ETUDE D'UN OBJET COMBINATOIRE : LE GRAPHE.

Laure BALMAN,
Équipe CNAM, laboratoire Leibniz

Résumé. Le graphe est un objet absent institutionnellement et pourtant, partout présent. Après avoir introduit brièvement l'objet mathématique, nous développerons les différentes formes sous lesquelles il apparaît dans les manuels scolaires. Dans un troisième temps, nous proposerons une situation faisant appel à la modélisation et à la preuve. Enfin, nous donnerons une fiche d'activité utilisant le graphe, qui peut être proposée à des élèves de différents niveaux comme situation de modélisation.[1]

Introduction

Malgré une absence dans les programmes officiels, nous pouvons remarquer la présence de graphes et en particulier d'arbres, dans les manuels scolaires de l'enseignement secondaire. Il est alors légitime de se poser ces questions :

Où et comment utilise-t-on le graphe ou l'arbre, en particulier dans l'enseignement secondaire ?

Puisque le graphe n'est pas un objet officiel des programmes du secondaire, les propriétés mathématiques de l'objet correspondant sont nécessairement limitées. *Quel est donc le domaine d'efficacité de l'outil graphe ?*

Quel est le rapport personnel des enseignants et futurs enseignants, à l'objet graphe ou à l'objet arbre ? L'objet graphe n'étant pas officiellement étudié, nous pouvons supposer que le rapport des enseignants à l'objet graphe, dans l'institution, est quasi-vide et que les rapports personnels à l'objet graphe ou arbre, seront très différents.

[1] Cette étude a fait l'objet d'un mémoire de DEA de Didactique des Disciplines Scientifiques (1998).

1. L'objet mathématique

L'objet graphe est au centre de la théorie des graphes, un domaine des mathématiques discrètes. Nous ne ferons pas l'étude théorique de cet objet. Donnons simplement deux définitions :

Le livre « Graphes et hypergraphes » de Berge (1970) propose une définition formelle :

> *Un graphe* G= (X,U) est un couple constitué par un ensemble $X=\{ x_1,x_2,\dots,x_n\}$ de points et par une famille $U=(u_1,u_2,\dots,u_m)$ d'éléments du produit cartésien $X \times X=\{(x,y) / x \in X, y \in X\}$.

Le Dictionnaire des Mathématiques de Bouvier, Georges, Le Lionnais (1979) donne la définition suivante :

> *Graphe*. En théorie des graphes, un graphe est intuitivement la donnée d'un ensemble de « point » (sommets) et d'un ensemble de « liens », chaque lien étant établi entre deux points distincts ou non. Selon leurs natures, les liens se schématisent par une flèche (arc) ou par un trait (arête) reliant un couple de sommets ; d'où les notions de graphe orienté et de graphe non orienté. [...]
> Dans le sens traditionnel - que l'on tend à abandonner - et dans la terminologie des sciences expérimentales et des techniques, le mot « graphe » est pris dans le sens de représentation graphique d'une fonction, c'est-à-dire de : courbe ou surface représentant cette fonction. [...]

Le sens « traditionnel » est celui en vigueur dans l'enseignement. Précisons que nous, nous travaillerons sur l'objet défini en théorie des graphes.

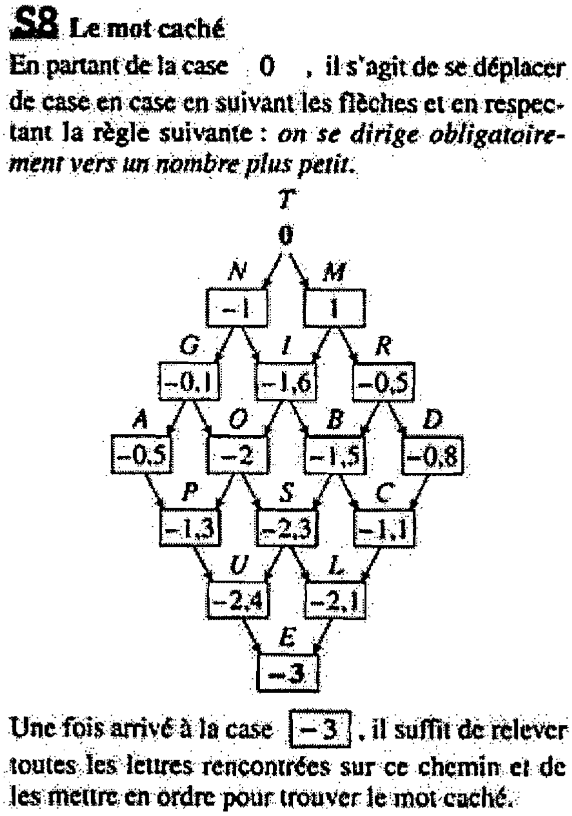
2. Le graphe dans l'enseignement : analyse de quelques manuels scolaires

Notre étude des programmes confirme que les graphes sont absents de la scolarité du secondaire. Il est pourtant possible de trouver des graphes de manière récurrente dans les manuels, à tous les niveaux scolaires.

Un résultat de l'analyse des manuels est que *le graphe apparaît sous des formes très différentes*.

2.1. Graphe support d'exercices

Le graphe support d'exercices sert à montrer l'énoncé. Il appartient à la formulation de l'énoncé. Il n'est ni un outil de modélisation, ni de représentation. Citons en exemple le manuel de mathématique de cinquième collection Cinq sur Cinq (p.64) :



Cet exercice se situe sous la rubrique « soutien » du chapitre « ranger des nombres relatifs ». Nous pouvons nous interroger sur la *signification de la flèche* dans ce parcours. En effet, la flèche signifie soit vrai soit faux : à chaque étape, la seule façon de se diriger est de choisir la flèche qui indique un nombre plus petit. Nous pouvons alors établir les deux règles du jeu :

1) Suivre les flèches.
2) Se diriger vers un nombre plus petit.

La deuxième règle consiste donc à choisir un chemin.

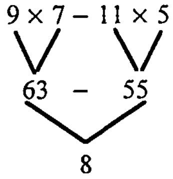
Nous pouvons alors considérer que la signification de la flèche n'est pas toujours la même. Mais nous avons aussi la possibilité de considérer que la flèche n'a pas de signification, ou du moins que la signification n'a pas d'importance. L'arête est orientée pour indiquer à l'élève qu'il est obligé de se déplacer vers le bas ; ce qui est important car, sans cette obligation, l'élève n'obtiendrait pas la même solution.

Le graphe est ici un support d'exercice que l'on peut résoudre sans réfléchir à la signification des flèches et des nombres.

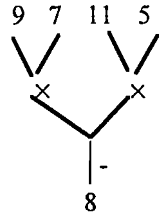
2.2. Graphes, arbre de calcul et arbre d'opérateurs

Ce sont essentiellement les arbres qui sont utilisés dans les manuels scolaires. Un des types d'arbre est l'*arbre de calcul ou arbre d'opérateurs*. Ce ne sont pas des objets d'enseignement mais des outils de visualisation des calculs.

arbre de calcul



arbre d'opérateurs



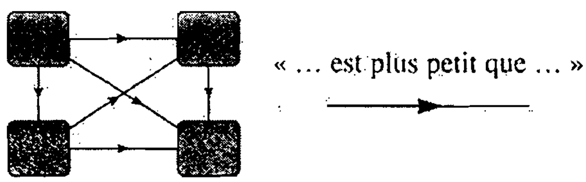
L'élaboration et la lecture de l'arbre se font de façon descendante. À chaque étape, l'élève doit *« remonter »* jusqu'à l'expression de départ pour reconnaître l'opération à effectuer pour le calcul. Il s'agit donc de repérer les calculs intermédiaires. Les calculs à effectuer en premier sont les multiplications, ce qui met en avant la priorité des opérations, mais n'est pas dit explicitement. Les opérations sont faites sur deux nombres.

L'arbre de calcul ou d'opérateurs est un *outil descriptif de la situation.* Une convention existe : les arbres sont « ascendants »[2], à un nœud n'arrivent que deux branches et ne part qu'une seule branche, mis à part le cas spécifique des nombres de l'expression de départ. Ces propriétés sont utilisées et ne sont cependant pas exprimées. Les auteurs de manuels pourraient très bien écrire leurs livres en remplaçant les écritures parenthésée par des arbres : l'écriture ne se ferait plus en ligne mais suivant l'arbre. L'arbre est une écriture symbolique. Nous pouvons considérer le passage de l'écriture parenthésée à l'élaboration de l'arbre, comme la *traduction d'une écriture* dans une autre à partir de règles syntaxiques et sémantiques (qui ne sont pas présentes). Ainsi la finalité de l'objet graphe considéré ici serait assez proche de celle du graphe support d'exercices.

2.3. Graphe d'ordre

Il existe des exercices où le graphe est un support mais qui plus est, un modèle pour l'objet mathématique qui est la finalité de l'exercice. L'exemple que nous avons choisi pour illustrer nos propos est un exercice extrait du chapitre « comparer et ranger les décimaux » du manuel de sixième collection Cinq sur Cinq (p.27, 1996). Un « schéma » apparaît pour traiter de l'ordre total dans D.

C Comprendre un schéma fléché !
Placer les nombres 1,05 ; 5,01 ; 1,5 et 5,1 sur le schéma suivant :



[2] Ce sont des graphes orientés, « ascendants » dans le sens où la racine de l'arbre se trouve en bas, contrairement à l'habitude des ouvrages de première et terminale principalement. La racine de l'arbre est le résultat du calcul.

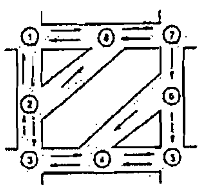
Cet exercice propose de remplir des carrés sur un schéma préexistant. Cela induit qu'il existe une solution et qu'elle est unique.

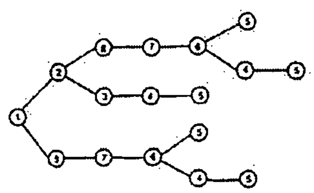
Le graphe n'est qu'une autre écriture du symbole mathématique $\geq$ ou $\leq$ mais il permet de visualiser les relations directes entre trois nombres ou plus, contrairement au symbole mathématique cité ci-dessus. Ce graphe peut illustrer aussi que la relation entre les décimaux est transitive, réflexive et antisymétrique. Cet exercice fournit donc *un « modèle » pour la relation d'ordre*. Un graphe sans cycle implique que l'ordre existe, et le fait qu'il soit complet induit que l'ordre est total. Nous pouvons donc modéliser un ordre total par un *graphe orienté complet sans cycle*.

2.4. Graphes, arbre de choix, arbre de probabilités

Les graphes ne sont explicitement présents comme objet d'enseignement qu'au niveau du lycée sous forme d'*arbres de choix ou de probabilités*. Ces arbres sont considérés comme représentation graphique de la situation (ils sont introduits dans une même rubrique avec les tableaux et les schémas) mais aussi comme outil de résolution. Il est de plus légitime de considérer l'arbre de choix ou de probabilités comme un modèle lorsqu'il apparaît sous l 'aspect d'un arbre inachevé.

Exemple extrait du manuel de première et terminale de Baccalauréat Professionnel Industriel (p.77) (il s'agit de déterminer tous les chemins possibles d'un réseau routier sans passer deux fois par le même carrefour) :





Son utilisation pratique implique des propriétés implicites :
- Un arbre est pendu par une racine et orienté de haut en bas (parfois de gauche à droite).
- En supprimant une arête quelconque sur un arbre, on n'a déjà plus de graphe connexe (donc plus d'arbre).

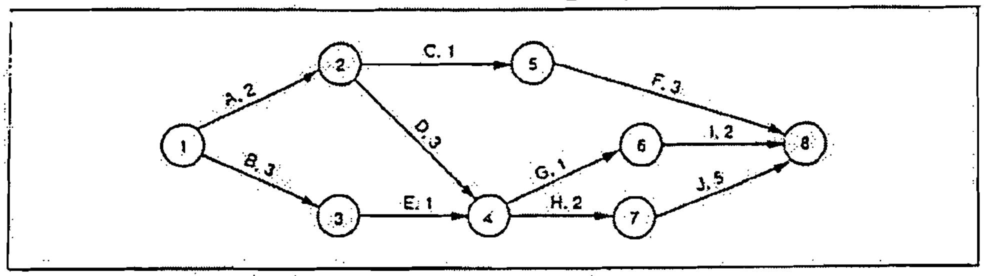
Si l'on reliait deux points quelconques d'un arbre qui ne l'étaient pas auparavant, le graphe contiendrait alors un cycle (et ainsi ne serait plus un arbre).

Remarquons que l'adéquation de la représentation sous forme d'arbre, avec la situation, n'est jamais posée.

2.5. Un cas particulier : le graphe d'un manuel de Bac Pro

Rares sont les manuels où l'on travaille effectivement sur le graphe, comme dans le manuel de baccalauréat professionnel cité ci-dessus, qui expose le *graphe de la méthode PERT* (Programm Evaluation and Research Task). Cette méthode utilise un graphe orienté pour la résolution d'exercice.

Extrait du manuel de Bac Professionnel Industriel (p.85) :



Les durées sont en jours.
Déterminer le chemin critique. Quelle est la durée minimale de l'exécution de l'ensemble des tâches ? Soit la tâche G. A quelle date au plus tôt peut-elle commencer ? A quelle date au plus tard doit-elle être terminée ? De quelle marge dispose-t-on pour l'exécuter ?

Le chemin critique est le chemin de longueur 12 jours : ADHJ. La durée minimale de l'exécution de l'ensemble des tâches est de 12 jours. La tâche G peut commencer au plus tôt au bout de 5 jours et doit être terminée au plus tard au bout de 10 jours. On dispose d'une marge de 4 jours..

Ce manuel ne demande pas aux élèves de savoir construire un tel graphe mais de savoir lire et utiliser les informations inscrites sur le graphe proposé. Aucune propriété de la théorie des graphes n'est présentée explicitement. Est implicite dans le cours et les exercices, le fait que les graphes soient : orientés, simples (i.e. sans arête parallèle ou bouclée), sans cycle et connexes.

Il est intéressant de remarquer que, dans ce manuel de Bac Pro, l'arbre n'est pas considéré comme un graphe. Il est un objet à part entière et non pas un cas particulier d'un autre objet mathématique, le graphe.

2.6. Synthèse

Les fonctions des graphes, dans les manuels scolaires de l'enseignement secondaire, s'étendent du support d'exercices à celle d'outil de représentation, de description. Seul le graphe de la méthode PERT est un modèle.

Dans tous les manuels, *les propriétés mathématiques des graphes sont utilisées mais jamais exprimées*. Dans tous les cas développés dans ce chapitre, les graphes sont orientés.

Les arbres présentés dans les manuels scolaires sont en fait *des arborescences* (et donc orientées) qui vont de soi et ne présentent qu'*une seule racine qui est immuable*. Les arbres sont soit pendus à partir de cette racine, soit développés à droite de la racine. Ils ne sont pas explicitement fléchés, mais le sens des arcs est sous-entendu. Derrière cet objet naturel utilisé dans l'enseignement, il existe une propriété importante qui ne paraît pas figurer dans la théorie : *l'aspect inductif de l'arbre* présenté ci-dessus.

3. Questions traitées

Le graphe comme objet d'enseignement est absent des programmes scolaires. En revanche, il est présent sous différentes formes dans les manuels. Puisqu'il n'existe pas contrôle « officiel » de l'institution, nous pouvons émettre l'hypothèse suivante :

Il existe une diversité de rapports personnels à l'objet graphe.

Étant donné cette hypothèse, nous avons voulu repérer comment le graphe était perçu et utilisé par des enseignants et futurs enseignants en situation de résolution de problème.

Le graphe est-il disponible comme outil en résolution de problème chez des enseignants ou futurs enseignants ? Quelles sont les propriétés de l'objet mathématique graphe accessibles pour eux ? Quel est un rapport personnel à l'objet graphe, en particulier à l'objet arbre ?

4. Une expérimentation ou rapports d'enseignants et de PLC2 (enseignants stagiaires) à l'objet graphe

L'expérimentation s'est présentée sous forme d'une séquence de trois situations : deux résolutions de problèmes et un questionnaire. Nous avons proposé cette séquence à deux groupes de trois personnes, puis le questionnaire à quatre autres ayant un certain niveau mathématique.[3] Dans cet article, nous nous intéresserons principalement à la situation des ponts.

5. La situation des ponts

Développons cette situation. Elle est une manière de faire travailler sur la modélisation qui est un objectif général des programmes de collège. Cette situation est déjà connue puisqu'elle a été résolue par Euler en 1736.

Cette situation propose une activité mathématique qui n'est pas liée à des chiffres. Grâce à des essais sur le dessin permis par le petit nombre de ponts, l'intuition de la réponse est évidente. Elle met en place une problématique de la preuve : expliquer que la promenade n'est pas faisable, ne va pas de soi.

5.1. Résolution du problème

Stratégie 1. Stratégie par essais-erreurs

Cette stratégie initiale permet d'entrer dans le problème : il s'agit de procéder par essais sur le dessin de la rivière et des ponts. Il convient donc de choisir un point de départ et d'essayer de passer sur tous les ponts une fois et une seule. Si le chemin n'aboutit pas au bout de plusieurs essais, on change de point de départ. Afin de minimiser les points de départs, on se sert de la symétrie du dessin. La solution du problème est intuitive : il n'existe pas de telle promenade car, d'après tous les essais, cela paraît impossible !

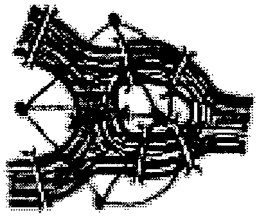
Une telle stratégie permet de repérer éventuellement des éléments qui font qu'il n'existe pas de solution (nombre de ponts, parité), de conjecturer l'impossibilité pour ce cas.

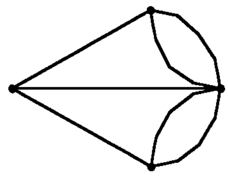
---

[3] Le scénario complet de l'expérimentation est présenté en annexe.

Stratégie 2. Graphe des régions

On appelle région toute étendue de terre sur laquelle on peut se déplacer sans devoir emprunter un pont (îles et berges). Dans ce problème, il n'y a que les régions et le nombre de ponts qui importent. En représentant la terre ferme par des points et les ponts par les lignes qui relient les points, nous obtenons le graphe suivant :





Le graphe est employé ici comme modèle. Mais la modélisation ne va pas de soi. Il n'est pas évident de représenter la terre ferme par des points et les ponts par des arêtes qui relient ces points. Représenter les ponts par des points peut sembler plus évident car le problème porte son intérêt sur les ponts et non pas sur les îles et les berges ; donc les ponts seraient les éléments sur lesquels se fixe l'attention.

Étant donné le graphe, le problème devient : est-il possible de le dessiner en partant d'un point et en revenant sur ce point en ne passant qu'une seule fois sur chaque trait et sans jamais lever le crayon ? De façon moins intuitive, plus formelle, le graphe possède-t-il une chaîne eulérienne ? [4]

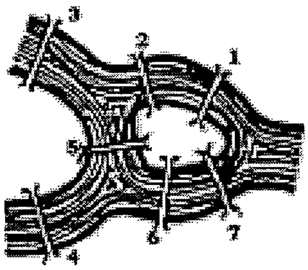
Les quatre sommets du graphe sont de degré impair [5] donc, d'après le théorème suivant, le graphe n'admet pas de chaîne eulérienne.

> Théorème : « Un graphe possède une chaîne eulérienne si et seulement s'il est connexe et si le nombre de sommets de degré impair est 0 ou 2. »

La promenade de Königsberg est infaisable. L'aboutissement de cette stratégie dépend de la disponibilité d'une propriété issue de la théorie des graphes.

Stratégie 3. Graphe des ponts

L la question se focalisant sur les ponts, on peut considérer ceux-ci comme centraux. Numérotons-les.

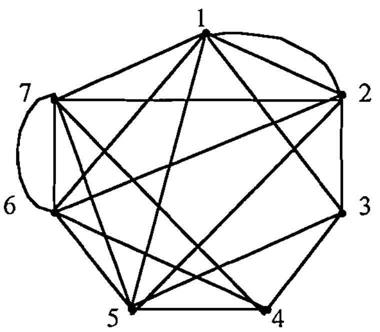


À partir de cette numérotation, on peut construire un graphe dont les sommets représentent les ponts et les arêtes le passage entre les régions (îles ou berges) que l'on différencie.

---

[4] Une chaîne eulérienne passe une fois et une seule par chaque arête.

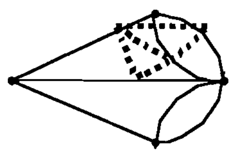
[5] Le degré d'un sommet (point) est le nombre de "traits" qui aboutissent à ce sommet : c'est donc le nombre d'arêtes auquel il appartient, à condition de compter deux fois les boucles.



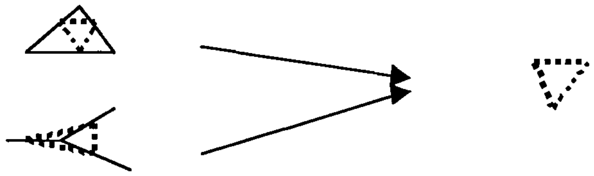
Les doubles arêtes sont là pour spécifier que le passage d'un pont à un autre peut se faire par deux régions différentes. Par exemple, entre les points 1 et 2, il existe deux façons de circuler.

Ce graphe ne permet pas de résoudre le problème. En effet, le chemin 2-5-3-4 est possible sur le graphe mais pas sur le dessin. Le graphe permet seulement d'induire *une condition nécessaire* : si ce n'est pas possible sur le graphe, cela ne l'est pas non plus sur le dessin.

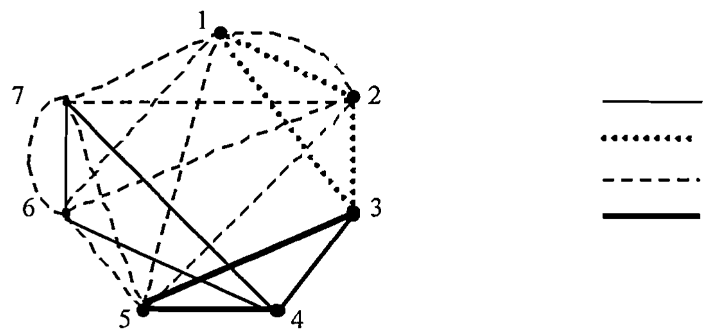
Remarquons que ce graphe s'obtient à partir de celui des régions : c'est son dual. On relie deux arêtes du graphe des régions, si elles ont un sommet en commun. Ébauchons le début de la construction du dual :



L'opération inverse qui consisterait à passer du graphe des ponts à celui des régions n'est pas possible. En effet, deux graphes peuvent avoir le même dual, mais on ne peut « remonter ».



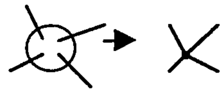
Différencions les arêtes pour différencier explicitement les régions.



On obtient alors une partition des arêtes en quatre « couleurs » (traits distinctifs). Chaque région correspond aux arêtes d'un graphe complet. Ce travail est en fait une modélisation de la situation.

Pour élaborer le chemin demandé, il faut changer de « couleur » d'arête à chaque sommet. Il faudrait donc un chemin qui n'emprunte pas deux arêtes successives de même

« couleur ». Ceci est une condition nécessaire et suffisante. Une telle promenade n'est donc pas réalisable.

N.B : il peut se produire une différence dans la représentation de ce graphe : 

5.2. Analyse comparée des stratégies

PARCOURS	REPRESENTATION	SOMMETS	ARETES
Parcours géographique (lié au relief)	Sur le schéma donné (1)	______	______
Chaîne eulérienne	Graphe des régions (2)	Régions (îles et berges)	Ponts
Chaîne hamiltonienne particulière [6]	Graphe des ponts (3)	Ponts	Il existe un chemin qui n'utilise pas d'autre pont pour aller de P1 à P2. [7] P1 •——• P2

En construisant le dual du graphe des régions, nous passons de la recherche d'une chaîne eulérienne à celle d'une chaîne hamiltonienne. En procédant ainsi, nous perdons de l'information.

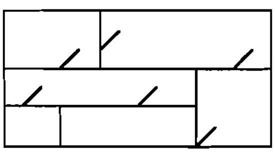
5.3. Caractéristiques de la situation

Le problème des ponts de Königsberg a été élaboré en faisant des choix. Ces caractéristiques ont pour but d'observer certaines réactions. Il est possible de les modifier pour en observer d'autres. Dans ce problème, *la promenade n'est pas possible*, mais un autre choix pourrait faire qu'elle soit faisable.

Le couple (r,p) où r est le nombre de régions et p celui des ponts est choisi de telle manière que les nombres r et p soient assez petits pour que des essais soient faisables.

Le cadre de l'énoncé. Le problème est posé par un dessin qui n'est pas modélisé par un modèle mathématique. Des difficultés peuvent être liées au dessin. Les berges sont floues. Une des îles est fermée et ne pose pas de problème. Ce qui n'est pas le cas de l'autre île. Peut alors se poser un problème de modélisation.

Il est également possible de proposer une autre situation concrète à la place de la ville de Königsberg. Un autre choix pourrait consister en un plan des pièces d'une maison et le problème serait de se déplacer dans la maison en ne passant qu'une seule fois par chaque pièce. Ce dernier peut sembler a priori plus simple car c'est déjà un schéma avec des segments.



[6] Une chaîne hamiltonienne passe une et une seule fois par chaque sommet.

[7] Il existe une région où ces deux ponts aboutissent.

5.4. Résultats de la situation des ponts : partie 1

Dans premier temps, nous avons proposé le problème des sept ponts de Königsberg, sans aucune indication, à des enseignants et futurs enseignants. Puis, dans une deuxième partie, nous leur avons soumis le graphe des régions et organisé un débat autour de lui. Mais étudions d'abord les stratégies qu'ils ont avancées pour résoudre le problème.

5.4.1. Stratégies avancées par des enseignants et futurs enseignants

Nous allons analyser certaines des stratégies proposées par les enseignants et futurs enseignants qui ont bien voulu se prêter au jeu.

Stratégie par essais

Quatre personnes sur le groupe de six sont entrées dans la situation par une stratégie par essais. Elle consiste à essayer de *tracer au crayon de telles promenades sur le dessin* (nous supposons que certains chemins sont produits mentalement). Pour deux de ces quatre personnes, ce n'est qu'une entrée en matière avant de se plonger dans d'autres stratégies. Pour d'autres enseignants, elle constitue l'unique stratégie.

La stratégie par essais en tant qu'entrée en matière, aboutit à deux choses : à une conjecture (la promenade n'est pas possible), et à une nécessité de faire autre chose pour la prouver. Elle leur permet de *se donner intuitivement une réponse* à l'exercice

> Hugo[8] : « [...] C'est après avoir essayé et après avoir, avoir trouvé une solution, quoi. C'est que... Moi je me suis dit bon c'est peut-être possible. J'ai fait quelques essais comme ça. J'en ai pas trouvé. J'ai commencé à faire un arbre. J'ai vu que bon les, les premiers cas que j'ai faits, j'y suis pas arrivé. J'ai vu que ça allait devenir rapidement... Donc je me suis dit bon, on va essayer de voir si, si il y a pas des éléments qui, qui font qu'il y a pas de solution. »

> Marc : « Y'a peut-être des solutions partant de I qui est au milieu alors qu'y a pas une solution possible. Je sais pas. On part de I qui est au milieu, on arrive à faire une seule fois chaque pont et ça marche. On se retrouve autre part. Et puis ensuite, y'a peut-être pas de solution si on part à l'Ouest. On n'en sait rien. Si on part à l'Ouest et qu'il y a pas de solution. »

Marc essaie donc quelques chemins en partant de chacune des zones. *Intuitivement, il pense qu'une telle promenade ne s'avère pas possible et ne peut pourtant pas être affirmatif.*

Claire et Mélanie quant à elles ne procèdent *que par des essais écrits* sur le dessin de la ville. Sur les quatre régions, Claire ne considère « en gros » que deux régions de départ : l'île aux cinq ponts et une des trois autres. Cela favorise une limitation du nombre de points de départ. Elle fait donc des essais de promenade en essayant d'anticiper d'éventuels blocages dus aux conditions de la promenade. *Sa conclusion est*

8 . Les noms de ces personnes sont fictifs.

qu'il existe de nombreux chemins où elle se trouve bloquée : et qu'une telle promenade n'existe pas.

Mélanie part de l'hypothèse que la promenade est possible, ce qui justifie selon elle, le choix de cette stratégie, à savoir trouver explicitement le chemin qui satisfait les contraintes du problème. Sur notre demande, elle garde un tracé de ses trajets dans la ville en changeant systématiquement de dessin. Vu le faible nombre de dessins, elle a sûrement réfléchi à chaque coup de crayon. Elle ne s'est pas promenée au hasard. D'ailleurs, son travail lui semble similaire à l'arbre élaboré par Hugo (que nous étudierons plus loin). Mélanie a utilisé sa mémoire pour le choix de ses trajets.

> « J'ai essayé de faire des essais mais... Je sais pas. Je sais pas. Donc en fait, je suis partie bêtement, enfin... ça revient en fait à ce qu'ils ont fait en arbre. C'est... Je suis partie d'une fois de l'île, une fois d'un côté, une fois de l'île où il y a les trois ponts. Et puis j'ai regardé les chemins que je pouvais faire. »

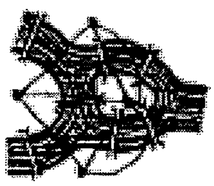
Elle ne se prononce pas quant à la conclusion qu'elle pourrait donner. Nous ne pouvons pas savoir, si d'après elle, son hypothèse s'avère vraie ou fausse.

Stratégie du tableau des liaisons

Nous avons rencontré une stratégie mettant en place *un tableau qui met en évidence les relations entre les ponts*. Marc code les ponts par les lettres allant de A à F. Puis il représente les relations ponts/régions dans un tableau. Ces relations sont symbolisées par des croix.

> « Le pont A peut aller en B et C par exemple. »

Son tableau est symétrique. Cependant, il oublie des croix et sa stratégie n'aboutit pas.



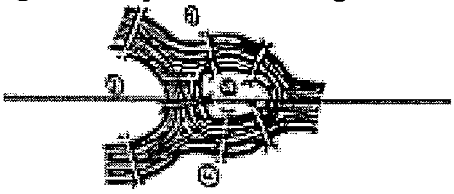
Stratégie de l'arbre des possibilités

Parmi les stratégies qui ont pour but de démontrer une conjecture (et non une explicitation du chemin convenable), celle qui a été le plus employée (par trois personnes) est celle qui consiste en la construction d'un arbre. L'idée conductrice est le repérage et le codage des régions. Cette stratégie est pour certains, la première qui vient à l'idée ; et pour d'autres, elle n'arrive qu'après s'être donnée une idée de la réponse. Intéressons-nous à Hugo pour qui elle est la stratégie initiale. Son premier réflexe est de *se donner une vision globale de la situation.*

Il recense les régions (4) et les ponts (7). Cependant, distinguant une symétrie dans le dessin de la ville, il en déduit que seules trois régions sont spécifiques et non quatre. Il numérote alors les régions de 1 à 4 mais ne se servira que des trois premières.

> Hugo : « Ouais. J'étais parti sur... Bon, il y a quatre endroits différents d'où l'on peut partir. Bon, j'ai remarqué qu'il y avait une symétrie sur le problème. Donc en fait, il n'y a que trois endroits différents. Donc je les ai numérotés 1, 2, 3. J'ai sept ponts. »

Pour marquer la symétrie, il montre une ligne (imaginaire) qui passe par les deux îles et telle qu'il y ait une berge de chaque côté de la ligne.



Il attribue des numéros aux régions pour donner des noms aux chemins qu'il emprunte. Puis Hugo nomme les ponts de telle façon que deux ponts « identiques », c'est-à-dire qui lui permette la même traversée, portent le même nom. *Il élabore ainsi un arbre dont les nœuds sont les trois régions et les arêtes, les ponts.*

> Hugo : « Que je parte de ce côté, d'en haut ou d'en bas, en fait c'est la même chose. Donc il y a sept ponts. Bon il y en a deux qui sont... qui mènent...enfin quand je pars de l'île vers la berge du haut et de l'île vers la berge du bas, c'est deux ponts qui sont identiques donc je les ai appelés pareil. Donc je les ai numérotés de 1 à 5, en fait. Donc j'ai P1, P1. J'ai deux fois le pont P1. P2, P3, P3, P4 et P5. Et donc j'étais parti... pour faire un arbre où je pars de 1 donc de la berge 1. Qu'est-ce que je peux faire quand je suis à la berge 1 ? Je peux aller à la berge 3 par le pont P2. Et puis je peux aller à la berge 2 par le pont P1. Et cetera, et cetera. [...] »

Son arbre est un *arbre de choix, orienté*. L'idée qui lui a fait choisir cette stratégie, est de *représenter toutes les possibilités*. Il s'aperçoit rapidement que l'arbre aura de nombreuses branches et que sa taille sera conséquente.

> Hugo : « [...] Il me faudrait le mur pour... pour représenter tous les cas possibles. Mais bon, on devrait pouvoir arriver comme ça à pouvoir faire le tour des possibilités. »

Hugo juge donc le nombre de cas trop important pour qu'une telle stratégie soit valable. Il se rabat donc sur des essais de chemins parcourus mentalement. Il opère donc un retour à une stratégie par essais, contrairement à d'autres qui ont usé de ces deux stratégies dans l'ordre inverse. Après réflexions, il pense qu'une telle promenade n'est pas faisable. Il ne sait pourtant pas pourquoi et ne peut pas donner d'explications.

> LB[9] : « Alors qu'est-ce que vous en pensez ? Est-ce que c'est possible de faire une promenade définie comme ça ? »
> Hugo : « Moi je pense que non mais... J'ai pas de raison... »

En conclusion, les stratégies développant un arbre sont très coûteuses en temps et en travail. Elles ne permettent pas de prouver la réponse, bien que celle-ci puisse être donnée intuitivement, sans preuve. La stratégie de l'arbre serait d'autant moins valable si la ville possédait des milliers de ponts.

Stratégie du « simili graphe »

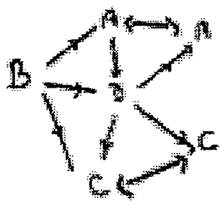
Par « *simili graphe* », nous entendons un schéma qui est *proche d'un graphe*. Il diffère d'un tel objet par sa représentation : les sommets ne sont pas des points

---

[9] LB mis pour Laure Balmand.

identiques les uns aux autres, mais sont nominatifs et non tous distincts. Ils portent des noms différents et un même sommet (même nom) apparaît plus d'une fois.

Florence fait partie de ces personnes qui se sont essayées à la stratégie de l'arbre de choix. Son arbre ne la menant à aucune conclusion, Florence essaie de « remodeler » cet arbre sous une autre forme, en conservant les mêmes éléments (régions et ponts). Elle garde toujours en tête l'objectif de découvrir une telle promenade ; ce qui lui servira de preuve pour la faisabilité. Dans son nouveau schéma, les sommets représentent les régions et sont matérialisés par des lettres. Les ponts sont modélisés par les arêtes. Les flèches indiquent dans quel(s) sens nous pouvons franchir le pont. Ce qui fait que ce « simili graphe » est *orienté*. Il simule des chemins, mais pas tous car les flèches ne sont pas toutes marquées.

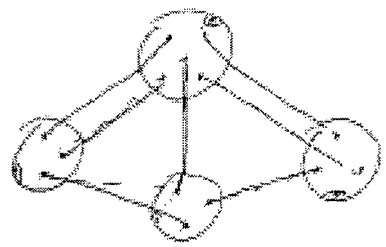


D'après Florence, le « simili graphe » est une traduction (non complète) du dessin de la ville plutôt qu'un moyen de trouver tous les cas possibles. Grâce à lui, elle voit qu'un même chemin peut passer plusieurs fois par la même région, ce qui le conduit à penser que sa stratégie manque de formalisation, qu'elle aurait dû également numéroter les ponts. Cette stratégie ne lui apporte pas non plus de solution au problème.

Méthode du graphe ensembliste

Un dernier type de stratégie utilisé est l'utilisation d'un graphe ensembliste. Nous sommes cette fois-ci en présence d'un graphe défini comme dans la théorie des graphes (voir paragraphe 1), bien que les sommets ne soient pas des points mais des patates.

Xavier élabore un schéma qui met en place quatre ensembles (des patates) représentant les quatre régions.



Les éléments de chacun des ensembles sont des points mis pour des « têtes de ponts » arrivant dans la région, chaque pont ayant deux extrémités. Même si ces patates sont explicitement nommées par des lettres, le graphe aurait été tout aussi compréhensible et lisible sans elles.

Puis Xavier essaie d'établir des relations entre chaque ensemble.

> « sortes de bijections de sous-ensemble de chaque ensemble qui sont au nombre de 4 »

Ces relations bijectives sont matérialisées par des traits : les ponts. Cette représentation est donc un graphe comme défini ci-dessus.

Contre toute attente de notre part, ce graphe ne permet à Xavier que d'illustrer la situation et il rencontre des problèmes pour « visionner », c'est-à-dire l'utiliser pour éluder le problème posé. Il décide donc d'élaborer un deuxième schéma plus simple pour lui, au sens où il ne présente pas de « patates ». Ce qui semble être les sommets sont les différentes régions de la ville (nommées par des lettres). Un double trait matérialise un pont ; ceci peut-être par imitation du dessin de la fiche 3. Cette deuxième représentation ne lui permet toutefois pas de proposer une preuve de sa conviction : il n'existe pas de solution.

5.4.2. Des constantes dans les stratégies

Certains points reviennent régulièrement dans les stratégies avancées, comme les différentes régions de la ville, sa symétrie et la volonté de chercher les promenades possibles.

Les régions.

Le découpage de la ville en quatre zones est un réflexe qui apparaît dans toutes les stratégies exceptées dans certaines stratégies qui procèdent par essais.

La symétrie.

Le fait que la ville soit symétrique par rapport à un axe qui scinde les deux îles par moitié, ne passe pas inaperçu, même si l'axe n'est parfois pas explicité.

Marc : « Ca paraît assez symétrique au Nord et au sud. En ce qui concerne l'île de l'ouest, ça n'a rien à voir. »

Le signalement de cette symétrie n'implique pas son utilisation pour certains. En effet, ce n'est pas forcément un élément pertinent.

La recherche de tous les trajets possibles.

Les stratégies du tableau et de l'arbre ont un objectif en commun : celui de rechercher tous les trajets possibles. La solution au problème posé serait alors déduite de l'observation de la liste obtenue. On recherche parmi tous les trajets ainsi mis en évidence, un trajet qui n'emploie qu'une seule fois chaque pont. Si aucun des trajets ne correspond à cela, la promenade n'est pas faisable. Si la promenade n'est pas faisable, il faut le démontrer. Sinon, il faut exhiber un contre-exemple : un chemin qui satisfait toutes les contraintes.

5.4.5. Des « innovations »

Lors d'un des deux débats menés sur ce problème, *deux réflexions dirigées vers le domaine numérique* ont émergé.

Relation entre le nombre de ponts et le nombre de régions

L'arbre est pour Hugo, un outil pour visualiser toutes les possibilités. La construction de cet arbre demande cependant beaucoup de temps.

> « Moi je suis...Une fois que j'ai vu que bon... qu'en fait avec l'arbre, on peut faire le tour de toutes les solutions. Bon ça nous prendra l'après-midi. [...] »

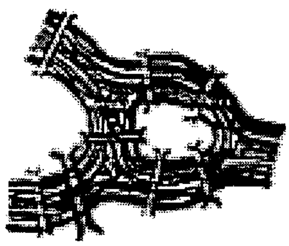
Il s'oriente alors vers un raisonnement qui prend en compte les *relations entre le nombre de ponts et le nombre de régions* : sont-ils multiples, l'un des deux est-il premier ?

> « [...] Je me suis posé la question, c'est... En fait on a cinq ponts, quatre berges, euh sept ponts et donc quatre, quatre endroits différents pour partir et, donc je, je me suis dit ben, quatre, quatre et sept c'est pas des nombres, enfin c'est des nombres qui, qui sont pas, qui sont pas multiples l'un de l'autre ou... Sept c'est un nombre premier donc je me suis dit peut-être y'a des rapports, il y a un rapport entre... [...] »

Hugo parvient donc à étudier la faisabilité de la promenade si un des deux nombres était modifié, et en particulier s'il rajoutait un pont.

> « [...] Et je me suis dit bon ben ess... Si je rajoute un pont, est-ce que, qu'est-ce que ça va faire ? Est-ce que ça va marcher ou... ? Je me suis dit peut-être y'a un rapport entre le nombre de ponts et le nombre d'endroits où il faut partir. »

Il rajoute le pont suivant :



Florence semble en accord avec l'hypothèse d'Hugo et pose la question de l'importance du point de départ.

> Florence : « Oui. Mais ça va peut-être marcher d'où que tu partes. Non ? »
> Hugo : Euh ? D'où que je parte, j'ai pas essayé mais c'est vrai que j'ai rajouté un pont ici et ça... ça a marché.
> Florence : J'ai l'impression que où que tu le mettes...
> [*Florence ne termine pas sa phrase car la parole lui est coupée.*]

Tous deux pensent alors qu'enlever un pont procurerait le même résultat mais n'en sont pas sûrs et ne sont pas en mesure de le prouver.

Un nombre impair de ponts partant de chaque région

Guidée par l'importance du nombre de points de départ, que Mélanie a mise en avant dans sa stratégie, elle remarque qu'*un nombre impair de ponts part de chaque région.*

> « Moi j'étais plus partie sur le nombre d'entrées en fait, qu'il y a sur... De chaque pont chaque fois c'est un nombre impair. Il y en a cinq sur l'île et trois sur les autres côtés. Je me suis dem... Enfin... Je sais pas. J'ai l'impression qu'à

chaque fois que l'on fait des aller-retour sur les ponts, enfin il y a quelque chose qui va coincer à ce niveau-là mais je sais pas l'expliquer par contre. »

Elle en arrive presque à faire la relation entre le degré impair des sommets et le fait que la promenade soit infaisable.

Ces deux idées « innovantes » par rapport aux autres débats et qui pouvaient mener à une démonstration de la solution (voir la résolution du problème paragraphe 5.1, ainsi que le paragraphe 5.5.4), n'ont pas abouti.

5.4.4. Conclusions tirées des résultats de la partie 1

La difficulté de ce problème n'est pas forcément de se donner une idée de la réponse mais bien de prouver la conjecture. Les stratégies mises en place par les enseignants, visent à exhiber un chemin qui répond aux attentes de la situation. Les enseignants se sont heurtés à cette difficulté de démontrer. La solution passe effectivement par un raisonnement sur le degré des sommets. Elle a été approchée sans être reconnue en tant que solution.

Cette difficulté est la cause des nombreux changements de stratégies opérées par les enseignants. Tous les participants ont changé au moins une fois de stratégie, les essais sur le dessin de la ville restant à la base de toutes les stratégies.

Pour obtenir une preuve de la conjecture, il était nécessaire de modéliser la situation. Des schémas ont été utilisés, notamment des arbres de choix et des graphes. La symbolisation des régions et parfois des ponts, a été très employée pour construire ces schémas. C'est un début de « modélisation ».

En anecdote, dans les différentes conceptions de la promenade, le point de départ n'est pas forcément le même que le point d'arrivée. Ce point de vue d'une promenade bouclée n'est pas évoqué.

5.5. Résultats de la situation des ponts : partie 2

Dans un deuxième temps, nous avons proposé aux enseignants (et futurs enseignants), le graphe des régions (celui associé à la stratégie « Graphe des régions »). Nous leur avons laissé la parole pour qu'ils livrent leurs impressions sur ce graphe. Nous attendions des remarques à plusieurs niveaux :

Les éléments du graphe sont-ils facilement identifiables aux éléments du dessin de la ville ? Le graphe illustre-t-il la situation ?
Permet-il de répondre au problème posé ?
Une démonstration est-elle nécessaire ? Le graphe « constitue-t-il une preuve » ?
À l'aide du graphe, peut-on formuler l'énoncé de manière différente ?
Quelles contraintes modifier en vue de rendre la promenade faisable ?

5.5.1. Les éléments du graphe

La reconnaissance des éléments du graphe ne pose apparemment aucun problème. Pour eux, les sommets du graphe représentent les quatre régions et les arêtes, les ponts.

La personne ayant proposé la méthode du graphe ensembliste, en vient à reconnaître sa stratégie, bien qu'elle soit moins formelle.

Xavier : « Moi j'en étais arrivé à ce dessin, en fait ! J'avais pas encore interprété le pourquoi. »
CP [10] : « En fait, c'est le premier dessin que vous aviez fait plutôt. »
Xavier : « Oui ! »
CP : « C'était plus près que… »
Xavier : « Mais enfin, dans mon esprit, ça revenait à ça. »

De même pour Florence qui a élaboré le simili-graphe :

Florence : « Oui. [*silence*] En fait, c'est exactement le schéma. Moi c'est que j'ai voulu essayer de représenter. Enfin… Je me suis dit que ça revenait au même. »

Le fait que le graphe possède des arêtes droites et des arêtes courbes n'a pas été évoqué. *Le graphe leur semble conforme à la situation. Il illustre la situation.*

5.5.2. Statut du graphe

Pour eux, le graphe représente non seulement la situation du dessin, mais permet de *clarifier et faciliter sa compréhension.* Il leur semble utile et suffisant de raisonner sur le graphe plutôt que sur le dessin de la ville. Les personnes interrogées n'ont pourtant pas corrigé ou confirmé la solution qu'elles avaient donnée intuitivement. Le graphe ne les a apparemment pas aidés sur ce point. Il ne paraît pas dans un premier temps, leur apporter la preuve de ce qu'elles ont avancé.

En particulier, le discours d'une des personnes (Marc) est *paradoxal* : pour lui, le graphe est une aide, mais il se reporte quand même au dessin de la fiche 3. Le graphe des régions semble être pour lui, une aide visuelle pour distinguer les éléments importants de la situation, mais ne lui permet pas de progresser dans la preuve de la solution. Le graphe ne constitue pas une preuve pour Marc. Il ne semble changer en rien sa méthode de résolution. *Le raisonnement qu'il effectue sur le graphe est identique aux essais faits au crayon sur le dessin de la ville.*

JR [11]: « Est-ce que c'est une aide ce dessin-là [*fiche 4*] par rapport à là [*celui de la fiche 3*] ? »
Marc : « Ben quand même ! »
[…]
CP : « Est-ce qu'il suffit de raisonner là-dessus ? »
Marc : « Moi je crois que oui… On a les zones et on a les ponts si on relie les zones. [*Silence.*] Maintenant, les essais que l'on refait sur la figure schématisée… reproduisent un peu ceux qu'on a essayés sur le plan ici ! Enfin ça paraît quand même plus décanté. »

5.5.3. Traduction de l'énoncé pour le graphe

Dans la suite de ce débat, nous leur demandons de reformuler l'énoncé : comment énoncer ce problème si nous donnions le graphe des régions à la place du dessin de la ville ? Une réponse possible est celle proposée au paragraphe 5.1 : *Est-il possible de le dessiner en partant d'un point et en revenant sur ce point en ne passant qu'une seule fois sur chaque trait et sans jamais lever le crayon ?*

[10] CP mis pour Charles Payan (co-directeur de mémoire).
[11] JR mis pour Julien Rolland.

Ou bien : le graphe possède-t-il une chaîne eulérienne ? (Cette deuxième possibilité demande des connaissances en théorie des graphes).

Une des rares personnes se prononce : Marc (il avait proposé le tableau des liaisons et un arbre des possibilités pour la résolution du problème). Il propose de relier les quatre sommets en n'empruntant qu'une et une seule fois chaque arête.

> Marc : « Je dirais, heu... relier... quatre points noirs en utilisant une seule fois chaque segment ou arc de cercle. Il y a sept segments ou arcs de cercle... comment ... en partant d'un point noir... passer... aux trois autres en utilisant une et une seule fois chacun des... petits segments, arcs de cercle. On mettrait des lettres ou des choses comme ça. Après, c'est pas possible... »

Toutefois, Florence (simili graphe) fait une proposition originale : il faudrait donner un crayon qui gomme les arêtes et demander s'il est possible d'effacer tous les traits sans lever le crayon.

> Florence : « Moi j'ai une idée. Si on part d'un point, n'importe lequel, euh... Est-ce que si par exemple on prend un crayon qui effacerait le trait, d'accord ? et qu'on passe d'un point à un autre, on puisse effacer tous les traits. Et tu peux passer d'un... d'un trait à l'autre qu'en effaçant, quoi. Si il y a rien, tu peux pas passer. »

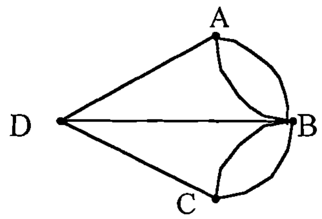
Elle matérialise le problème et parvient à proposer une des réponses que nous attendions.

Remarquons que cette consigne a été difficilement comprise. Le temps nécessaire pour l'explication de cette question, a été plus long que pour les autres questions. Modéliser la situation par un graphe semble aller de soi ; *transposer le problème sur le graphe pose plus de difficultés.*

5.5.4. Conditions de faisabilité de la promenade

Une autre de nos questions portait sur les éléments du graphe : quels éléments devraient être supprimés ou rajoutés pour qu'une promenade soumise à de telles contraintes devienne possible ?

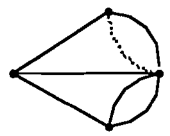
Rappelons le théorème énoncé au paragraphe 5.1 : « *Un graphe possède une chaîne eulérienne si et seulement s'il est connexe et si le nombre de sommets de degré impair est 0 ou 2.* » Un graphe est connexe si, pour toute paire de sommets distincts, il existe une chaîne reliant ces deux points. Ce qui est le cas du graphe des régions. Nommons par des lettres les sommets de ce graphe :



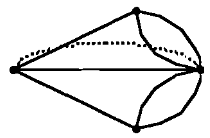
Sommet	Degré
A	**3**
B	**5**
C	**3**
D	**3**

Les quatre sommets étant tous de degré impair, il suffit de supprimer un seul pont entre deux sommets (n'importe lesquels) pour que le graphe ait deux sommets de degré impair. Le même résultat est aussi obtenu en rajoutant un seul pont (ou un nombre impair de ponts) entre deux sommets. Il existe d'autres solutions un peu plus complexes.

Ce point est traité spontanément dans un des deux groupes. Nous laisserons le lecteur se reporter au paragraphe 5.4.3. Dans le deuxième groupe, une fois la question explicitement posée, il est immédiatement clair pour une des personnes (Xavier), qu'il suffit d'enlever un pont. Il est capable de le montrer, mais ne paraît pas sûr de lui. Une autre (Marc) lui donne la confirmation en précisant que ce n'est pas la seule solution possible.

> Xavier : « Ca c'est simple : il suffit d'enlever un des deux ponts par exemple dans une des zones. »
> LB : « Où ça ? »
> Xavier : « Si je dis pas de bêtises, là. Celui-là c'est une possibilité. » [*Il montre le pont en pointillé.*]
>
> 
>
> Marc : « Y'a pas qu'une possibilité à ce moment-là. »
> Xavier : « Oui je crois qu'il n'y a pas qu'une possibilité. »

Xavier est alors en mesure de donner une justification. Peut-être que le fait d'avancer une raison, lui fait comprendre qu'il peut aussi rajouter un pont.

> Xavier : « Oui. Parce qu'on peut remplir.... C'est ça : on peut remplir complètement un côté avant d'attaquer l'autre. À ce moment-là, on n'est pas obligé de revenir.... De la même façon, j'étais en train de réfléchir : si on rajoutait un deuxième pont ici [*Il montre le trait en pointillé.*] [...] »
>
> 
>
> CP : « Un deuxième pont horizontal, là ? »
> Xavier : « Un deuxième pont horizontal, oui. Si je dis pas de bêtises... »
> CP : « Et c'est encore possible, vous dîtes ? Là ça devient possible ? »
> Xavier : « Je pense que ça devient possible. J'étais en train de vérifier justement. [*silence*] Oui, ça devient possible. »

Il leur reste à vérifier que cela est valable en partant de n'importe quelle région. Marc et Xavier ne trouveront pas la réponse. Nous la leur donnerons.

Dans le premier comme dans le deuxième groupe, rendre la promenade faisable en enlevant ou en ajoutant un pont ne pose pas de difficulté apparente. Remarquons que cela leur est possible car la vérification est immédiate vu le petit nombre de régions et de ponts de la ville. Qu'en serait-il avec une vingtaine de régions et une centaine de ponts ? Ces deux groupes approchent la théorie, sans l'atteindre. Peut-être est-ce *le problème de la preuve* qui les arrêtent ? S'ils arrivaient à prouver qu'effectivement, en rajoutant un pont, cela influait sur le degré des sommets et donc sur la promenade, alors ils seraient capables de généraliser. C'est-à-dire de prendre du recul par rapport à cette situation précise et d'énoncer le théorème précédent cité. *Ce point sur les conditions de faisabilité de la promenade est important.* En effet, si l'intuition nous permet de supputer que la promenade est irréalisable, *s'interroger sur les conditions qui la rendent possible, aide à l'élaboration de la preuve de non-faisabilité.*

Notons également que le premier groupe a évoqué une condition pour rendre la promenade faisable sans que nous les y incitions, contrairement au deuxième groupe. Le graphe des régions ne paraît donc pas nécessaire à une telle démarche.

5.5.5. Conclusions tirées des résultats de la partie 2

La reconnaissance des éléments du graphe est évidente (peut-être à cause de la simplicité du plan de la ville ?). *Le graphe permet de modéliser la situation*, mais les personnes interrogées éprouvent des difficultés à reformuler l'énoncé pour que celui-ci soit parfaitement et uniquement adapté au graphe des régions.

Ce graphe ne leur offre pas la possibilité de se convaincre de leur conjecture (dans un premier temps) et encore moins de la démontrer. La conviction de l'infaisabilité n'est pas évidente puisqu'ils n'arrivent pas à la prouver. Cependant, ils parviennent à modifier la situation en agissant sur le nombre de ponts, pour la rendre faisable (spontanément ou non). Cela leur apporte alors un élément supplémentaire pour penser que la promenade n'est pas faisable, sans pouvoir le prouver (ils n'énoncent pas de « règle » générale qu'ils puissent appliquer à cette situation). Le fait que la formulation du problème adaptée au graphe ne soit pas facile pour eux, montre bien cette *difficulté à transposer le problème sur le graphe et à utiliser le graphe pour une démarche de preuve.*

6. Synthèse

Dans cette expérimentation, nous nous sommes intéressés *au regard que pourraient porter des professeurs (et des étudiants) sur un objet pour lequel ils n'ont pas reçu de présentation mathématique.* Bien entendu, la synthèse suivante tient compte des informations obtenues lors de l'étude de la deuxième situation mise en place et du questionnaire proposé.

Quel est le rapport personnel d'enseignants et futurs enseignants, à l'objet graphe ou à l'objet arbre ? *Le rapport institutionnel au graphe des personnes interrogées est quasiment vide.* Le seul graphe qu'ils ont rencontré dans le cadre de l'institution est l'arbre. Ils ne considèrent pourtant pas l'arbre comme un graphe. En effet, un résultat important qui a été obtenu à partir de l'analyse des réponses au questionnaire est qu'il existe chez les personnes interrogées, *une dichotomie entre l'arbre et le graphe.* Les deux objets sont dissociés. Notamment, le graphe présente un caractère continu et l'arbre, un caractère discret.

Les personnes ayant répondu au questionnaire, ont eu des difficultés à donner une définition du graphe. Les quelques approches le montrent comme *un objet éloigné de celui de la théorie.*

Quant à l'arbre, il est implicitement orienté, il a un nombre "fini" de branches. Sa définition et ses propriétés leur sont inconnues. Pourtant, l'arbre est un outil "naturel" : les personnes interrogées peuvent dire où il vit et dans quelles situations. Il est un outil de représentation et de résolution, utilisable dans *des domaines restreints* qui sont proposés par les manuels scolaires (combinatoire, dénombrement, probabilités).

Les rapports individuels au graphe sont très divers. Dans la situation des ponts, le graphe est bien accueilli comme représentation schématique de la situation, même si *sa construction n'est pas spontanée* dans la majeure partie des cas. *Son utilisation comme outil de résolution n'est toutefois pas évidente.* Les réflexions théoriques sur le graphe ne sont apparues que très tardivement lors des débats de la deuxième parie de l'expérimentation. Elles n'ont pas débouché (dans le temps imparti) sur une preuve de la conjecture. Ces difficultés s'expliquent par le fait qu'une personne ne possède aucun moyen de contrôle, tant au niveau de la représentation que de la résolution lorsque le rapport situation-problème/graphe n'est pas évident.

Bibliographie

BERGE.C (1970) *Graphes et hypergraphes.* Dunod Université.

BOUVIER.A, GEORGE.M, LE LIONNAIS.F (1979) *Dictionnaire des mathématiques.*

BOURDAIS.M, DELORD.R, VINRICH.V (1996). Cinq sur Cinq Mathématiques sixième, éd. Hachette.

BOURDAIS.M, DELORD.R, VINRICH.V (1997). Cinq sur Cinq Mathématiques cinquième, éd. Hachette.

BARUSSAUD. C et Al. (1991). Baccalauréat Professionnel Industriel

Mathématiques première et terminale, éd. Foucher.

GRENIER.D, PAYAN.C (1998) Spécificités de la preuve et de la modélisation en mathématiques discrètes. *Recherche en Didactique des Mathématiques*, vol 18 (à paraître).

ANNEXE. MÉTHODOLOGIE ET SCÉNARIO DE L'EXPÉRIMENTATION

MÉTHODOLOGIE

Deux parties composent l'expérimentation : résolution de problèmes et questionnaire.

1h30				30 min
Phase individuelle	**Phase collective**	**Phase individuelle**	**Phase collective**	**Phase individuelle**

Situation 1 **Situation 2** **Questionnaire**

Les deux situations-problèmes ont été proposées à deux groupes de trois personnes : le 27 avril 1998 avec des professeurs de mathématiques du *lycée technique* Ferdinand Buisson, Voiron (Marc, Xavier et Claire), et le 30 avril 1998 avec des *étudiants PLC2* (Florence, Hugo et Mélanie). Le questionnaire leur a été posé à la suite des situations ainsi qu'à quatre autres personnes.

Pour répondre au questionnaire, nous avons choisi des personnes (9) ayant un certain niveau en mathématiques. Nous avons inclus parmi celles-ci un étudiant en informatique, une des filières utilisant le graphe. Quant au choix des enseignants à qui nous avons proposé de résoudre des problèmes, il est dû au fait que les manuels des filières techniques semblent être les seuls à présenter le graphe en tant qu'objet. Nous supposions qu'ainsi les enseignants en poste dans le technique réagiraient différemment des futurs professeurs, qui eux, utiliseraient plutôt le graphe en tant qu'outil.

Le corpus des données expérimentales est composé :

- des productions individuelles
- des protocoles du déroulement des phases collectives (enregistrement et prise de notes)
- des questionnaires.

SCÉNARIO

1. Situation du chantier

La première situation est inspirée d'un problème extrait d'un manuel québécois. Ceci sera précisé sur la fiche distribuée aux sujets de l'expérimentation pour donner une position institutionnelle au problème.

1.1. Phase 1, individuelle

Voici un problème extrait d'un manuel québécois. C'est un problème type que l'on retrouve dans des manuels de première et terminale de Baccalauréat professionnel industriel.

« Imaginez que vous êtes un entrepreneur en construction domiciliaire. Vous venez de vous engager par contrat à construire une résidence.

Il vous faut planifier le projet suivant pour éliminer le plus possible la perte de temps et mobiliser aux moments opportuns les différentes équipes spécialisées qui travailleront à ce projet.

Voici la liste des travaux à effectuer, leur temps d'élaboration et les étapes précédentes nécessaires :

I. Étapes	*Temps requis (en jours)*	*Étape précédente immédiate*
A. Début	0	Aucun
B. Travaux de fondations	6	A
C. Erection de la charpente	3	B
D. Drainage souterrain et conduits d'égouts	4	B
E. Toit et pose des gouttières	2	C
F. Plomberie du sous-sol	2	B
G. Installation du système de chauffage	2	C-F
H. Plomberie de l'étage principal	4	E-F
I. Travaux préliminaires d'électricité	4	C
J. Finition des murs et des plafonds	4	I-H
K. Pose des portes	4	J
L. Peinture de l'intérieur	3	K
M. Finitions des travaux d'électricité	2	L
N. Finition de l'intérieur	5	L
O. Finition de l'extérieur	3	D
P. Terrassement	1	O
Q. Fin	0	M-N-P

Quel est le temps le plus court pour que les propriétaires puissent occuper les lieux ? »

Décrivez précisément une ou plusieurs stratégies qui vous semblent permettre de résoudre ce problème.

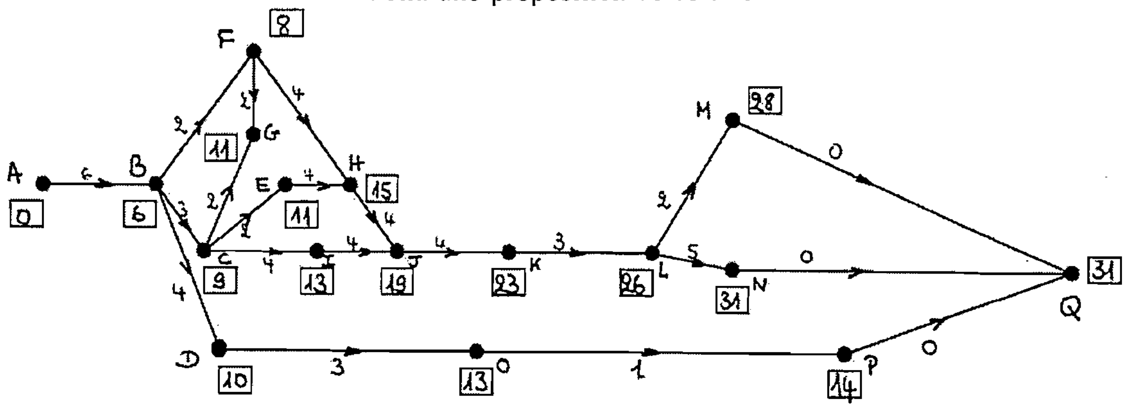
Ce premier travail est *individuel*, sans communication entre les protagonistes.

1.2. Phase 2, collective

Dans un premier temps, nous mettons en place *une table ronde* pour que les participants exposent les stratégies utilisées.

Dans un deuxième temps, *nous proposons un graphe orienté et valué* qui modélise la situation et répond à la question posée.

Voilà une proposition de solution



Les propriétaires pourront s'installer au bout de 31 jours.

La solution proposée est-elle juste ou fausse ? Justifiez.
Si la solution est juste, la trouvez-vous suffisante ? La trouvez-vous convaincante ?

Un *débat* est mis en place entre les protagonistes. Il sera libre.

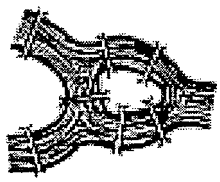
2. Situation des ponts de Königsberg

La deuxième situation, l'exemple des ponts de Königsberg, est relativement connue, et présente un problème où la modélisation ne va pas de soi car les objets changent de statut.

2.1. Phase 1, individuelle

Voici un problème que l'on peut trouver dans les manuels du secondaire (français, hongrois, québécois).

La ville de Königsberg s'élevait sur les rives et les îles du fleuve Pregel. Ses ponts du XVIII^{e} siècle étaient disposés comme le montre le dessin ci-dessous.



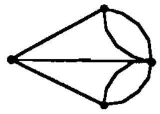
Est-il possible pour un individu de se promener dans la ville en passant une fois et une seule sur chacun de ces ponts ?
Résoudre le problème. Décrivez précisément votre solution.

Dans cette première phase, un *travail individuel* est demandé pour résoudre et expliquer la situation.

2.2. Phase 2, collective

Comme pour la situation du chantier, une *table ronde* est mise en place dans un premier temps. Puis, *nous présentons un graphe* modélisant la situation car nous faisons l'hypothèse qu'il ne sortira pas. Nous proposons également la réponse et demandons de la prouver.

Le schéma suivant permet de montrer qu'une telle promenade n'est pas possible.



Prouvez-le.

Cette phase se présente sous la forme d'*un débat* libre.

3. Le questionnaire

Il se présente sous forme de petites questions portant sur l'objet graphe.

On voit apparaître de manière occasionnelle, dans les manuels scolaires de mathématiques de collège et lycée, des arbres et des graphes comme outil de résolution de problème.

Comment définiriez-vous un graphe ?
Comment définiriez-vous un arbre ?
Donnez un ou deux exemples de graphe, un ou deux exemples d'arbre.
Connaissez-vous des propriétés mathématiques de l'arbre ? Si oui, écrivez-les.
Dans quelles situations utiliseriez-vous un arbre ?

Sur la feuille distribuée, de la place est laissée pour répondre à chacune des questions. Ce travail doit être *individuel.*