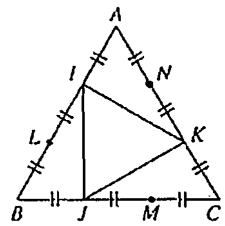
AP3 Multiplication d'un vecteur par un nombre

Cette activité présente une opération nouvelle sur les vecteurs et montre comment son utilisation peut permettre d'alléger le mode d'expression, par exemple dans la description de figures.

1. Au téléphone

« Allo Alexandre, c'est Régis. Je sèche sur l'exercice de maths. Tu sais le faire toi ? »
« Non, je n'ai même pas lu le texte. De quoi s'agit-il ? »
« Voilà, tu as un triangle équilatéral ABC ; après tu ... »

Aidez Régis à décrire la figure reproduite ci-contre.



2. Vecteurs de même direction

▶ Voir Module 1, page 82.
12. S'exprimer à l'aide de vecteurs.

- **Dans le pavage de l'AP2 les points sont tels que $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AD}$ ont même direction, même sens et leurs longueurs sont telles que $AD = 3AB$. Pour exprimer toutes ces propriétés nous noterons : $\overrightarrow{AD} = 3\overrightarrow{AB}$.**
- **De même $\overrightarrow{CE}$ et $\overrightarrow{DA}$ ont même direction, sont de sens contraires et leurs longueurs sont telles que $DA = \frac{3}{2} CE$. Nous écrirons : $\overrightarrow{DA} = -\frac{3}{2} \overrightarrow{CE}$.**

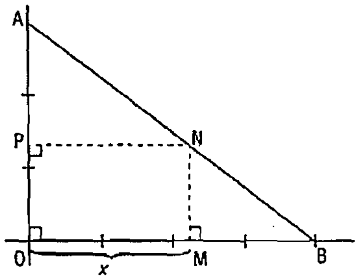
1° Complétez, en utilisant les points du pavage de l'AP2, les égalités :
$\overrightarrow{AD} = ...\overrightarrow{AE}$; $\overrightarrow{AC} = ...\overrightarrow{AD}$; $\overrightarrow{B_1C_1} = ...\overrightarrow{BD}$; $\overrightarrow{EA} = ...\overrightarrow{BE}$.

2° Comment pouvez-vous reprendre le texte téléphoné par Régis ?

Annexe 5

3 Un maximum d'aire

Objectifs
- Construire une courbe point par point.
- Déterminer une fonction.
- Rencontrer la notion de maximum.



$$\begin{cases} OA = 3\text{cm} \\ OB = 4\text{cm} \\ M \in [OB] \\ \text{On pose } x = OM \end{cases}$$

La perpendiculaire à (OB) *passant par M coupe* (AB) *en* N.
P *est la projection orthogonale de* N *sur* (OA).

Prérequis
Se souvenir de la configuration de Thalès.

A. L'aire du rectangle OMNP

1. Quelles valeurs peut prendre le nombre x ?
2. Calculer MN en fonction de x.
3. Calculer l'aire $\mathcal{A}(x)$ du rectangle OMNP.

B. La représentation graphique de $\mathcal{A}$

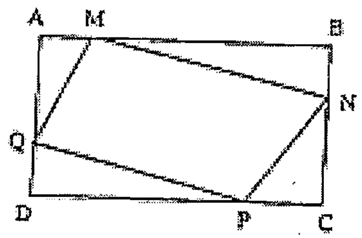
1. Établir un tableau de valeurs pour la fonction $\mathcal{A}$.
2. Dans un plan muni d'un repère orthonormé (unités : 3 cm en abscisse et en ordonnée), tracer à main levée la courbe représentant la fonction $\mathcal{A}$ (cette courbe est régulière).
3. L'aire du rectangle OMNP est maximum pour une certaine valeur de x. Préciser cette valeur ainsi que l'aire correspondante.

LE QUADRILATÈRE QUI TOURNE

L'objectif de cette activité est d'introduire l'outil fonction sous sa forme algébrique comme moyen de résolution nécessaire d'un problème que les élèves ont à résoudre. Cet outil prenant du sens pour l'élève comme moyen de résolution de ce problème.

L'énoncé du problème :

ABCD est un rectangle. AB=6,5 cm; BC=4 cm. M est un point du segment [AB]. N est un point du segment [BC]. P est un point du segment [CD]. Q est un point du segment [DA]. De plus on a AM = BN = CP = DQ. Où faut-il placer le point M pour que l'aire du quadrilatère MNPQ soit la plus petite possible?



Scénario prévu

Première partie (1h30) : après 5 à 10 minutes de *réflexion individuelle* pour permettre à chaque élève de rentrer dans le problème, les élèves cherchent en *groupe de 3 ou 4* une solution au problème, cette recherche devant aboutir à la production d'une affiche (*) sur laquelle ils devront présenter le résultat de leur recherche. Pour faciliter la lecture des affiches par tous les élèves, le professeur peut décider d'en harmoniser la présentation, en préparant des affiches sur lesquelles sont amorcées une ou deux phrases que les élèves devront compléter comme par exemple

Gilles Germain Jean François Zucchetta
groupe lycée IREM de Lyon

> Nous pensons que le point M ....
> ....
> ....
> Pour arriver à cette réponse, nous avons ....
> ....
> ....

Le professeur, après avoir donné les consignes de travail le plus souvent écrites au tableau, précise qu'il n'interviendra pas sur la méthode, ni sur les notions mathématiques à utiliser, ni pour dire si les solutions proposées par chaque groupe sont justes ou fausses. Il précise que c'est l'ensemble de la classe qui aura à se prononcer à partir du contenu des affiches.

Deuxième partie (1h à 2h) : débat sur les productions des groupes. Le professeur ayant choisi l'ordre dans lequel les affiches seront débattues il présente la première à la classe. Chaque groupe en prend connaissance et se prononce sur la validité de la solution produite et (ou) de la démarche utilisée en produisant des arguments pour étayer son acceptation ou son refus de la solution présentée. Suit un débat entre les élèves de la classe sur les arguments écrits au tableau par le professeur. Ce débat est une phase délicate de l'activité. Pour qu'il fonctionne de manière satisfaisante, le professeur doit en fixer les règles précises de fonctionnement et veiller à leur respect. Avant de passer à une autre affiche, le professeur fait constater à la classe les accords et les désaccords restants.

Troisième partie (30 min.) : le professeur énonce la connaissance mathématique nouvelle utilisée et (ou) utile pour la résolution du problème, fait le point sur le vrai et le faux à propos des affiches, etc. Cette phase de capitalisation du travail des élèves dépend naturellement de leur production mathématique pendant la recherche, et des arguments produits pendant la phase de débat.

Annexe 7

Christelle
Nicolas

$\mathcal{A}(ABCD) = 6{,}5 \times 4 = 26 \text{ cm}^2$

$\mathcal{A}(MNPQ) = 26 - \left(\frac{AM \times AQ}{2}\right) \times 2 - \left(\frac{BM \times BN}{2}\right) \times 2$

$= 26 - AM \times (4 - AM) + (6{,}5 - AM) \times -AM$

$= 26 - 4AM + AM^2 - 6{,}5AM + AM^2$

$= 26 - 10{,}5AM + 2AM^2$

$= 2AM^2 - 10{,}5AM + 26$

x aire minimum du quadrilatère (MNPQ)

$x < 2AM^2 - 10{,}5AM + 26$

$0 < 2AM^2 - 10{,}5AM + 26 + x$

Les élèves, interrogés par le professeur qui passe dans les groupes répondent qu'ils sont bloqués car ils ne peuvent pas « faire $2AM^2 - 10{,}5AM + 26 = 0$ »

« Comme c'est le minimum, on a une inégalité, on ne peut pas poser = quelque chose alors on pose le minimum $= x$ mais on ne connaît pas x »