

L'ENSEIGNEMENT DE LA GEOMETRIE AU DEBUT DU COLLEGE

Comment concevoir le passage de la géométrie du constat à la géométrie déductive ?

René BERTHELOT et Marie-Hélène SALIN
IUFM d'Aquitaine
et Laboratoire DAEST Université Bordeaux 2

Résumé. Cet article comporte 3 parties : la première présente les 2 fonctions de l'enseignement de la géométrie au collège en les illustrant par une situation proto-typique associée à chacune, la deuxième pose le problème de l'immersion des apprentissages géométriques dans celui des apprentissages spatiaux, la troisième s'appuie sur les résultats présentés antérieurement pour exposer une analyse critique des démarches actuelles utilisées au collège. Nous concluons par une proposition en rupture avec ces dernières.

1. Introduction

En 1957, les rédacteurs des Instructions officielles pour la classe de seconde avaient le projet de reprendre à leur compte cette citation du mathématicien Fréchet (1955).

À mon avis, il est essentiel :

- 1) de dire aux élèves très nettement que ce qu'on appelle droite, angle dans la pratique n'a pas les propriétés rigoureuses qu'on leur attribue dans la théorie;
- 2) de faire vérifier expérimentalement sur un ou deux exemples que les relations rigoureuses entre certains éléments de la théorie ne sont pas vérifiées rigoureusement par les objets concrets correspondants;
- 3) de constater cependant qu'elles le sont approximativement;
- 4) d'affirmer que, quelle que soit la précision des mesures entreprises, elles n'ont jamais conduit dans le passé à des approximations inadmissibles (...). Les axiomes de la géométrie gardent un sens indépendant de l'interprétation concrète qu'on leur donne mais ils dépendent de l'expérience en ce sens que c'est l'expérience qui a conduit leur choix et qui, ensuite, l'a justifié.

Ma conclusion est donc qu'il faut cesser d'enseigner une géométrie qu'on ne s'est pas donné le droit d'appliquer à la réalité. La géométrie qu'on enseigne est une géométrie tronquée, parce que réduite à sa partie axiomatique. Il faut, sans y consacrer longtemps, prononcer les mots nécessaires pour que les élèves aient entre les mains une géométrie applicable, une géométrie totale.

Ce texte de Fréchet nous place au cœur des questions, toujours actuelles, posées par l'enseignement de la géométrie en particulier dans la scolarité obligatoire :

- quel est son objectif, la maîtrise de l'espace sensible, que revendique Fréchet en parlant de « géométrie applicable » ou seulement celle de l'espace géométrique, qu'il qualifie de partie « tronquée » de la « géométrie totale » ?

- comment concevoir et articuler les situations d'enseignement permettant aux élèves de comprendre le double enjeu de ce domaine des mathématiques, si décrié puis de nouveau au cœur des préoccupations des professeurs, si l'on se fie au nombre d'articles parus dans la revue des IREM, *Repères*, depuis sa création ?

Le cadre théorique dans lequel nous avons abordé ces questions dans notre thèse est celui de la théorie des situations¹. Elle nous a fourni une méthodologie d'analyse des situations d'enseignement que nous avons appliquée à l'enseignement de la géométrie à l'école primaire et au début du collège. Notre étude concernait les obstacles que rencontre l'enseignement, elle visait à identifier la part qui revient aux situations d'enseignement elles-mêmes et celle qui revient aux sujets (élèves et enseignants) et à leurs relations avec le savoir. Ce travail nous a permis de proposer une nouvelle interprétation des difficultés rencontrées par l'enseignement et de proposer en conséquence quelques pistes pour des solutions, pistes que nous avons commencé de développer depuis².

Cet article a pour objectif de présenter aux lecteurs de *petit x* les résultats de nos analyses qui concernent plus directement le collège³, en particulier l'entrée dans la géométrie déductive. Un deuxième article sera consacré à la présentation des perspectives dans lesquelles nous travaillons actuellement.

2. Partie I

2.1. Les fonctions de l'enseignement de la géométrie au collège, selon les instructions officielles

La lecture des instructions du collège de 1996 montre que les objectifs de l'enseignement de la géométrie dans la scolarité obligatoire peuvent être rattachés aux deux grandes fonctions de la géométrie évoquées par Fréchet :

- la modélisation de l'espace sensible :

¹ Le travail a été initié par Brousseau (1983)

² Nous nous inscrivons aussi dans la perspective dessinée par nos collègues Chevallard et Jullien (1990) et Mercier et Tonnelle (1991) auxquels nous devons beaucoup

³ Quoique plusieurs auteurs d'articles de *petit x* s'y soient référés, ces résultats n'ont jamais fait l'objet de présentation synthétique pour les professeurs de collège.

passer de l'identification perceptive (...) de figures et de configurations à leurs caractérisation par des propriétés
 être familiarisé avec les représentations de l'espace, de l'application des conventions usuelles (lignes cachées, perspective) aux traitements permis par les représentations ; ...

- la résolution de problèmes de géométrie, c'est-à-dire de problèmes concernant un espace conceptualisé, en s'appuyant sur les règles du débat mathématique :

prendre contact avec des théorèmes et apprendre à les utiliser.

Mais pas plus dans les Instructions Officielles de 1995 et 1997 que dans celles de 1987 ne sont différenciées des familles de problèmes correspondant à chacune de ces fonctions, à partir desquels peuvent se définir les situations d'enseignement adéquates et les types de rapports à l'espace qu'elles nécessitent.

Nous allons donc commencer par présenter deux situations proto-typiques des situations d'initiation à ces fonctions, étudier certaines de leurs caractéristiques didactiques, et ce qu'elles supposent comme connaissances préalables des élèves. Nous nous appuierons ensuite sur les résultats de cette analyse pour proposer des explications aux difficultés rencontrées par les professeurs dans l'enseignement de la géométrie au début du collège.

2.2. Deux situations proto-typiques de chacune de ces fonctions

2.2.1. Le passage de l'espace sensible à l'espace géométrique : l'initiation à la géométrie déductive

Les problèmes correspondant à l'initiation à la démonstration en géométrie, jusqu'à la fin du collège, peuvent être repérés comme des problèmes simples de géométrie euclidienne. Le premier obstacle sur lequel bute l'enseignement est celui de l'introduction « didactique » de la nécessité de *démontrer des déclarations* dont la production est la conséquence de *rapports avec des figures tracées sur la feuille*⁴.

Dans quelle situation placer les élèves pour que non seulement ils acceptent que les règles du jeu ne soient pas les mêmes mais surtout pour qu'ils comprennent la *nécessité* de produire des déclarations logiquement articulées ?

a. La situation des médiatrices⁵ : le jeu avec le contrat didactique

Brousseau (1983) a proposé à cet effet, il y a déjà longtemps, le contexte de la construction des médiatrices d'un triangle assez grand, dont un angle est obtus et supérieur à 150°. La difficulté à réaliser des tracés suffisamment précis fait que ces trois droites semblent se comporter comme trois droites ordinaires et constituer un nouveau triangle de petite taille, A'B'C'. La question du professeur qui prend acte de ce triangle et

⁴ Depuis toujours, ce passage d'un espace à l'autre est source de grandes difficultés, tant pour les élèves que pour les enseignants : ainsi Berdonneau (1981) présente de manière détaillée les solutions utilisées successivement depuis le début du siècle par des auteurs de manuels pour tenter de résoudre ce problème. Elle conclut son étude ainsi : « De tous ces exposés se dégage un sentiment de malaise, malaise que semblaient ressentir les auteurs face à la connaissance qu'ils étaient chargés de transmettre ».

⁵ Pour une analyse détaillée, voir Berthelot et Salin (1992) ch B7.

implicitement en admet l'existence est alors : peut-on construire un triangle ABC pour que A'B'C', triangle d'intersection des médiatrices soit « nettement plus grand » ? (annexe 1)

Toute tentative de résoudre le problème par des tracés échoue, contrairement à une attente raisonnable, si on se place du point de vue des élèves.

Dans la mise en scène proposée par Brousseau et mise en oeuvre par des collègues de l'IREM de Bordeaux⁶, il y a succession de plusieurs situations :

- une situation a-didactique⁷ d'action sur le milieu spatial de la feuille de papier : la recherche de tracés de figures adaptées.

- une phase de conclusion, où s'exprime l'impossibilité de trouver une solution au problème posé.

b. Le passage de la situation d'action sur l'espace sensible au débat géométrique

Cette phase pourrait se conclure sur le constat d'impossibilité de l'agrandissement demandé et sur celui de la proximité des trois points, car il n'y a aucune raison spatiale de remettre en question l'existence de trois points d'intersection pour les trois droites. Mais la demande de l'enseignant est si forte que naît l'hypothèse : il doit bien y avoir une raison pour qu'on n'arrive pas à agrandir le triangle. Un débat peut alors s'enclencher au cours duquel les tenants de cette hypothèse cherchent à trouver cette raison ; ce débat s'articule autour des propriétés des médiatrices comme ensembles de points équidistants de deux points donnés.

Remarquons que la question du « pourquoi » est d'autant plus facile et naturelle que la situation aura mis en scène une frustration importante au niveau de la réalité.

Le travail de l'enseignant qui veut introduire le jeu mathématique de la géométrie va donc consister à déplacer le thème du débat, pour qu'il passe du milieu spatial local à la compatibilité logique entre concepts spatiaux mis en oeuvre et leurs propriétés : les notions de points, de droites, de médiatrices, etc. C'est à partir de cette expérience, qui devra peut-être être répétée sur d'autres exemples, que l'enseignant peut expliquer la différence entre constater et démontrer.

Ainsi, l'initiation à la géométrie déductive, si elle s'appuie bien sur des phénomènes qui se passent dans le milieu spatial doit faire apparaître la rupture entre les deux démarches : celle qui s'appuie sur des constats perceptifs et celle qui s'appuie sur un raisonnement à partir des propriétés des figures, mais cette dernière ne vient pas remplacer la première de manière arbitraire. Elle est nécessaire parce qu'elle apporte plus que la première : elle permet de comprendre un phénomène inattendu. Et remarquons, dans le cas exposé, que le professeur peut « théâtraliser » le phénomène parce que, comme le dit Fréchet,

⁶ voir Berté (1995) Réflexions sur inégalité triangulaire et distance d'un point à une droite à partir d'observations de classes, *petit x*, n° 40.

⁷ le terme de situation a-didactique désigne toute situation (finalisée par un résultat) qui d'une part ne peut être maîtrisée de façon convenable sans la mise en oeuvre des connaissances ou du savoir visés et qui d'autre part sanctionne, pour l'élève, les décisions qu'il prend (bonnes ou mauvaises), sans intervention du maître relativement au savoir à mettre en oeuvre.

les relations rigoureuses entre certains éléments de la théorie ne sont pas vérifiées rigoureusement par les objets concrets correspondants.

c. Le rôle des connaissances spatiales dans ce passage

La recherche d'explications s'appuie donc sur la connaissance effective par les élèves des phénomènes qui se passent dans le milieu spatial : s'ils les ignoraient totalement, tout serait contingent et la recherche d'une explication ne se poserait pas.

La situation de la médiatrice illustre bien que des connaissances spatiales sont nécessaires avant l'instauration d'un rapport au savoir de la géométrie mathématique. Ce sont ces connaissances qui permettent de donner un sens à la question de base : « agrandir le triangle formé par les trois médiatrices ». Elles sont repérables dans le comportement des élèves à la capacité qu'ils ont à élaborer des stratégies qui sont des stratégies d'action sur l'espace sensible. Il faut qu'ils prennent en charge la détermination de relations pouvant exister entre des décisions concernant la forme et la taille des éléments du triangle initial et celles du triangle des médiatrices.

Ce sont ces connaissances dont l'acquisition est visée par les programmes de géométrie à l'école primaire et au début du collège. Nous les avons appelées spatio-géométriques pour rappeler qu'elles sont issues de rapports à l'espace sensible. Dans l'article cité, Berté (1995) montre aussi à quel point elles sont nécessaires pour pouvoir mener à terme, par exemple, les débats concernant l'existence d'un cercle passant par 3 points ou celui sur le triangle plat.

2.2.2. Initier à la géométrie comme modèle d'action⁸ sur l'espace

a. La métaphore du charpentier

Peut-on concevoir une situation fondamentale, c'est-à-dire capable de générer toute une famille de situations d'enseignement pour l'élaboration de ce type de connaissances ?

Brousseau a proposé *une situation fondamentale pour la géométrie élémentaire en tant que modèle de l'espace*⁹ qu'il a illustrée par :

la situation du charpentier qui doit préparer et tailler au sol des bois qui devront s'ajuster exactement dans l'espace à dix mètres du sol.

Il explique, dans la suite de son texte,

- comment on peut engendrer des situations a-didactiques visant l'élaboration des connaissances de géométrie enseignées à l'école obligatoire en faisant varier telle ou telle composante du problème du charpentier et il cite quelques exemples : détermination, communication, réalisation par tracés, des formes et des dimensions de solides, déplacement de solides, etc..

- comment on peut développer les différentes formes de ces connaissances, du modèle implicite à la preuve, en limitant les rapports de l'élève à l'information et/ou à l'action.

⁸ L'action est ici prise au sens le plus général de la théorie des situations, c'est-à-dire comme maîtrise des interactions avec le milieu objectif spatial. Cette maîtrise nécessite des formulations et des preuves locales.

⁹ Voir Berthelot et Salin (1992), pp.459-465

Un certain nombre d'ingénieries ont été élaborées et expérimentées suivant ce schéma. Nous avons en particulier mis au point, pour des élèves de cours moyen, un processus d'enseignement des angles, décrit dans *Grand N* n° 56, dont l'élément central est une situation de communication.

b. Un exemple de processus didactique construit sur ce modèle

Le milieu matériel est constitué de pièces découpées dans du carton, de forme polygonale, convexes ou non, dont les mesures des angles sont des multiples de 30 degrés ; elles sont conçues de telle manière qu'il existe au moins une solution au problème posé par leur assemblage, en utilisant la règle suivante : Deux côtés de la n ème pièce à poser doivent toucher 2 côtés du polygone formé avec les $n-1$ pièces déjà posées (annexe 2).

- *Le jeu du géométriscrabble*

Un jeu de n pièces polygonales est commun à p joueurs. Deux des pièces sont posées sur la table, et deux de leurs côtés ont une partie accolée, suivant une configuration déterminée à l'avance ; les autres pièces sont distribuées aux joueurs. À tour de rôle, chacun se procure une pièce de son lot et peut la poser si elle s'accôle, sans chevauchement, *le long de deux de ses côtés, à deux côtés* du polygone formé par les pièces déjà assemblées. Sinon le tour passe au joueur suivant. Le premier qui s'est débarrassé de ses pièces a gagné.

Les contraintes d'assemblage pièce-emplacement constituent une variable didactique prenant des valeurs différentes au cours de jeux successifs que réalisent les élèves :

- * *pas de contraintes*

Chaque joueur tirant au hasard une pièce, il essaie de l'encastrier convenablement par essais-erreurs. Dans ces conditions, la réussite finale est liée à la qualité de l'exploration ; les joueurs doivent seulement être capables de déterminer *si une pièce s'encastre bien ou non sur l'un de ses angles* et sinon d'organiser de manière efficace, plus ou moins systématique, une recherche des emplacements ou des autres angles de la pièce possibles. La comparaison des angles est prise en charge par le matériel, elle n'a pas à être anticipée.

- * *avec anticipation*

Chaque joueur tire une pièce au hasard et doit prévoir à voix haute quelle partie de la pièce il va pouvoir encastrier et à quel endroit du puzzle elle se place. L'anticipation porte donc sur la reconnaissance par comparaison visuelle à distance d'une proximité de valeur entre un angle de la pièce polygonale et un angle extérieur du polygone constitué par l'assemblage.

- * *par communication graphique*

Ceci est réalisé lorsque le stock des pièces n'est plus à la disposition du joueur **E** (Émetteur) qui va les placer, mais d'un autre **R** (Récepteur). **E** (qui ne connaît pas les formes et dimensions précises des pièces du stock) doit donc fournir à **R** une information lui permettant de trouver une pièce convenable. Pour cela il dispose d'un

crayon et d'une feuille de papier, et peut avoir recours à tout instrument qui lui paraît nécessaire.

Que peut alors faire **E** ? La solution la plus économique consiste à reproduire, sur la feuille, par superposition, un angle extérieur du polygone déjà formé en demandant au marchand de lui fournir une pièce ayant une partie se superposant à cet angle. Cette solution suppose que **E** et **R** soient capables de donner du sens à cette figure nouvelle, constituée de 2 segments ayant une extrémité commune, c'est-à-dire de concevoir qu'elle permet de représenter la propriété que doit posséder la pièce nécessaire à la poursuite du puzzle.

Ainsi, le concept d'angle de secteur, mis en œuvre d'abord de manière implicite, est ensuite construit par les élèves comme moyen de résoudre le problème de communication qui leur est posé, puis institutionnalisé et décontextualisé au cours d'exercices divers.

La particularité de ce processus est de donner un statut différent aux objets matériels sur lesquels porte l'activité (les polygones de carton) et au modèle, constitué, à ce moment d'élaboration, de dessins d'angles.

La mise à l'épreuve de la validité du modèle permet d'introduire les élèves au domaine des approximations, essentiel mais rejeté de l'enseignement actuel des mathématiques : le message d'un émetteur peut être « conceptuellement » bon mais conduire à l'échec pour choisir la pièce qu'il a voulu désigner, si les côtés de l'angle reproduits sur sa feuille sont très courts.

Enfin, les problèmes effectifs de communication de figures nécessitant des mesures réalisées à l'aide d'un rapporteur rond introduisent les élèves à la nécessité pratique d'agir sur ces angles en articulant la recherche de la position d'un sommet avec celle de la position d'un côté puis de l'autre. L'angle est ainsi présenté au niveau de l'action comme déterminant la position relative de deux objets graphiques que l'on peut associer à des demi-droites.

2.3. Conclusion

L'enseignement de la géométrie dans la scolarité obligatoire nécessite l'organisation de deux problématiques associées à des rapports à l'espace très différents, que nous avons proposé d'identifier comme suit.

2.3.1. Problématique géométrique

Nous désignons par *problématique de la géométrie* les problèmes qui font spécifiquement appel aux connaissances permettant de maîtriser les questions de consistance théorique du discours sur l'espace, questions qui caractérisent l'émergence historique d'une géométrie de la démonstration chez les grecs.

2.3.2. Problématique de modélisation

Nous avons désigné par *problématique de modélisation* un type de rapport avec l'espace, finalisé en partie par l'efficacité dans l'espace sensible ou objectif, mais aussi par la recherche d'une solution dépassant le problème immédiat, qui soit communicable à d'autres, s'appuyant sur un modèle explicite dont la fonction doit pouvoir être éprouvée.

Nous nommons *spatio-géométrie* la modélisation de l'espace par des connaissances issues du savoir géométrique. Cette modélisation d'un espace s'accompagne la plupart du temps de représentations de cet espace dans l'espace d'une feuille de papier, représentations qui conservent une partie plus ou moins importante des propriétés de l'espace représenté (schéma, croquis, dessins, plans, etc..)

Les contraintes de la modélisation, communes aux métiers techniques et scientifiques, peuvent être simulées dans des situations d'initiation de jeunes élèves à la géométrie comme modèle de l'espace ; cette géométrie est un outil de production d'actions et de déclarations validées par leur efficacité spatiale.

3. Partie II

3.1. De la nécessité de prendre en compte une troisième problématique de rapport à l'espace : la problématique « pratique »

Nous avons évoqué ci-dessus l'ingénierie didactique ayant pour but la construction par les élèves du concept d'angle de secteur dans une problématique de modélisation. Sans utiliser ce vocabulaire, d'autres chercheurs se sont engagés sur des voies assez proches pour élaborer des situations didactiques, construites autour de situations a-didactiques, pour l'enseignement de certaines connaissances géométriques du collège, comme l'inégalité triangulaire, la construction point par point du symétrique d'un point, la somme des angles d'un triangle etc.

La description des difficultés rencontrées dans le déroulement effectif des séquences d'enseignement nous a conduits à analyser de plus près les caractéristiques des situations dans lesquelles les élèves étaient placés, en tenant compte d'une évidence occultée dans l'enseignement de la géométrie : depuis leur naissance, les élèves sont confrontés à la résolution de tâches spatiales, qui leur ont permis de développer des compétences et des connaissances. Pourquoi renonceraient-ils à les mobiliser pour résoudre les problèmes qui leur sont posés ?

3.1.1. Un exemple bien connu

Berté (1995-96) rappelle combien, dans la recherche du cas limite de l'inégalité triangulaire, la réponse : « il existe un triangle de longueurs de côté 4, 5 et 9 cm » est résistante. En voici une description dans une classe de 4ème¹⁰.

L'enseignant donne trois séries de nombres aux élèves. Il faut dans chaque cas, dessiner un triangle dont les côtés ont pour mesure ces trois nombres en cm. 1er cas: 7, 5, 4 2ème cas: 9, 5, 4 3ème cas: 10, 5, 4. Les élèves peuvent travailler en petit groupe et discuter entre eux.

Dans le premier et le troisième cas, tous les élèves dessinent le triangle avec le compas ou la règle pivotant autour du zéro et concluent sans difficulté.

Dans le deuxième cas, un groupe d'élèves arrivent à dessiner un triangle, très aplati mais pas tout à fait. La vérification de la longueur des côtés avec la règle graduée leur paraît exacte. Malgré quelques objections timides des autres élèves,

¹⁰ Description tirée de Berté (1987)

ils s'acharnent donc à dire que le triangle existe et arrivent même parfois à convaincre toute la classe ! (annexe 3)

L'insertion de cette activité dans le cours de mathématiques pour la classe de 4ème la situe très clairement du côté de ce que l'institution scolaire appelle l'enseignement de la géométrie. Pour les élèves (même s'ils appellent géométrie ce travail), la consigne est de type spatial : ils fournissent un dessin de triangle dont ils vérifient qu'il répond bien aux contraintes imposées. Ils peuvent conclure que, sur une feuille de papier, seule la troisième construction n'est pas possible.

Pour le professeur, la situation est alors embarrassante : Il a voulu appuyer son enseignement de géométrie, où les élèves doivent acquérir des connaissances relevant du modèle « espace géométrique », sur une interaction effective avec l'espace de la feuille de papier parce qu'il ne peut les faire travailler directement dans le modèle, comme il le fait lui-même.

Mais, une fois la figure faite, ce qu'il « voit » (dans le modèle) et ce que voient les élèves (sur la feuille) n'est pas identique. Lui « voit » que dans le triangle presque aplati, les longueurs des côtés ne sont pas égales à ce que croient les élèves ou plutôt il « sait » qu'elles ne peuvent pas l'être parce qu'il se fonde sur des connaissances du modèle, et cela l'empêche de « voir » ce que voient les élèves, c'est-à-dire que les côtés du triangle mesurent bien les longueurs demandées (les tracés ayant été faits avec une précision normale).

Les efforts du professeur pour amener les élèves à son point de vue, ce qui nécessite pour eux un « changement d'espace », se heurtent à des difficultés d'autant plus grandes que ce qui constitue, d'après la consigne, la base de leurs échanges, semble relever de l'évidence, même si enseignant et élèves ne « voient » pas la même chose.

Ainsi, le déroulement de cette situation ne peut que plonger l'enseignant dans un abîme de perplexité ! La connaissance « produite » par les élèves n'a rien à voir avec le savoir géométrique, et après cela, il lui sera encore plus difficile de les remettre sur la bonne voie, puisque ce serait rompre le contrat didactique que ses choix antérieurs ont contribué à mettre en place.

3.1.2. Un premier niveau d'analyse

L'enseignant a construit la situation didactique autour d'une situation qu'il estime a-didactique. Pour que la situation puisse sanctionner les décisions de l'élève, il faut donc qu'il puisse tirer de l'information des interactions qu'il entretient avec le milieu, c'est-à-dire avec l'environnement matériel et/ou humain mis en cause dans la situation.

Comment caractériser le milieu et ces interactions dans la situation étudiée ?

Dans un premier temps, il s'agit de construire des triangles, le milieu est constitué de la feuille de papier, des instruments de dessin et des tracés effectués.

Examinons les différences entre les deux « jeux », celui (A) dont la conclusion est l'existence de triangles (9,5,4), et celui (B) dont la conclusion est la non-existence du triangle.

a. Le « jeu » (A)

Les élèves qui admettent comme réalisation de la consigne le tracé triangulaire obtenu s'appuient sur une connaissance commune, constamment utilisée jusqu'ici dans la

communication didactique : un objet existe naturellement parce qu'on peut le voir, le distinguer visuellement des autres.

Dans le cas du problème posé avec les deux autres triangles, cette connaissance n'est-elle pas légitimée par le professeur lui-même qui a accepté leurs conclusions, à savoir que pour (7, 5, 4) il y a un triangle, et que pour (10, 5, 4) ce triangle n'existe pas ?

La stratégie gagnante de ce « jeu » consiste à produire des tracés matériels qui satisfassent les conditions énoncées, avec la précision permise par les instruments.

b. Le « jeu » (B)

Les élèves qui contestent l'existence du triangle (9,5,4) ne traitent pas des mêmes objets. Ce n'est pas la connaissance commune énoncée ci-dessus qui confère de la légitimité à leurs tracés. À partir du même énoncé, ils travaillent sur un problème différent, celui que le professeur a voulu proposer. Le jeu correspondant porte sur des « figures », objets associés à des connaissances de géométrie. La validité d'un tracé est déterminée en faisant appel à des propriétés proprement géométriques, implicitement différentes de celles déterminées par les connaissances communes.

c. Comparaison des deux « jeux » (A) et (B)

Pour les triangles (7, 5, 4) et (10, 5, 4), le résultat terminal « gagnant » est le même dans les deux jeux. Le problème d'enseignement n'apparaît pas. Pour la dernière, (5, 9, 4), chacun des jeux produit un résultat différent.

Le malaise de l'enseignant est bien compréhensible : c'est lui qui a mis en scène cette situation voulue comme a-didactique mais, très probablement aveuglé par ses connaissances géométriques, il a sous-estimé la distance entre le modèle et la réalité. Le milieu sensible sur lequel il comptait pour sanctionner les réponses des élèves, autres que « Il n'existe pas de triangle (5, 9, 4) » n'a pas les propriétés escomptées. Le fait que l'inégalité triangulaire soit stricte n'est pas un savoir spatial, mais est un savoir géométrique, et l'activité proposée, à elle seule, ne peut être à l'origine de sa constitution. C'est ce qui a été bien exprimé par Fréchet dans le texte de l'introduction. Berté, dans l'article cité, montre la complexité didactique du travail sur l'inégalité triangulaire et propose des pistes auxquelles nous renvoyons le lecteur.

3.1.3. Un deuxième niveau d'analyse : face à un problème d'action faisant intervenir des données spatiales, les élèves se situent d'emblée dans une problématique pratique.

a. Problématique pratique

Nous avons désigné par *problématique pratique* le type de rapport caractéristique d'une famille de problèmes spatiaux non didactiques, particulièrement importants dans la vie de tous les jours, dans lesquels l'individu contrôle ses rapports spatiaux de manière immédiate, empirique, et contingente.

Les situations correspondantes sont essentiellement des situations d'action. Nous décrivons les solutions retenues par des modèles spontanés¹¹, comme si elles avaient été

¹¹ À la suite de Brousseau (1983) et Galvez (1985)

empruntées pour la plupart à la culture (principalement sur le mode de l'imitation), et avaient été confortées par l'expérience¹², dans une logique que Bourdieu (1980) a nommée « le sens pratique ». Les communications s'effectuent sur le même mode, résolues par les moyens les plus économiques en conceptualisation. La *vérification* du résultat obtenu se fait sous le mode de *l'évidence et de l'instant*. Si la solution n'est pas satisfaisante, le sujet va l'ajuster au résultat attendu par une suite de corrections immédiates, sans se soucier de porter un regard réflexif sur la méthode utilisée initialement pour l'obtenir.

Nous rattachons cette problématique au sens pratique tel que l'a décrit Bourdieu :

La pratique se déroule dans le temps, et elle en a [...] l'irréversibilité [...]. Elle ne connaît que les cas particuliers et les détails de l'intérêt pratique ou de la curiosité anecdotique [...]. Elle exclut tout intérêt formel. Le retour réflexif sur l'action elle-même, lorsqu'il survient, reste subordonné à la poursuite du résultat et à la recherche (qui ne se perçoit pas nécessairement comme telle) de la maximisation du rendement de l'effort dépensé.

Si l'on observe une séquence d'enseignement de géométrie dans une classe de la scolarité obligatoire, on se rend compte de l'importance de ce type de rapport, nécessaire aux professeurs dans leurs communications avec les élèves.

b. Le caractère spatial des problèmes posés conduit les élèves à avoir recours à leurs connaissances spontanées développées dans une problématique pratique

Les points de départ des situations a-didactiques proposées ne peuvent être constitués que de problèmes spatiaux dans l'espace sensible. Or, depuis leur naissance, les enfants sont des solveurs de ce type de problèmes, ordinaires, pour lesquels, comme tout un chacun, ils utilisent ou élaborent les solutions les plus économiques en conceptualisations, parce qu'ils s'y situent dans une problématique pratique. Ils ont ainsi, à leur disposition, des connaissances spatiales, qu'ils mobilisent spontanément dans les situations d'enseignement de la géométrie qui leur semblent en relever et qui peuvent faire obstacle aux connaissances géométriques visées par l'enseignant. C'est le cas des élèves qui affirment l'existence du triangle (4, 5, 9).

C'est ainsi que nous interprétons aussi les difficultés relevées par de nombreux chercheurs qui, alors qu'ils pensent avoir élaboré des situations a-didactiques spécifiques d'une connaissance, observent des comportements d'élèves aboutissant à la réussite de la tâche mais sans faire appel au concept visé. Ces chercheurs expriment souvent ces phénomènes en terme de « détournement de la tâche ». Notre interprétation est que ces élèves se situent dans une problématique pratique, qui leur permet d'atteindre le but qui leur est fixé mais sans entrer dans la démarche espérée par le chercheur ou l'enseignant, qui eux se situent dans une autre problématique.

c. L'étude de ces connaissances spontanées, qui interviennent dans les situations d'enseignement de la géométrie, est fructueuse

Si nous prenons au sérieux l'hypothèse que les élèves appréhendent les situations géométriques qui leur sont proposées en mobilisant ces connaissances spontanées, alors

¹² Si la solution mise en oeuvre n'est pas satisfaisante, le sujet en est tout surpris...

l'étude de ces dernières doit permettre de mieux comprendre leurs difficultés et d'envisager des moyens d'action. C'est le travail que nous avons engagé, à la suite de Brousseau et Galvez.

3.2. Présentation rapide de trois types de représentations spontanées de l'espace

Brousseau et Galvez ont développé une analyse des situations et des connaissances spatiales courantes en prenant en compte d'une part les limitations apportées par le milieu à la saisie et à la gestion des informations pertinentes, et d'autre part leur fréquence de rencontre et l'importance qui leur est donnée dans notre type de société. Ils ont pu montrer théoriquement la pertinence de l'étude des interactions spécifiques d'un sujet avec un espace de petite taille (micro-espace), avec un espace de grande taille (macro-espace), et aussi avec un troisième type d'espace qu'ils ont nommé méso-espace.

Les concepts de base qui caractérisent les rapports spatiaux correspondants ne sont pas nécessairement ceux de la géométrie. On peut cependant, comme nous l'avons fait, étudier la relation entre les connaissances associées à ces rapports spatiaux et les concepts de base de la géométrie. Nous ne faisons ici qu'évoquer ce travail à propos de quelques concepts élémentaires de distance, nous renvoyons le lecteur au chapitre C4 de notre thèse.

3.2.1. Le micro-espace

Nous nommons micro-espace un espace où les rapports spatiaux correspondent à la manipulation familière des petits objets.

Il est associé à un domaine si familier au sujet que la plupart des problèmes qu'il y rencontre ne nécessitent pas de conceptualisation. Une action dirigée par les sens sur des objets qui demeurent sous le contrôle de la vue et de la préhension, permet en effet de résoudre tous les problèmes courants d'identification, de déplacement, d'assemblage.

La notion centrale est la notion d'objet. L'espace est constitué d'objets. Deux objets sont distincts si on peut les séparer par un espace(ment), que le sujet peut annuler dans l'instant. La notion de distance se distingue mal de celle d'espacement, qui n'a que deux valeurs pertinentes (il y a ou il n'y a pas d'espace entre les objets).

La conception micro-spatiale de la distance n'a donc que peu de rapport avec la notion géométrique correspondante.

La conception micro-spatiale de la longueur, qui peut être liée à (l'identification) des objets ou (des) parties d'objets, est plus proche de la notion géométrique.

La notion de droite n'existe pas non plus, il n'y a que des traits. Il n'y a aucune raison de concevoir un trait comme un ensemble de points, c'est-à-dire de prendre le point de vue du professeur lorsqu'il parle de segment.

La notion d'angle n'existe pratiquement pas dans ce rapport aux objets de petite taille, si ce n'est dans l'identification globale d'une forme.

3.2.2. Le méso-espace ou espace des déplacements domestiques

Nous nommons méso-espace un espace où les rapports spatiaux s'apparentent à la détermination et à la modification des positions à l'intérieur d'un domaine de déplacements domestiques, comme aux mouvements du sujet à l'intérieur des limites de ce domaine...

Les actions du sujet se font dans une partie de l'espace, sous le contrôle d'une vision partielle. La connaissance globale de l'espace peut être obtenue à partir de perceptions partielles successives, mais de durées minimales. Les déplacements rendent nécessaires des recollements, mais ceux-ci peuvent être rapidement contrôlés par la perception.

Les notions centrales sont ici celles de lieux, de trajets et d'objets. Les objets nouveaux sont semi-fixes ou fixes. Il n'y a pas nécessairement d'espacement entre deux objets (murs...) Entre les gros objets, il y a des trajets possibles, des possibilités ou non de placer un objet (meuble ou voiture par exemple), etc. Il faut considérer des distances.

La conception méso-spatiale de la longueur est articulée avec celles de distance, de profondeur, de hauteur, dont elle permet les mesures.

Les lignes s'enrichissent de conceptions nouvelles, les rapprochant des droites, segments, etc. : les fils tendus ou non, les visées, les trajectoires. Une trajectoire peut se concevoir comme une suite de positions temporelles, se représenter comme un trait, ajoutant ainsi une dimension nouvelle se rapprochant du segment.

Les angles permettent de repérer la position d'une ligne droite par rapport à une autre...

L'espace gagne à être représenté sur une feuille de papier et se posent les questions des propriétés conservées.

3.2.3. Le macro-espace (urbain, rural, maritime, etc.)

Lorsque la maîtrise des rapports à l'espace nécessite des recollements qui ne peuvent être réalisés sous le contrôle direct de la perception, mais nécessite un travail intellectuel sur des représentations, nous parlons de macro-espace.

Un macro-espace « correspond à un secteur de l'espace dont la dimension est telle qu'il est impossible pour le sujet d'obtenir une vision globale simultanée du secteur de l'espace avec lequel il est en interaction ; on peut l'embrasser seulement par l'intermédiaire d'une succession de visions locales, séparées entre elles par les déplacements (de durée relativement longue) du sujet sur la surface terrestre. »

Dans le macro-espace, les objets pertinents restent fixes, ils ont vocation à être pris comme points de repères, c'est le sujet qui se déplace. Pour orienter ses déplacements, il doit construire une représentation globale de l'espace, et récupérer la continuité de l'espace parcouru par recollement de représentations partielles, en ayant recours à des repères bien identifiés.

Les repérages, les représentations et leur articulation constituent les premiers problèmes à résoudre.

Les moyens techniques pour déterminer un trajet dépendent du type de macro-espace qu'ils vont caractériser. Les angles y jouent un rôle essentiel.

3.2.4. L'hypothèse des représentations spontanées

Le chercheur peut associer à chacun des types d'espace ainsi caractérisés un fonctionnement spécifique « naturel » de notions géométriques (conceptions) et une articulation spécifique de diverses notions qui interviennent efficacement (représentation). L'enfant développe « naturellement » des connaissances différentes ; il apprend aussi à nommer certaines de ses connaissances de manière plus ou moins appropriée à l'aide des mots de la culture (dont la géométrie participe pour beaucoup).

Les représentations obtenues n'ont aucune raison d'être bien articulées entre elles. Ce serait un des rôles de l'enseignement de la géométrie que de développer ces articulations pour obtenir une représentation homogène de l'espace.

3.3. La représentation micro-spatiale, outil d'analyse de comportements d'élèves dans les travaux de géométrie

La prise en compte de l'existence de ces représentations spontanées nous a permis de renouveler l'analyse de certaines erreurs des élèves dans le domaine géométrique : la presque totalité des problèmes leur est posée dans un contexte spécifique, l'espace de la feuille de papier qui présente un certain nombre de composantes contextuelles micro-spatiales. On peut donc s'attendre à trouver un mode de traitement « micro-spatial » de ces problèmes comme support des stratégies de base. Voici quelques exemples des interprétations que nous proposons pour des erreurs ou des difficultés répertoriées dans d'autres recherches.

3.3.1. « On ne mesure pas le vide »

Le premier exemple concerne une épreuve tirée de l'évaluation menée par le ministère en classe de 6ème.(septembre 1991).

Un quadrilatère ABCD, non convexe est dessiné sur la feuille. Il est demandé aux élèves de mesurer avec leur règle graduée, d'une part « la longueur du segment [BC] », segment tracé, d'autre part « la distance du point A au point C », le segment [AC] n'est pas tracé (annexe 4).

Les directions et les mesures des deux segments posent le même type de difficultés, très bien surmontées à cet âge, puisque 93,2% des enfants réussissent la première question. Ils ne sont plus que 54,4 % pour la seconde. Tous les types d'erreurs ne sont malheureusement pas identifiées, mais nous savons tout de même que 23,6% des élèves positionnent mal leur règle (au lieu de 1,8 %) dans la première question et que 10% d'entre eux ont mesuré puis calculé $AB+BC$ ou $AD+DC$. Le pourcentage de non-réponses est très faible.

On pourrait penser que ces élèves ne connaissent pas bien le sens du mot distance. Or l'année précédente, la même question avait été posée à propos de deux points, qui eux étaient reliés par un segment tracé ; la réussite avait été de 91%. Nous attribuons donc cette différence dans les réussites au fait que pour presque la moitié des élèves, l'hétérogénéité de la feuille de papier, au sens des pleins et des vides, induite par la représentation micro-spatiale qu'ils mobilisent, est encore très forte.

3.3.2. L'obstacle didactique de l'enseignement des angles

Nous désignons ainsi une série d'erreurs ou de blocages bien connus attestés jusque dans des définitions dans des ouvrages de mathématiques (Berdonneau 1980) qui attribuent aux angles des propriétés liées à la longueur des tracés de la représentation considérée. Nous avons montré que cette conception erronée peut s'expliquer si l'on admet que les enfants interprètent les tracés d'angles comme des objets micro-spatiaux.

Nous avons confirmé ce jugement par l'examen de l'enseignement (ostensif) de la notion et en développant un autre enseignement élémentaire des angles qui évite aux élèves de les assimiler à des objets. Nous renvoyons le lecteur à l'article que nous avons consacré à ce sujet dans le n° 56 de la revue *Grand N*.

3.3.3. L'obstacle à la conception ponctuelle des figures

Nous interprétons les difficultés à considérer les tracés comme des ensembles de points, difficultés signalées par exemple par Artigue et Robinet (1982) et par Grenier (1988), dans la même logique. Ce n'est qu'une conséquence, selon nous, d'un enseignement de la géométrie appuyé sur une pratique de « figures » considérées comme des objets.

3.4. Les « sur-figures »

De nombreux auteurs ont aussi décrit les difficultés des élèves à concevoir, dans le traitement d'une figure géométrique, la possibilité de l'inclure dans une sur-figure. En voici deux exemples pris dans des contextes différents.

a. Prolonger un segment

Le premier est extrait de Grenier (1988)¹³. un exemple pris dans une séance d'enseignement de la propriété d'incidence de la symétrie axiale. Il s'agit de la construction à la règle non graduée de l'axe de symétrie d'un octogone (régulier), d'un trapèze et de « drapeaux » (annexe 5).

Examinons la figure la plus simple, le trapèze auquel les autres peuvent être rapportées : Soit $[AB]$ et $[A'B']$, les côtés non parallèles. Voici ce que note l'auteur :

La construction revient à celle de deux points I et J tels que I est l'intersection des segments $[AB']$ et $[BA']$ [...] et J, l'intersection des droites (AB) et $(A'B')$ [...]. Les élèves ont produit des constructions de points de type I, mais peu de points de type J.

Nous prolongeons l'explication de Grenier en faisant remarquer que la construction de J oblige à prolonger chacun des segments, ce à quoi s'oppose la conception des segments comme objets du micro-espace. Dans la construction des points I, les segments tracés joignent deux sommets déjà existants de la figure, et chacun enrichit la figure initiale en nouveaux objets.

¹³ p. 308

b. Le traitement des figures non connexes

Bautier (1989), dans son étude de l'enseignement de la symétrie orthogonale, montre que les figures non connexes posent aux élèves des problèmes particuliers,

la transformation semble opérer sur les figures tracées, les transforme, mais laisse invariants les points du fond.

3.5. Conclusion : Le primat de la représentation micro-spatiale, obstacle didactique?

Ces observations et d'autres que nous n'avons pas rapportées ici, nous incitent à considérer l'existence d'une représentation micro-spatiale. Cette représentation est tout particulièrement activée par la présentation ostensive des « figures » de la géométrie. En effet, une telle présentation fait comme si les connaissances des élèves sur les figures étaient suffisamment proches des connaissances géométriques pour qu'un effet « Jourdain »¹⁴ soit légitime. Or nos observations et celles de bien d'autres chercheurs ou professeurs nous conduisent à penser qu'en fait une partie importante des élèves de collège assimile encore les figures géométriques à des objets du micro-espace, dont les moyens naturels de traitement sont aussi efficaces que pauvres du point de vue géométrique.

On pourrait penser que l'insertion dans l'enseignement de situations d'action permettrait aux élèves de dépasser cette représentation beaucoup trop limitée. L'exemple ci-dessus rapporté du triangle aplati et d'autres exemples tirés de l'analyse de recherches effectuées par d'autres équipes nous ont convaincus du contraire.

Nous pensions jusqu'à récemment, qu'en prenant appui sur une situation fondamentale assurant une bonne articulation entre la situation d'action et le savoir visé, nous résoudrions le problème du rejet de la modélisation géométrique par la représentation micro-spatiale, en obtenant un enrichissement de la seconde par la première.

L'expérience que nous avons menée ces dernières années avec des élèves de CM1 et de CM2, nous conduit à penser que, dans un milieu de petites dimensions, il est très difficile de faire vivre de façon durable une modélisation géométrique ; un tel objectif est trop coûteux en conceptualisation, et peut trop difficilement être justifié sur le long terme, alors que des procédures relevant de la problématique pratique permettent de résoudre la plupart des problèmes d'action. On sait qu'un grand nombre d'élèves éprouvent les plus grandes difficultés à se placer de manière autre que contingente.

Nous présenterons dans l'article suivant nos propositions actuelles pour dépasser cet obstacle.

¹⁴ voir Brousseau (1998) p. 53

4. Partie III

Les démarches préconisées actuellement pour aider les élèves à entrer dans la problématique géométrique s'inscrivent dans une histoire qu'il nous semble important, dans un premier temps, de resituer.

4.1. Une analyse succincte des Instructions Officielles depuis les années 1950 à la lumière des distinctions précédentes

Les développements précédents sur l'initiation à la géométrie déductive et l'initiation à la géométrie comme modèle d'action sur l'espace avaient pour objectif de mettre en lumière les différences profondes entre les deux fonctions de la géométrie et entre les situations didactiques correspondantes. Dans quelle mesure ces distinctions sont-elles prises en compte dans les instructions données aux enseignants, durant ces 40 dernières années ?

4.1.1. Dans les programmes et instructions de 1957, 1968, et 1977, on retrouve des constantes

* en 6ème et 5ème,

l'observation d'objets de l'espace physique, les constructions graphiques opérées avec les outils usuels, constituent une préparation essentielle à l'étude de la géométrie proprement dite (1968)

* Une rupture intervient ensuite (dès la 5ème ou à partir de la 4ème), au moment de l'introduction de la géométrie déductive, très explicite dans les textes de 1968, moins dans ceux de 1957 et 1977 :

-Voici comment les textes de 1957 proposent de justifier la démonstration :

[Au cours des travaux pratiques] de nombreux exercices de dessin accompagneront l'étude des divers chapitres de la géométrie; ils comporteront notamment des constructions de figure, des comparaisons, des vérifications expérimentales, des mesures dont on ne manquera pas de faire ressortir le caractère limité et restreint afin *de faire peu à peu saisir la différence entre la constatation, même répétée, d'un fait particulier et une démonstration générale.*

-Pour les programmes de 1968, la phrase citée se prolonge ainsi :

l'observation d'objets de l'espace physique, les constructions graphiques opérées avec les outils usuels, constituent une préparation essentielle à l'étude de la géométrie proprement dite bien que le mot **géométrie** prenne en quatrième un sens différent de son sens initial.

Les instructions concernant « l'introduction à la géométrie de 4ème et de 3ème » développent une conception de la géométrie comme « premier exemple de mathématisation d'une réalité physique ». Le point de départ est constitué de l'étude expérimentale d'un certain nombre de propriétés de la réalité physique, qui devront apparaître « à la fois comme *naturelles* et *simples* à des débutants... ». Le texte se poursuit ainsi :

Le point de départ ainsi une fois choisi, nous définissons des êtres mathématiques comme des ensembles d'éléments ayant les propriétés précédentes que nous énonçons sous forme *d'axiomes*. De l'ensemble des axiomes choisis seront alors déduites d'autres relations entre les êtres mathématiques ainsi définis et entre leurs combinaisons ; ces relations **démontrées** sont énoncées sous forme de *théorèmes*.

- dans les programmes de 1977, la rupture entre les deux « géométries » se manifeste encore dans les différences d'intitulés entre les programmes de 6ème-5ème « observations d'objets géométriques et physiques » et ceux de 4ème-3ème où l'on parle de « notions et propriétés fondamentales ». Mais

il n'est pas question de donner à l'élève une présentation axiomatique de la géométrie. En revanche, il devra apprendre à faire de courts raisonnements à partir de faits géométriques considérés comme évidents et donc admis comme vrais.

4.1.2. Dans les programmes de 1985-86, légèrement remaniés en 1996, deux différences importantes avec les programmes antérieurs apparaissent

La première peut être résumée par la modification du titre des parties concernant la géométrie en 6ème-5ème : on passe de « Observation d'objets géométriques et physiques » à « Travaux géométriques ». Le terme « observation », si prégnant antérieurement, disparaît. L'activité qui renvoie à ce terme est remplacée par d'autres qui évoquent toutes une action effective sur les figures : reproduction, description, représentation, construction.

Cette modification est en conformité avec la conception de l'apprentissage mathématique développée dans les instructions, basée sur la résolution de problèmes.

La deuxième différence concerne la rupture que nous avons notée dans les programmes antérieurs entre la géométrie enseignée avant et après la classe de quatrième. Elle n'est plus explicite, ni dans les programmes, ni dans les instructions ; au contraire, la continuité de tout l'enseignement au collège est affirmée dans les introductions propres à chaque classe.

C'est bien ce que souligne cette phrase tirée des instructions de sixième, à propos de l'enseignement de la symétrie :

L'effort portera d'abord sur un travail expérimental (pliage, papier calque) permettant d'obtenir un inventaire abondant de figures simples, à partir desquelles se dégageront de façon *progressive*¹⁵ les propriétés conservées par la symétrie axiale, ces propriétés prenant alors *naturellement* le relais dans les programmes de constructions.

La même idée est exprimée à de nombreuses reprises. Par exemple en sixième,

les travaux développeront les capacités à choisir les instruments adaptés à une situation donnée. Ils faciliteront aussi la mise en place de courtes séquences déductives s'appuyant par exemple sur la définition du cercle et des propriétés d'orthogonalité et de parallélisme.

Ou à propos de l'inégalité triangulaire en classe de quatrième (programme de 1986) :

¹⁵ C'est nous qui soulignons.

La pratique des tracés de figures mettant en jeu des triangles ou des cercles montrera l'intérêt de l'inégalité triangulaire et permettra de préciser dans quel cas on obtient l'égalité.

Les lecteurs de *petit x* qui ont lu les articles de Berté et de Arzac savent que ce n'est justement pas la pratique des tracés qui permet de conclure sur l'inexistence du triangle (4, 5, 9).

4.1.3. La lecture de ces textes suscite trois commentaires

- Pour leurs rédacteurs, les tracés sur la feuille de papier réalisent exactement le modèle géométrique. Ils n'ont sans doute jamais essayé de construire le point de rencontre des 3 médiatrices d'un triangle en faisant comme s'ils ne connaissaient pas le théorème !

- Les objets géométriques et les propriétés de base de ces objets s'extraient de manière simple de la réalité des figures, par l'observation et/ou l'activité de traçage. Aussi, même si l'idée de modélisation de l'espace sensible est exprimée par quelques-uns, aucune conséquence didactique n'en est évoquée.

- Les textes de 1968 reflètent très certainement les conceptions qu'ont aussi les rédacteurs des textes suivants sur la nature de la géométrie « proprement dite ». Les changements de cap successifs manifestés par ces instructions attestent que le problème didactique de l'initiation à la géométrie déductive est récurrent ! Selon nous, il est traité actuellement dans les programmes sous le mode de la dissimulation des différences, ce qui constitue une injonction paradoxale adressée aux professeurs : « Vous savez qu'il y a une rupture entre la géométrie du constat et la géométrie déductive, mais ne faites pas peur aux élèves, trouvez le moyen de leur faire croire qu'il est naturel de passer d'un plan à l'autre ! ».

4.2. Les conséquences de la mise en œuvre des orientations actuelles : la dé-légitimation du rapport à l'espace et la disqualification de la mesure

Même si les instructions insistent sur l'aspect « naturel » du passage d'une géométrie à l'autre, les professeurs savent bien que ce passage est difficile !. Aussi, nous trouvons dans les manuels et dans les textes à destination des professeurs des suggestions de commentaires ou d'activités à destination des élèves qui ont pour but de le « motiver ».

4.2.1. Un exemple déjà ancien nous en est fourni dans l'article de Gaud et coll (1987)¹⁶

Un tableau présente trois moyens de répondre à la question « Pourquoi ? » (sous-entendue : « pourquoi la propriété conjecturée est-elle vraie ? »), assortis des avantages et des inconvénients de chacun de ces moyens.

¹⁶ Suivi scientifique 5ème (Annexe 5).

Moyens	Avantages	Inconvénients
En observant la figure, ça se voit (<i>la vue</i>)	Permet de se faire une idée	Pas totalement sûr (illusions, les tracés ne peuvent être exacts)
En faisant des mesures (<i>la mesure</i>)	Permet de vérifier son idée	Pas totalement sûr (imprécision des mesures)
En donnant des raisons : je l'ai prouvé, démontré (<i>la logique</i>)	Permet d'être sûr de ce que l'on dit	Il faut connaître les règles et être sûr du point de départ

Pour justifier l'emploi de la démonstration auprès des élèves, il est donc fait le choix de disqualifier les pratiques de contrôle spatial, sans prendre en compte le fait que les deux méthodes (mesure et logique) pour vérifier la vérité d'une assertion, s'appliquent à des objets de nature complètement différente¹⁷. Une personne qui veut savoir si ses murs sont d'équerre devrait-elle renoncer à l'emploi d'une équerre ou à des mesurages sous prétexte que ces mesures peuvent être imprécises ?

4.2.2. Les mêmes types de motivation sont proposés aux professeurs dans la brochure inter-irem « Des mathématiques au cycle central »

Dans Martin et coll. (1997) on peut lire :

Motiver en géométrie, le passage de l'observation à la déduction

L'élève doit adhérer à ce changement et pour cela il doit en éprouver la nécessité. Il faut donc l'amener à s'interroger, dès le début de la 6ème et pendant toute la scolarité sur la validité des résultats obtenus à partir d'observations¹⁸ [...]. A cette fin, on peut par exemple :

- projeter des illusions d'optique
- choisir de faire réaliser des constructions aux conclusions trompeuses ou incertaines. Ces exercices sont en rupture avec des exercices de réinvestissement de propriétés établies ou découvertes de propriétés nouvelles. Leur objectif est de faire prendre conscience aux élèves qu'observer une figure ne permet pas d'établir des certitudes et que l'on doit se limiter à émettre des conjectures.

Un exemple de tel exercice est proposé dans Jaffrot et coll (1997) auquel est ajouté le commentaire suivant

En 6ème, le statut de la figure commence à évoluer. L'élève découvre qu'il faut s'en méfier comme dans le problème ci-dessous où ABED semble être un rectangle mais les données ne permettent pas de conclure [...]. (annexe 6)

¹⁷Les instructions de 1957, elles, ne remettaient pas en cause le recours au contrôle spatial, elles proposaient aux professeurs de motiver la démonstration par l'interrogation « est-ce que ce phénomène, par exemple la présence d'un angle droit, est lié à un tracé particulier ou est-il général ? ».

¹⁸ Il faut entendre ici « observation » par observation armée, c'est-à-dire faisant appel aux mesures.

L'élève de 6ème qui construit la figure correspondante avec soin et trouve en mesurant AD et BE que ces 2 longueurs sont égales¹⁹ ne peut que conclure que le quadrilatère est un rectangle. Nous affirmons qu'ébranler ces connaissances en vue, soi-disant, de le préparer à une activité qui, pour le moment, n'a aucun sens pour lui, c'est le condamner à ne rien comprendre à la géométrie déductive et à perdre ses repères quant au rôle de modèle de la réalité spatiale qu'elle joue hors du cours de mathématiques.

4.2.3. Qu'en est-il dans les manuels ?

Il ne s'agit pas ici d'une étude exhaustive mais du résultat de quelques sondages dans des manuels de 6ème récents.

a. Un exemple en 6ème (collection Hachette collège)

Trois éditions différentes se sont succédé depuis 1990. Comme un certain nombre d'autres manuels, ils comportent des encadrés, dans lesquels les auteurs donnent des conseils sur les réponses attendues pour les exercices importants, sur les modes d'évaluation de la réponse. Il est intéressant de regarder comment ces commentaires « méta-mathématiques » traitent des rapports possibles aux figures. Nous avons relevé deux caractéristiques contradictoires du rapport à la réalité spatiale évoquée par ces encadrés ou par des exercices :

* Mise en doute de la réalité spatiale, indépendamment du type de « jeu » dans lequel elle prend sa signification :

- Dans le manuel de 1990, dès le premier chapitre de géométrie (p. 130), dans la rubrique « Pour résoudre des problèmes », un paragraphe s'intitule « Pour apprendre à douter ». Celui-ci présente des dessins procurant des impressions visuelles posant problème (annexe 7).

Dans le premier cas, 2 segments parallèles coupant un faisceau de droites issues d'un même point et paraissant arrondis, la vérification avec une règle qu'on suggère à l'élève de réaliser permet de contrôler qu'il s'agit bien de segments. Par contre, dans le cas n° 2, les dimensions de la figure ont été choisies de telle manière que les élèves puissent affirmer après vérification avec une règle que les 4 points sont alignés. Or il leur est affirmé par les auteurs :

les 4 points ne sont pas alignés (une preuve sera donnée en classe de 3ème).

et un commentaire suit :

Face à une figure géométrique, il arrive souvent que l'on ait des impressions : parfois, il est très difficile (même impossible) en 6ème de savoir si elles ont bonnes ou mauvaises. Aussi, à chaque fois que l'on ne sera pas capable d'apporter une preuve de ce que l'on voit, (ou croit voir) on préférera dire : 'Il semble que ...' 'On dirait que ...'. Cela s'appelle faire une conjecture []

¹⁹ Le calcul de BE conduit à une longueur théorique de 3,75 cm, à comparer aux 4 cm de AD. Mais des erreurs de 0,5 mm sur les longueurs AC, CB, et AD, peuvent conduire à une différence entre BE et AD d'1mm seulement.

Comment des élèves de 6ème peuvent-ils s'y retrouver ? Pour eux, les 2 dessins ont le même statut, pourquoi dans le 1^{er} cas, l'usage de la règle est-il légitime, et pourquoi pas dans le second ? D'autre part, dans certains exercices de ce chapitre, il leur est demandé d'utiliser l'équerre pour tracer des droites perpendiculaires, alors que son usage pour vérifier que 2 droites déjà tracées sont perpendiculaires n'aboutit qu'à l'énoncé d'une conjecture. Là aussi, quel sens ces élèves de début de 6ème peuvent-ils attribuer aux activités proposées ?

- Dans le manuel de 1994, un autre exemple d'illusion d'optique à contrôler avec une règle est donné, le dessin des 2 carrés a disparu mais le rapport aux figures n'est sans doute pas plus facile à établir pour les élèves : à l'issue d'un exercice (n° 15 p. 41) dans lequel ils doivent construire 2 hauteurs d'un triangle et examiner les positions relatives de la droite joignant le 3^{ème} sommet au point d'intersection de ces 2 hauteurs avec le côté opposé, à l'aide de l'équerre, la conclusion qu'ils doivent faire est que ces 2 droites *semblent* perpendiculaires. Un commentaire accompagne cet exercice :

L'utilisation des instruments permet seulement de se faire une idée de certaines propriétés d'une figure. Dans ces cas-là (d'ailleurs, certaines impressions sont parfois mauvaises), on utilise le verbe sembler ('on dirait que') et non le verbe être : cela s'appelle faire une conjecture.

Et dès ce premier chapitre, aussitôt après cette introduction, les exercices comportent une partie « apprendre à déduire » dans lesquels les élèves doivent non seulement justifier ou prouver (les 2 termes sont utilisés) certaines propriétés de parallélisme en s'appuyant sur la définition mais aussi déterminer des cas où il n'est pas possible de prouver.

- le manuel de 1996 est proche de celui de 1994, de nouvelles illusions d'optique à vérifier précèdent le même exercice conduisant à l'introduction du terme « conjecture » et il est accompagné du même commentaire légèrement allégé. Curieusement, des exercices avec demande de justification des propriétés de figures construites à partir d'énoncés précèdent cette introduction.

* Recours à la réalité spatiale pour confirmer les propriétés du modèle géométrique dans des cas où celles-ci ne sont justement pas évidentes !

- Dans le manuel de 1994, c'est l'activité de découverte (p. 74 annexe 8) qui fait jouer aux figures un rôle absolument contradictoire avec celui accordé dans les chapitres précédents. De plus, avec ce que les recherches en didactique ont montré à propos du « triangle aplati » en 4ème, comment les élèves pourraient-ils, en faisant des essais, donner raison à Sébastien qui affirme que le triangle de Laura (de côtés 6cm, 3,5 cm, et 2,5 cm) est « forcément faux » ?

- Dans le manuel de 1996, cette « activité » est ramenée au rang d'exercice.

b. Maths 6ème (Magnard 2000)

Le même emploi du verbe « sembler » est fait que dans les manuels précédents mais pour caractériser des propriétés de figures tracées sans référence à un énoncé, comme dans la consigne suivante :

Décalle cette figure et utilise ton équerre pour trouver les angles qui semblent droits. (ex 13 p. 15)

Les élèves de 6ème (et leurs parents !) doivent se demander avec perplexité quel critère permet alors d'affirmer que 2 angles sont droits²⁰...

c. Nouveau Transmath 6ème (Nathan 1996)

Quoique nous pensions des ambiguïtés signalées ci-dessus, les auteurs des 2 manuels que nous venons d'examiner ont le souci de donner l'occasion aux professeurs, sinon aux élèves, d'aborder ces questions de rapport à la figure en géométrie. Cela ne semble pas le cas du manuel « Transmath ». La démonstration est introduite très tôt (dès le premier chapitre de géométrie), mais la question du type de rapport à établir avec les figures n'est jamais évoquée, l'élève en faisant « comme les résolus » est supposé capable de comprendre qu'à la question « que peux-tu dire de ... ? », il doit répondre en enchaînant des propriétés figurant dans l'énoncé.

4.2.4. Conclusion

Ces quelques exemples illustrent 2 tendances actuelles de l'enseignement de la géométrie au collège :

- d'une part, la conception de la géométrie comme « science de l'espace » est abandonnée, puisque le milieu spatial est systématiquement dévalorisé et qu'à aucun moment, les résultats du travail logique du géomètre ne sont mis en rapport avec les prévisions qu'il peut faire sur ce milieu. Une lecture attentive de l'ensemble des textes de la Commission inter-Irem Premier cycle²¹ concernant l'enseignement de la géométrie ou de l'article de Pellequer et Bronner²², par ailleurs riche de suggestions intéressantes, montre qu'à aucun moment leurs auteurs ne proposent de faire réfléchir les élèves sur le fait que le raisonnement permet de prévoir des « phénomènes spatiaux », par exemple dans la réalisation d'une figure à partir de la donnée d'un schéma à main levée²³, ou dans la résolution d'un problème de bricolage, ou de réfuter une conjecture qui serait invalidée par une « figure – épure », ce qui est pourtant une pratique courante dans la résolution de problèmes de géométrie.

- d'autre part, la focalisation sur la démonstration, beaucoup plus précoce que dans les années 60, conduit à nier les conditions réelles dans lesquelles s'effectuent les apprentissages des élèves, qui s'appuient nécessairement sur les connaissances spatiales « naturellement » développées par eux comme par tout individu depuis sa naissance. La

²⁰ Les auteurs n'arrivent pas eux-mêmes à utiliser de manière cohérente la convention proposée : sur la même page, 4 dessins d'illusion d'optique sont représentés avec un commentaire contradictoire avec la consigne précédente : « dans les exemples 1 et 2, les droites rouges sont bien parallèles », alors que pour le vérifier, on est obligé d'avoir recours à l'équerre et qu'on devrait donc dire, si on appliquait la même règle : « avec l'équerre, les droites rouges semblent parallèles ». Cette formulation leur est peut-être apparue trop paradoxale : en général, l'usage de l'équerre permet de dire de 2 droites qui semblent perpendiculaires que justement elles ne le sont pas.

²¹ (1996) *Des mathématiques en 6ème* (1997) *Des mathématiques au cycle central* Editions IREM de Nantes

²² Pellequer S. et Bronner A. (1996)

²³ Nous n'avons trouvé de tels exercices en 6ème que dans le manuel de la collection Triangle (Hatier 2000)

question à étudier est celle du traitement des effets de ces connaissances dans le déroulement de la classe, lorsque les productions des élèves qu'elles suscitent ne peuvent être reconnues comme des productions relevant du savoir géométrique.

5. Conclusion : assumer les différences et les ruptures est nécessaire

Nous avons présenté succinctement les trois types de problématiques auxquelles, selon nous, les élèves sont confrontés, de manière implicite, dans l'enseignement de la géométrie au début du collège. L'ensemble de nos analyses nous ont conduit à défendre les deux propositions²⁴ suivantes :

Différencier nettement auprès des élèves les problématiques spatio-géométrique et géométrique d'une part, la problématique pratique d'autre part, en mettant en valeur ce qui fait la spécificité de chacune d'entre elles.

Il ne s'agit pas d'ajouter une contrainte supplémentaire à l'enseignement tel qu'il se déroule mais d'en resituer de façon fonctionnelle et positive certaines d'entre elles faute de quoi elles sont exercées par les enseignants de manière à dévaloriser les stratégies légitimes des élèves.

Introduire dès l'école primaire les savoirs géométriques de base comme outils pour résoudre effectivement des problèmes spatiaux

Articuler la problématique de modélisation avec la problématique géométrique

C'est sur la première partie de cette proposition que portent actuellement nos travaux exploratoires dans les classes, que nous présenterons dans un prochain article.

Quant à la deuxième, qui suppose un minimum d'acquis et de position juste sur la modélisation, si nous avons donné un certain nombre d'indications dans la première partie de cet article, en reprenant la proposition de Brousseau sur le triangle des médiatrices, des recherches approfondies portant sur des aspects tant mathématiques²⁵ que d'ingénierie sont nécessaires pour étudier le développement de cette démarche.

Références

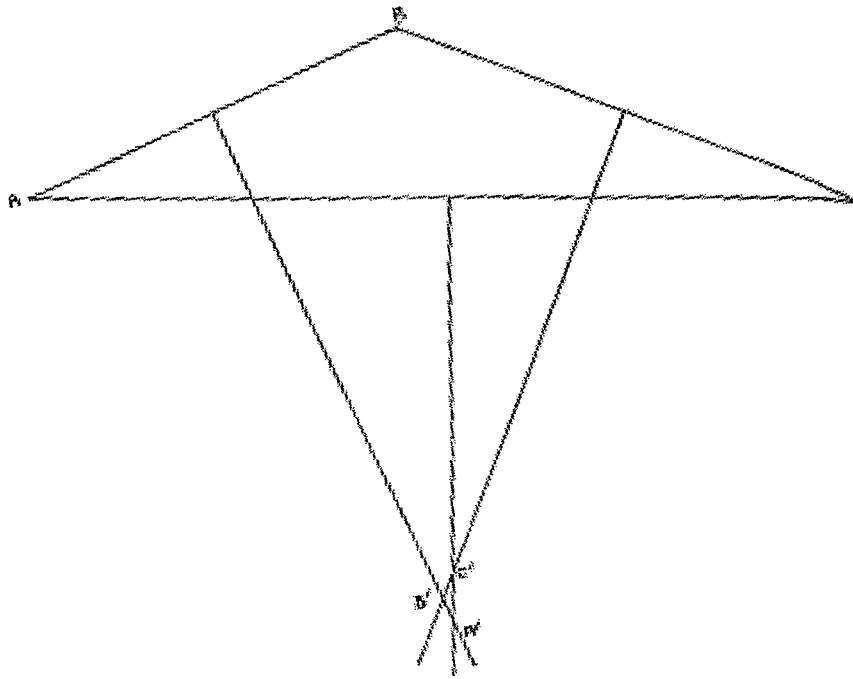
- ANTIBI A. et MALAVAL J. (1996) *Nouveau Transmath 6^{ème}* Nathan.
- ARSAC et coll. (1992) *Initiation au raisonnement déductif au collège*, P.U. de Lyon.
- ARTIGUE M., ROBINET J. (1982) Conceptions du cercle chez les enfants de l'école élémentaire, *Recherches en didactique des mathématiques 3.1*, 5-64.
- BAUTIER T. (1988) Une modélisation didactique des activités d'enseignement des premières propriétés de la symétrie orthogonale, *Séminaire de didactique des mathématiques et de l'informatique*, LSD-IMAG, Institut Fourier, Université J. Fourier, Grenoble, années 86-88, p.197-238

²⁴ Nous défendons également une 3^{ème} proposition, qui concerne aussi le collège mais dont nous ne parlons pas ici : *Introduire explicitement dans l'enseignement des mathématiques de la scolarité obligatoire des objectifs relatifs à certaines connaissances spatiales utiles, en particulier pour le macro-espace et pour la maîtrise des représentations matérielles des objets.*

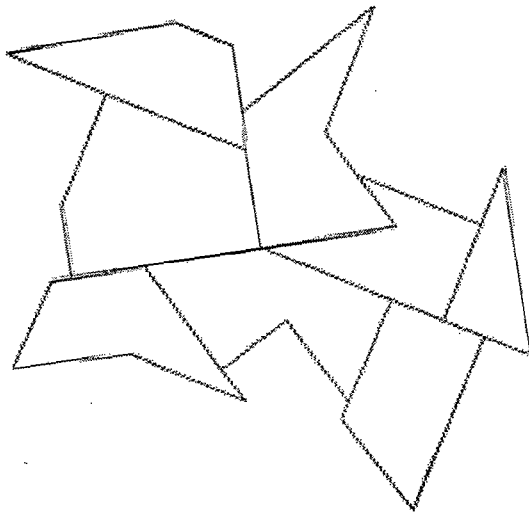
²⁵ Berté (1995) montre bien qu'il faut étudier l'enchaînement des situations didactiques.

- BERDONNEAU C. (1981) *Quelques remarques sur l'introduction à la géométrie démontrée à travers les manuels en usage dans l'enseignement post-élémentaire en France au vingtième siècle*, Thèse, Université Paris VII
- BERTÉ A. (1987)(2ème éd. 1992) : *Enseignement des mathématiques utilisant la réalité*, IREM de Bordeaux.
- BERTÉ A. (1995) Différents ordres de représentation des premières notions de géométrie métrique dans l'enseignement secondaire. *Recherches en Didactique des Mathématiques vol 15/3* La Pensée Sauvage : Grenoble.
- BERTE A. (1995-96) Réflexions sur inégalité triangulaire et distance d'un point à une droite à partir d'observations de classes *petit x*, n° 40, IREM de Grenoble.
- BERTHELOT R. & SALIN M.H. (1992) *L'enseignement de l'espace et de la géométrie dans la scolarité obligatoire*. Thèse Université Bordeaux 1. LADIST.
- BERTHELOT R. & SALIN M.H. (1995) Un enseignement des angles au cycle 3, *Grand N*, n°56, IREM de Grenoble, pp. 69-116.
- BOURDIEU P. (1980) *Le sens pratique*, Les éditions de minuit.
- BROUSSEAU G. (1983) : Etudes de questions d'enseignement. Un exemple : la géométrie", *Séminaire de didactique des mathématiques et de l'informatique*, LSD IMAG, Université J. Fourier, Grenoble (1982-1983)
- BROUSSEAU G. (1998) *La théorie des situations didactiques* La Pensée Sauvage : Grenoble.
- CHAPIRON G. et Coll (2000) *Mathématiques 6ème* Hatier
- CHEVALLARD Y. et JULIEN M. (1991) Autour de l'enseignement de la géométrie au collège, première partie, *petit x*, n°27, IREM de Grenoble
- DELORD et VINRICH (1990, 1994, 1996) *Mathématiques en 6ème*, Hachette.
- FRECHET (1955) *les mathématiques et le concret*, PUF Paris.
- GALVEZ G. (1985) *El aprendizaje de la orientacion en el espacio urbano: Una proposicion para la ensenanza de la geometria en la escuela primaria*, Tesis, Centro de Investigacion del IPN Mexico.
- GAUD et coll. (1987) Apprentissage de la démonstration, *Suivi scientifique cinquième, bulletin inter-IREM premier cycle*, IREM de Lyon
- GRENIER D. (1988) *Construction et étude du fonctionnement d'un processus d'enseignement de la symétrie orthogonale en 6ème*, Thèse Université J. Fourier Grenoble 1.
- JAFFROT et Coll (1998) Lire et écrire en mathématiques *Des mathématiques au cycle central* , Editions IREM de Nantes.
- LE HIR G. et coll. (2000) *Maths 6ème*, Magnard.
- MARTIN M. et coll. (1997) Initiation au raisonnement déductif en géométrie. *Des mathématiques au cycle central* , Editions IREM de Nantes.
- MERCIER A. et TONNELLE J. (1992) Autour de l'enseignement de la géométrie au collège, deuxième partie, *petit x*, n°29, IREM de Grenoble.
- PELLEQUER S. et BRONNER A. (1996) Pour démarrer en géométrie : une situation problématique, *petit x*, n° 40, IREM de Grenoble.
- MINISTERE DE L'EDUCATION NATIONALE (Janvier 1992) *Évaluation CE2-6ème Résultats nationaux* Éducatons et Formations.
- MINISTERE DE L'EDUCATION NATIONALE (Décembre 1995) *Programmes de la classe de 6ème , Programmes du cycle central*, livret 1 Direction des lycées et collèges- Direction de la communication.

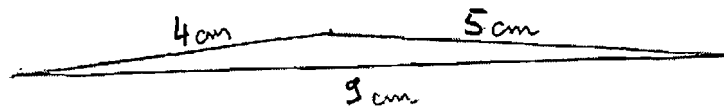
Annexe 1



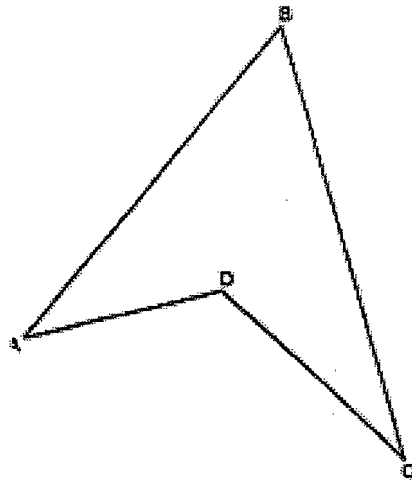
Annexe 2



Annexe 3



Annexe 4

Exercice 31

À l'aide d'une règle graduée, mesure la longueur de :

En utilisant la règle graduée, mesure en centimètres :

a) la longueur du segment [BC] :

BC = _____ cm

R : 93%

b) $\frac{1280}{2}$

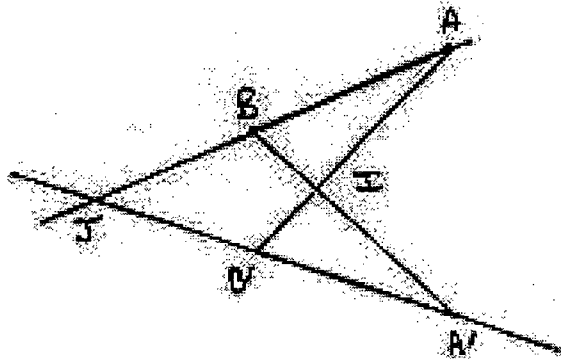
b) la distance du point A au point C :

AC = _____ cm

R : 54%

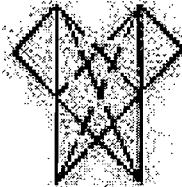
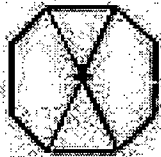
b) $\frac{13480}{2}$

Annexe 5

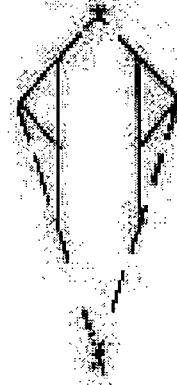
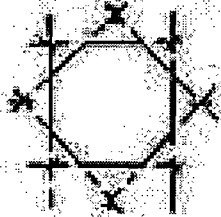


Annexe 6

Les points de type I sont les suivants :



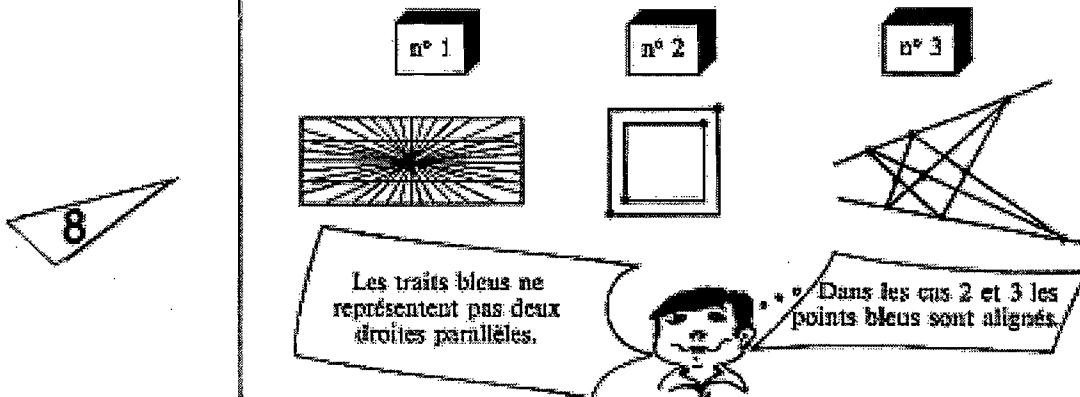
Les points de type I sont les suivants :



Annexe 7

5. Apprendre à douter

Une impression



Qu'en est-il exactement ?

Cas n° 1 : Les traits bleus ont été tracés à la règle et à l'équerre (vérifier le parallélisme).

Cas n° 2 : Les quatre points ne sont pas alignés (une preuve sera donnée en classe de 3^e).

Cas n° 3 : Cette fois, les points sont alignés. Voir exercice n° 17, p. 139.

attention ►

Face à une figure géométrique, il arrive souvent que l'on ait des impressions : parfois il est très difficile (même impossible) en sixième de savoir si elles sont bonnes ou mauvaises.

Aussi, à chaque fois que l'on ne sera pas capable d'apporter une preuve de ce que l'on voit (ou croit voir) on préférera dire : « Il semble que... », « On dirait que... » : cela s'appelle faire une conjecture.

Annexe 8

2 TOUJOURS POSSIBLE ?

1 Marquer deux points A et B distants de 6 cm.

Dessiner l'ensemble de *tous* les points situés à 4 cm du point A , puis l'ensemble de *tous* les points situés à 5 cm du point B .

Combien y a-t-il de points situés, à la fois, à 4 cm du point A et à 5 cm du point B ? Les marquer en rouge.

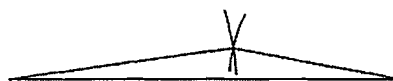
2 a) Tracer un triangle dont les côtés mesurent 5 cm, 6 cm et 9 cm.

b) Laura est toute contente parce qu'elle est la première dans sa classe à avoir réussi à construire un triangle dont les côtés mesurent 6 cm, 3,5 cm et 2,5 cm.

Sébastien lui répond que son dessin est forcément faux.

Qui a raison ? (Faire d'abord des essais.)

c) Un triangle dont les côtés mesurent 4 cm, 5 cm et 10 cm, « ça existe ou ça n'existe pas ? »



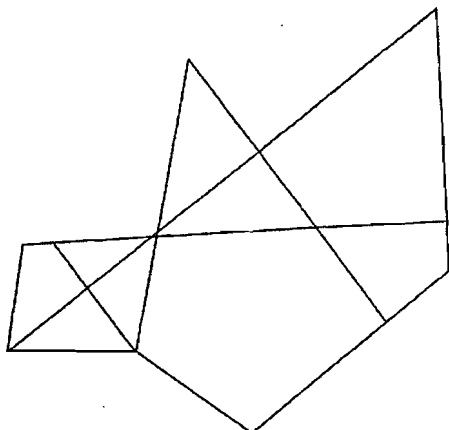
le dessin de Laura

74

Annexe 9

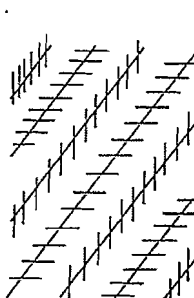
1

13. Décalque cette figure et utilise ton équerre pour trouver les angles qui semblent droits.

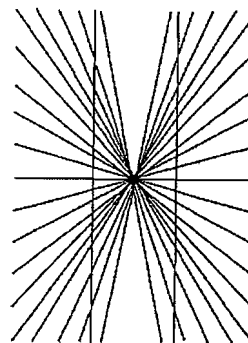


16. Illusions d'optique

Lors de l'observation d'une illusion d'optique, le cerveau ne sait pas analyser correctement ce que l'œil lui transmet. La superposition de figures géométriques simples peut créer une confusion de lecture.



exemple 1



exemple 2

Dans les exemples 1 et 2, les droites rouges sont bien parallèles.