UN PROCESSUS D'ENSEIGNEMENT DES ANGLES AU CYCLE III

René BERTHELOT
Marie-Hélène SALIN
Laboratoire de Didactique des Sciences et Techniques
Université Bordeaux 1 - I.U.F.M. d'Aquitaine

INTRODUCTION

Nous avons précédemment montré[1] (Grand N, n°53) qu'une des caractéristiques de l'enseignement de la géométrie à l'école élémentaire est de sous-estimer la difficulté d'acquisition des connaissances spatiales proprement dites et de laisser à l'élève la charge d'établir des rapports adéquats entre l'espace sensible et les concepts géométriques qui lui sont enseignés et qui sont censés lui donner prise sur ce domaine de réalité. Il n'est évidemment pas question de faire prendre en charge par l'enseignement toutes les connaissances que l'élève doit savoir mettre en oeuvre, soit pour apprendre, soit pour utiliser ce qu'il sait. La frontière entre ce qui est laissé à la responsabilité de l'élève et ce qui est pris en charge par l'enseignement ne nous semble pas convenablement située, en ce qui concerne l'espace et la géométrie. Il nous est donc apparu nécessaire d'étudier comment et à quelles conditions cette frontière pourrait être modifiée.

L'objet de cet article est de présenter sur un exemple, celui de l'enseignement des angles, de quelle manière l'articulation entre l'espace sensible et la modélisation qui en est faite par la géométrie peut utilement faire l'objet du travail de la classe.

I - ANALYSES PREALABLES

Avant de décrire le processus lui-même, nous rappellons certaines difficultés relevées à propos de l'apprentissage du concept d'angle de secteurs. Nous proposons ensuite une analyse, s'appuyant sur les éléments théoriques présentés dans Grand N, n°53, d'une séquence d'enseignement relevée dans un manuel de CM1[2] récent, séquence qui nous paraît tout à fait représentative de ce qui existe actuellement.

---

1 «L'enseignement de la géométrie à l'école primaire», Grand N n°53, 1994.
2 Bouchet et al. (1989), Collection Chapuis CM1, Nathan.

«Grand N» n°56 pp. 69 à 116, 1994-1995

Nous terminons par la présentation détaillée du processus en dégageant ce qui nous a guidé dans sa construction.

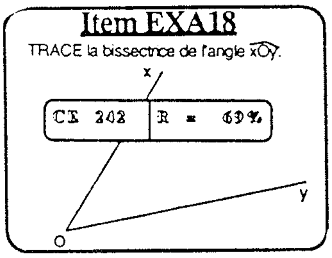
A - Les difficultés des élèves dans l'appropriation du concept d'angle

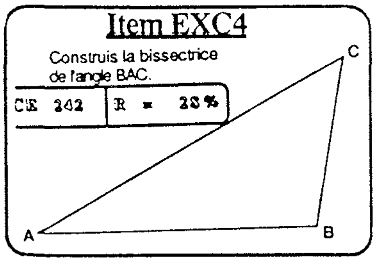
1. Une conception erronée de l'angle

Les enseignants de 6ème et 5ème désignent la notion d'angle comme difficile. Plusieurs recherches ont pointé l'existence d'une conception erronée de cette notion, résistant à l'enseignement usuel : «l'angle est conçu comme la donnée de deux segments ayant une extrêmité commune et des supports distincts. Avec une telle conception, deux figures qui diffèrent par la seule longueur des segments qui les constituent apparaissent comme représentant deux angles différents»[3].

Cette conception est attestée par des résultats d'élèves, en fin de 6ème, dans des items où il s'agit de comparer des angles, dont les longueurs de côté sont différentes. Nous rattachons à ces mêmes conceptions certains résultats d' EVAPM6 1987 qui pointent d'autres difficultés. Il s'agit du tracé de la bissectrice d'un angle dans deux conditions différentes :

- l'angle est représenté par deux segments de même origine : la réussite est alors de 69% (item EXA18) ;
- il s'agit de l'angle BAC d'un triangle : la réussite est de 28%, il y a 25% de non-réponses et les autres réponses comportent souvent le tracé d'une demi-droite issue de B (et non de A) qui n'est pas non plus identifiable avec une hauteur ou une médiane (item EXC4).





Dans les deux cas, la taille et l'orientation de l'angle sont similaires. Ce résultat nous incite donc à attribuer la différence considérable des taux de réussite davantage au concept d'angle qu'à celui de bissectrice. Près des trois quarts des élèves ont beaucoup de mal à lui donner du sens quand il n'est pas présenté sous sa forme «primitive», c'est-à-dire scolaire, et à être capable de le reconnaître comme sous-figure d'une autre figure.

[3] Balacheff N. (1988), «Une étude des processus de preuve en mathématiques chez des élèves de collège», Thèse d'état, Université Grenoble I, p. 395-464.

2. La conception de l'angle comme paire de segments ayant une extrêmité commune constitue un obstacle cognitif d'origine didactique

Notre analyse nous a conduit à affirmer que cette conception constitue un obstacle cognitif, c'est à dire une connaissance qui produit des réponses adaptées dans un certain contexte, fréquemment rencontré mais qui engendre des réponses fausses hors de ce contexte et qu'il est difficile de déstabiliser.

Nous avons fait l'hypothèse que cet obstacle était d'origine didactique, c'est-à-dire produit par les choix effectués par l'enseignement pour introduire ce concept.

Nous estimons avoir validé cette hypothèse de deux manières :

- D'une part, en fournissant une explication s'appuyant sur une analyse des rapports à l'espace mis en oeuvre dans la présentation usuelle des angles, analyse que nous ne faisons qu'évoquer. Introduire l'angle en tant qu'objet de l'espace graphique, comme le réalise le manuel analysé ci-dessous (voir l'extrait en pages suivantes) a des conséquences spécifiques : la notion a toute chance d'hériter des propriétés principales de ces objets, et en particulier de leur caractère «fini». Or, contrairement à la plupart des «figures» élémentaires de la géométrie, l'angle n'a pas de représentation matérielle convenable sous forme d'une partie de l'espace dont l'étendue soit de dimension finie.
- D'autre part, en élaborant et expérimentant un processus d'enseignement alternatif permettant aux élèves de surmonter cet obstacle dans des situations a-didactiques. C'est ce processus qui fait l'objet de la quatrième partie de cet article.

B - Analyse d'un exemple d'introduction de la notion d'angle en CM1

1. Analyse de la première activité (le billard)

En ce qui concerne l'espace

Cette activité relève du domaine spatial, mais le travail de l'élève porte sur l'espace graphique dans lequel il doit représenter le déplacement de la boule conformément à une situation qui est seulement évoquée. Le problème posé fait appel à la représentation d'une réalité, et cette représentation est elle-même proposée comme une autre réalité, relevant implicitement du même modèle, sur laquelle s'effectue le travail de l'élève.

La question posée est une prévision : la boule blanche, lancée dans la direction indiquée sur la figure, peut-elle, après plusieurs rebonds, pousser la boule 3 dans le trou ?

Dans cette situation, le concept d'angle peut-il être construit par les élèves comme un outil permettant de résoudre le problème ?

Remarquons tout de suite que la situation ne valide pas l'action de l'élève : s'il n'a pas compris comment se font les rebonds de la boule, s'il n'a pas su reporter des angles égaux, seule la correction par l'enseignant pourra le lui faire savoir.

RETRANCHER UN NOMBRE DE DEUX CHIFFRES

137 − 13	***137 − 13 = (137 − 10) − 3 = 127 − 3 = 124***				
158 − 24	266 − 11	389 − 48	996 − 92	276 − 63	
147 − 32	495 − 52	884 − 71	748 − 35	698 − 87	

TRACÉ ET REPRODUCTION D'ANGLES

Présentation

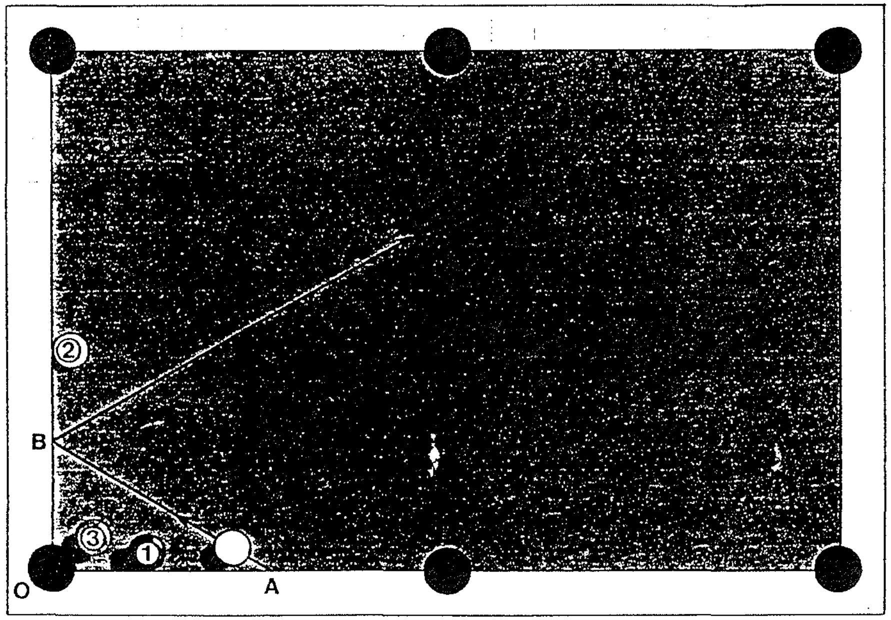
Thomas et Sébastien font une partie de billard américain. La bille blanche doit envoyer les autres billes dans les trous.

C'est à Thomas de jouer, il frappe la bille et pense aussitôt qu'il va réussir à faire rentrer la bille n° 3 dans le trou.

Sébastien, lui, est sûr du contraire.

Lequel des deux a raison?

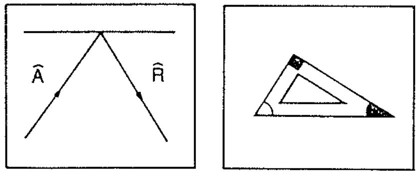
Pour t'aider à trouver qui a raison, voici un rectangle représentant la table de billard.



• Reproduis-le sur ton cahier d'essais puis marque les points A et B.

• Trace la suite de la trajectoire de la bille en respectant la règle suivante :
chaque fois qu'une bille lancée rencontre un bord, elle rebondit selon un angle égal à son angle d'attaque.

• Reporte les angles égaux en utilisant une équerre identique à celle-ci. Colorie-les d'une même couleur.



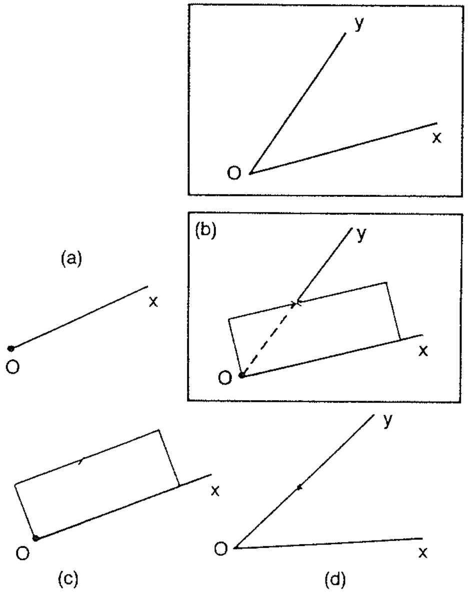
$\widehat{A}$ angle d'attaque
$\widehat{R}$ angle de rebond
$\widehat{A} = \widehat{R}$

Reproduction d'angles

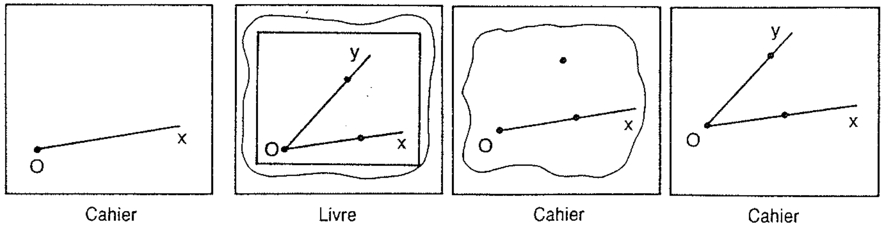
A l'aide d'un gabarit et d'une règle
Reproduis l'angle $\widehat{xOy}$ sur une feuille de papier blanc.

Fabrication du gabarit
1. Trace sur une feuille de carton souple un rectangle dont les côtés mesurent 1 cm et 5 cm. 2. Découpe-le. Il te servira de gabarit.

• Lis cette liste d'instructions puis exécute le tracé.
1. Marque le sommet O de l'angle et trace un côté (a).
2. Comme sur le dessin, place le gabarit sur l'angle à reproduire puis marque l'écartement (b).
3. Reporte l'écartement de l'angle (c).
4. Trace le deuxième côté et colorie la zone comprise entre les deux côtés.



A l'aide d'un calque et d'une règle
Reproduis à nouveau l'angle de l'exercice précédent sur ton cahier d'essais, en suivant les étapes de reproduction ci-dessous.



• Découpe les deux angles que tu viens de reproduire, puis vérifie par superposition sur le modèle que tu n'as pas commis d'erreur.

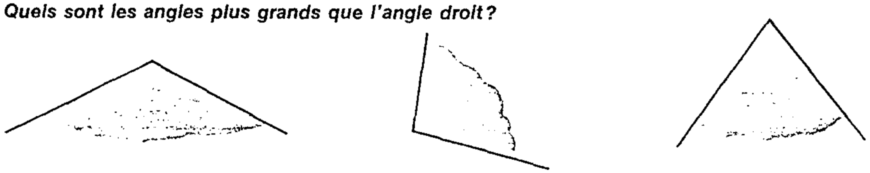
Extrait du manuel Bouchet et al. (1989), Collection Chapuis CM1, Nathan.

Pour reproduire ou reporter des angles avec un calque ou un gabarit, il est important :
— de bien relever les points choisis,
— de placer avec précision les instruments,
— et de tracer avec soin les côtés de l'angle (crayon finement taillé).

TRAVAUX ET EXERCICES

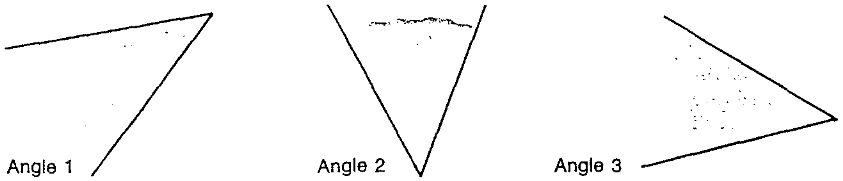
★

1 Reproduis ces angles sur ton cahier à l'aide d'un papier calque et d'une règle.
Quels sont les angles plus grands que l'angle droit?



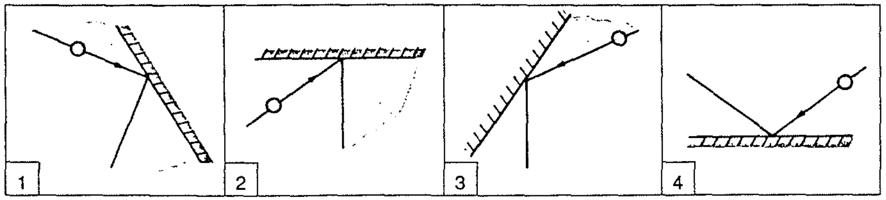
Angle 1 Angle 2 Angle 3

2 Reproduis ces trois angles à l'aide du gabarit et d'une règle.
Deux angles sont égaux. Lesquels?

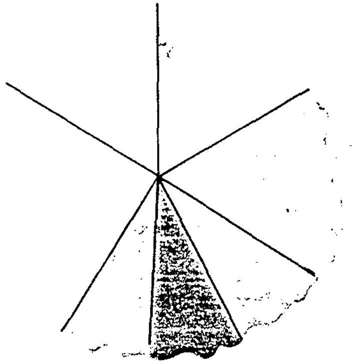


★★

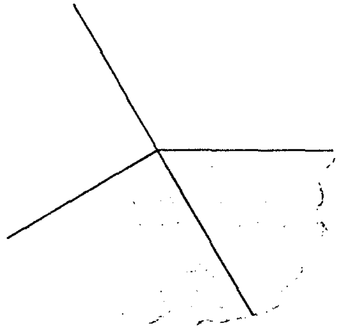
3 Chacune de ces figures représente la trajectoire d'une bille qui rebondit contre un bord du billard.
Indique les trajets qui sont possibles et ceux qui sont impossibles.



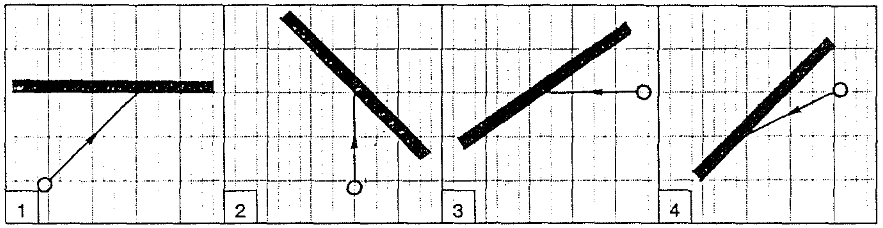
4 Utilise uniquement la règle et l'équerre pour reproduire ces angles.



5 A l'aide de l'équerre et de la règle, reproduis ces angles.



6 Reproduis ces figures sur ton cahier d'essais, puis complète chaque trajectoire de la bille. Utilise les instruments qui te paraissent les mieux adaptés. Colorie les angles égaux.



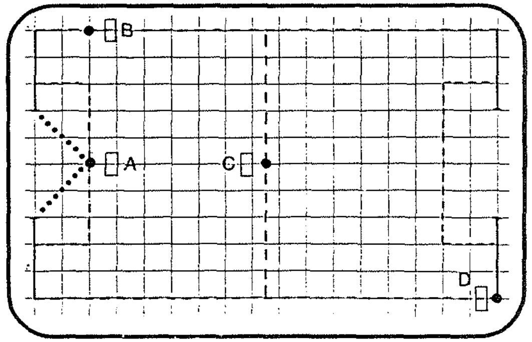
JEU

Cécile s'amuse sur son ordinateur à dessiner les angles de tir des différents joueurs.

Elle a déjà délimité la zone de tir du joueur A.

• Reproduis sur ton cahier d'essais ce terrain de football, puis trace et colorie les angles de tir des joueurs. Tu peux en placer d'autres.

A ton avis, où est-il préférable de se placer sur le terrain pour que l'angle de tir soit le plus grand?



Regardons de plus près les consignes en supposant que l'enseignant propose l'exercice exactement comme il est décrit dans le manuel.

• La possibilité de trouver qui, des deux joueurs, a raison suppose que les élèves soient capables de reproduire le dessin de manière exacte, en particulier les positions des boules, et la direction du déplacement de la boule blanche. Bien sûr, il suffit de noter la position exacte de A et de B, mais pourquoi les enfants comprendraient-ils que la réponse à la question posée dépend, dans cette situation, de l'exactitude de leur reproduction, ce qui n'est pas le cas dans d'autres situations ?

• Les auteurs doutent, fort justement, que les enfants soient capables de déterminer eux-mêmes la loi du rebond. Aussi la leur expliquent-ils en utilisant, dès le début, le terme d'angle (dont c'est la première apparition dans ce contexte ; auparavant les enfants ont repéré des angles droits de quadrilatères) et en leur proposant un moyen permettant d'obtenir la construction attendue, grâce à un subterfuge : avoir choisi un angle d'attaque de 60 degrés, permettant d'utiliser l'équerre.

Le travail de modélisation géométrique de la situation réelle est donc absent, son résultat est présenté aux élèves comme allant complètement de soi et l'activité spatiale ne sert que de prétexte à un travail de tracés, dont le résultat ne peut en aucun cas être confronté avec ce qui se passerait dans la réalité.

Notons enfin que l'utilité sociale d'une telle référence à l'espace n'est pas grande.

En ce qui concerne l'espace graphique

L'activité proposée est donc une activité de tracé de segments, le problème étant de déterminer leurs directions en appliquant une règle de construction qui supposerait la compréhension par les élèves de l'égalité des angles et de la façon de les reporter. Mais puisque c'est la première activité sur ce sujet, les auteurs jugent nécessaire de les aider en suggérant l'emploi de l'équerre ; toutefois, le maître aura bien besoin de guider les élèves s'il veut qu'une majorité d'enfants puissent aller jusqu'au bout de la tâche. De nombreuses observations dans d'autres situations, plus simples, laissent penser que l'emploi de l'équerre n'est pas si simple et qu'il faut déjà avoir compris ce que signifie le report d'un angle pour pouvoir l'utiliser à bon escient.

Conceptions de la notion d'angle

Trois conceptions coexistent à l'école primaire :

- le secteur angulaire, ensemble des points situés entre deux demi-droites (une paire de demi-droites définit deux secteurs, un saillant et un rentrant) ;
- l'angle de secteur, classe de secteurs isométriques (superposables), représenté par des secteurs particuliers ;
- l'angle de rotation, ou angle d'un couple de demi-droites, que l'on rencontre lorsqu'on parle du changement de direction d'un véhicule ou dans le déplacement de la tortue Logo.

Notons de ce point de vue, l'ambiguïté et la complexité de la situation proposée :

- le trajet de la boule évoque les changements de direction et donc l'angle de rotation ;

- la façon de construire fait appel à l'angle de secteur.

Notons aussi le choix fait par les auteurs de ne pas introduire ce dernier concept qui pourtant permet une certaine clarification de «l'imbroglio des angles». Mais ce choix est conforme aussi au programme de 6ème.

2. ANALYSE DE LA DEUXIÈME ACTIVITÉ (REPRODUCTION D'ANGLES)

C'est encore une activité de tracé, qui généralise, mais en la situant dans un cadre différent, l'activité précédente.

Le tracé de départ ne représente plus le trajet d'une boule, il constitue un objet qu'il s'agit de «reproduire». La consigne est assez floue : les caractéristiques du dessin qu'il faut reproduire, la position par rapport au rectangle, la longueur des segments Ox et Oy, ne sont pas précisées ; les auteurs décrivent successivement deux algorithmes qui doivent permettre aux élèves, sans doute, à la fois de comprendre ce qu'est un angle et de savoir en reproduire.

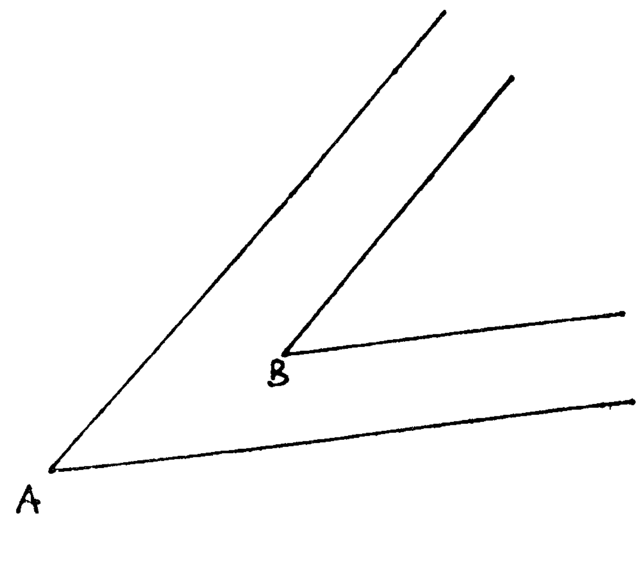
Nous voyons ici fonctionner un mode de présentation des connaissances, typique de l'enseignement élémentaire de la géométrie, l'ostension. Ne pouvant donner à des enfants de neuf ans une des définitions possibles du concept d'angle (ce qui serait d'ailleurs en contradiction avec les instructions officielles), ne pouvant non plus faire appel à une situation a-didactique le faisant fonctionner, les auteurs choisissent d'associer le mot angle à un tracé particulier, accompagné d'une série de «marqueurs» nouveaux pour les élèves, comme les notations Ox et Oy ou la représentation de zones colorées non bordées par des traits.

Remarquons qu'aucune information complémentaire ne vient expliciter la différence entre reproduire un angle et reproduire un triangle. Dans ce dernier cas, la figure à reproduire est formée de deux côtés et non de trois, dont on colorie une partie située entre les deux côtés.

3. ANALYSE DES EXERCICES

Les exercices peuvent-ils remettre en cause la conception énoncée ci-dessus ?

Aucun des exercices 1, 2, 4, 5 du manuel ne peut faire apparaître une question ou une contradiction comme le pourrait l'exercice suivant :



A = B ?

Les exercices 3 et 6 sont une réplique exacte de la première activité. Quant au jeu, il présente les mêmes caractéristiques que les deux activités de présentation de l'angle, à savoir l'illusion que l'enfant peut donner du sens à n'importe quelle situation évoquée et qu'il suffit de lui montrer sur un exemple ce qu'il faut faire pour qu'il puisse le réaliser à son tour.

4. CONCLUSIONS

Nous voyons donc sur cet exemple[4], les deux caractéristiques les plus importantes de l'enseignement de la géométrie à l'école élémentaire (et dans une moindre mesure, en 6ème -5ème ; on retrouve tous les exercices à support spatial: billard, terrain de foot, radar dans des manuels de 6ème, comme exercices d'application).

La référence à l'espace, lorsqu'elle existe, suppose acquises les connaissances spatiales correspondantes dont celles relatives aux représentations spatiales.

Un dessin réalisé par l'adulte semble suffire pour donner au problème une signification spatiale, la transposition de la situation réelle à la situation représentée est supposée évidente, la capacité des élèves à utiliser, dans une situation réelle, les outils mathématiques introduits n'est pas testée.

L'introduction de la notion géométrique se fait par ostension, sans mise en oeuvre de situation a-didactique commandée par la notion.

La seule vue des tracés, accompagnés des notations mathématiques usuelles, doit suffire à définir les objets géométriques et leurs propriétés. Dans ces conditions, le développement de la conception de l'angle en tant que paire de segments semble aller de soi.

II - OBJECTIFS ET DÉMARCHE GÉNÉRALE D'UN NOUVEAU PROCESSUS

A - LE CHOIX DES PROBLÈMES SPATIAUX À FAIRE EXPLORER PAR LES ÉLÈVES

Nous avons analysé les difficultés relevées comme l'effet de connaissances inadéquates, intervenant ici comme des obstacles. Notre objectif est donc de développer des situations d'apprentissage permettant la construction de certains concepts spatio-géométriques par l'élève comme des connaissances nécessaires au contrôle des situations spatiales puis comme savoirs de géométrie.

---

4 Mais c'est absolument général. Pour un autre exemple, voir Eiller et al., «Math et Calcul CM2» Hachette, p. 96 et suivantes.

Nous avons alors recherché quels sont les problèmes spatiaux, sources éventuelles de situations a-didactiques, dont la résolution nécessite la mise en oeuvre du concept d'angle. L'examen des pratiques courantes n'en fournit pas d'exemple :

- la reconnaissance des formes des objets s'appuie sur des propriétés dont certaines peuvent être décrites, par un observateur connaissant de la géométrie, en termes d'angles de secteurs. Mais ce n'est pas ainsi qu'ils sont désignés dans la culture commune. Le terme approprié est «coin».

- les déplacements dans les lieux domestiques, le réglage du rétroviseur d'une voiture peuvent être eux aussi décrits en termes d'angles (de rotation) mais ces actions ajustées par des suites d'essais-erreurs ne nécessitent pas de conceptualisation de l'angle.

Le déplacement d'une boule de billard fait certes appel à la notion d'angle, ainsi qu'à d'autres connaissances spatiales dont l'acquisition est peu susceptible d'être réalisée dans des conditions scolaires.

- la conceptualisation de l'angle dans l'espace réel n'est nécessaire que dans des cas très particuliers : repérage des astres, parcours d'orientation à l'aide de la boussole, détermination du cap en navigation, fabrication de plan par un expert-géomètre, règlage d'une machine-outil, toutes situations impossibles à adapter à la classe si on ne veut pas se contenter de les évoquer mais en faire le centre de situations a-didactiques.

B - LES CONDITIONS SITUATIONNELLES FAVORABLES À LA CONCEPTUALISATION GÉOMÉTRIQUE

Dans les situations courantes que nous venons de décrire, l'aisance des rétroactions peut expliquer le peu de conceptualisation associée. Dans celles que nous avons qualifiées de cas très particuliers, au contraire, la distance dans le temps et l'espace entre le but à atteindre et le déroulement des actions (penser à la navigation par exemple) conduit à l'utilisation de concepts beaucoup plus élaborés. Remarquons que cette caractéristique est celle aussi des situations non ordinaires, pour lesquelles la démarche par «approximations successives» est d'un coût beaucoup trop élevé : dans une usine, les pièces sont fabriquées dans un autre lieu et à un autre moment que ceux où elles sont utilisées ou conçues.

D'autre part, pour qu'une situation d'apprentissage soit efficace, il est nécessaire que la comparaison entre le but à atteindre et la réalisation ayant engagé les conceptions du sujet soit facile et rapide, afin qu'il puisse les remettre en cause et les modifier au cours de «parties» successives. Ceci est le cas dans les situations ayant certaines caractéristiques propres à l'espace des manipulations, comme la taille (petite), la possibilité de déplacer les objets pour les superposer, les assembler, etc.

Aussi, nous avons fait le choix d'introduire la conception «angle de secteur», en liaison avec la forme de petits objets plans, mais en plaçant les élèves dans une situation où la prise en compte des angles soit le moyen le plus efficace pour résoudre les problèmes posés et où la conception erronée décrite ci-dessus soit disqualifiée.

C - CONSÉQUENCES POUR L'ÉLABORATION DES SITUATIONS A-DIDACTIQUES

Nous avons donc conçu des situations a-didactiques dans lesquelles :

-les problèmes portent sur des objets petits, faciles à comparer,

-les actions sont à réaliser dans d'autres lieux que ceux où on doit prendre de l'information,

-la réussite ou l'échec sont relativement faciles à évaluer,

-les formulations sont issues de la nécessité de communiquer à quelqu'un d'autre les informations nécessaires à la réalisation d'objets identiques à ceux dont dispose l'émetteur,

-les différentes méthodes utilisées sont confrontées du point de vue de leur efficacité, et de leur facilité à être mises en oeuvre.

Au cours de ces confrontations, le vocabulaire utilisé spontanément par les élèves est, soit repris par l'enseignant, s'il est adéquat, soit refusé (en maths, on ne dit pas «pointe» mais «angle»), sans qu'une définition soit apportée. Les termes mathématiques sont institutionnalisés, à l'issue du contrôle, après l'analyse faite avec les enfants de leurs erreurs ou difficultés.

D - LES SITUATIONS CORRESPONDANTES

Comme nous l'avons vu, les angles interviennent dans les situations micro-spatiales sous forme de composantes contextuelles associées à la reconnaissance des formes des objets plans, en particulier des polygones.

Deux problèmes portant sur ce type d'objets nous ont paru susceptibles d'être étudiés.

a) la communication d'informations pour faire reproduire un quadrilatère à quelqu'un qui ne peut pas consulter le modèle ou pour faire retrouver ce quadrilatère parmi d'autres ayant les mêmes longueurs de côté ;

b) la communication d'informations pour faire choisir à quelqu'un des polygones dont l'assemblage pave le plan alors qu'il ne voit pas le début de l'assemblage.

Le concept d'angle de secteur est-il nécessaire à la résolution de ces problèmes?

De manière générale, la réponse est négative puisque tout angle peut être reproduit en construisant un triangle sur ses côtés, triangle simple à reproduire dès lors qu'on peut mesurer la longueur de ses côtés. La prise en compte des angles n'a donc de chance de se produire que si le repérage ou la construction de triangles liés aux angles, est moins naturelle, pour des raisons diverses liées à la nature matérielle des objets que cette prise en compte.

C'est le processus correspondant à b) que nous présentons.

E - LA SITUATION DE BASE RETENUE : LE JEU DU GÉOMÉTRISCRABBLE

Il s'agit de prendre et communiquer des informations pour choisir des polygones qui pavent le plan.

Dans un puzzle[5] à pièces polygonales comme le tangram, à chaque noeud, la somme des angles des pièces incidentes est égale à 360 degrés. Au cours de la reconstitution du puzzle, la recherche d'une pièce est guidée par la taille de l'angle à «remplir», mais les longueurs doivent aussi correspondre, d'où la difficulté à reconstituer une figure donnée d'avance, un carré par exemple.

Nous avons cherché à fabriquer un jeu, ayant comme but de paver la plus grande surface possible avec un nombre donné de pièces, mais où l'intervention des longueurs soit la plus minime possible. Le choix de polygones, convexes ou non, dont les mesures de tous les angles sont des multiples de 30 degrés permet de remplir ces conditions. A un même jeu de pièces, correspond un très grand nombre de pavages différents. Les figures 1 et 2 (voir pages suivantes) montrent deux des solutions pour le même jeu de huit pièces.

Ce matériel sert de support à plusieurs jeux, de structure semblable à celle du scrabble : les pièces sont partagées entre plusieurs joueurs, chacun à tour de rôle pose une pièce si elle satisfait aux conditions définies par les règles, pour agrandir le polygone déjà formé sur la table.

Dans un premier temps, le choix des pièces se fait sous le contrôle de la vue, dans un deuxième temps, le joueur qui dispose du polygone commencé doit trouver un moyen pour commander la pièce qu'il désire à un marchand. La solution la plus économique est de prendre, par superposition, la trace de l'angle à «boucher», ce qui constitue l'ébauche de la représentation de l'angle de secteurs correspondant.

III - UNE SITUATION GENERIQUE

A - LE MATÉRIEL

Il est constitué de pièces découpées dans du carton, de forme polygonale, convexes ou non ; elles sont conçues de telle manière qu'il existe au moins une solution au problème posé par leur assemblage, en utilisant la règle suivante : Deux côtés de la n-ième pièce à poser doivent toucher deux côtés du polygone formé avec les n-1 pièces déjà posées.

Cette condition n'a aucune chance d'être réalisée si la forme des pièces est choisie au hasard ; par contre, elle l'est d'emblée si les pièces sont découpées dans un polygone quelconque comme dans l'exemple de la figure 3. Toutefois, ce découpage doit être «calculé» pour répondre à un certain nombre de contraintes liées aux objectifs des situations ; nous le décrirons donc de manière plus détaillée après avoir décrit et analysé ces dernières.

B - LE JEU DU GÉOMÉTRISCRABBLE

Un jeu de n pièces est commun à p joueurs. Deux des pièces sont posées sur la table, jointives par un côté, suivant une configuration déterminée à l'avance ; les autres pièces sont distribuées aux joueurs. A tour de rôle, chacun se procure une pièce de son

5 L'idée est adaptée de Elem-Math VII, «Aides pédagogiques pour le cycle moyen», publication de l'APMEP n°49, situation n° 2, p. 81-83.

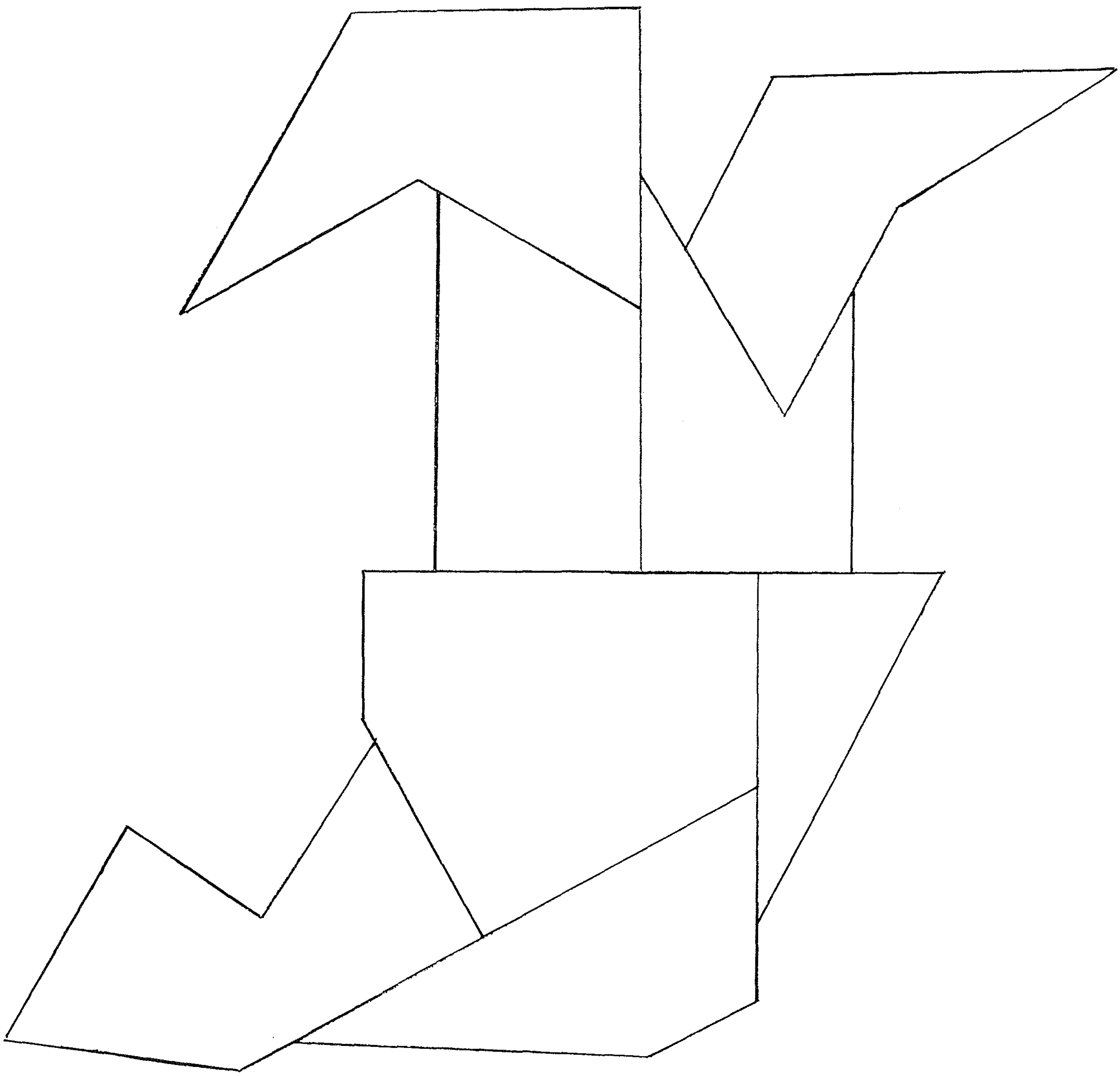


fig.1

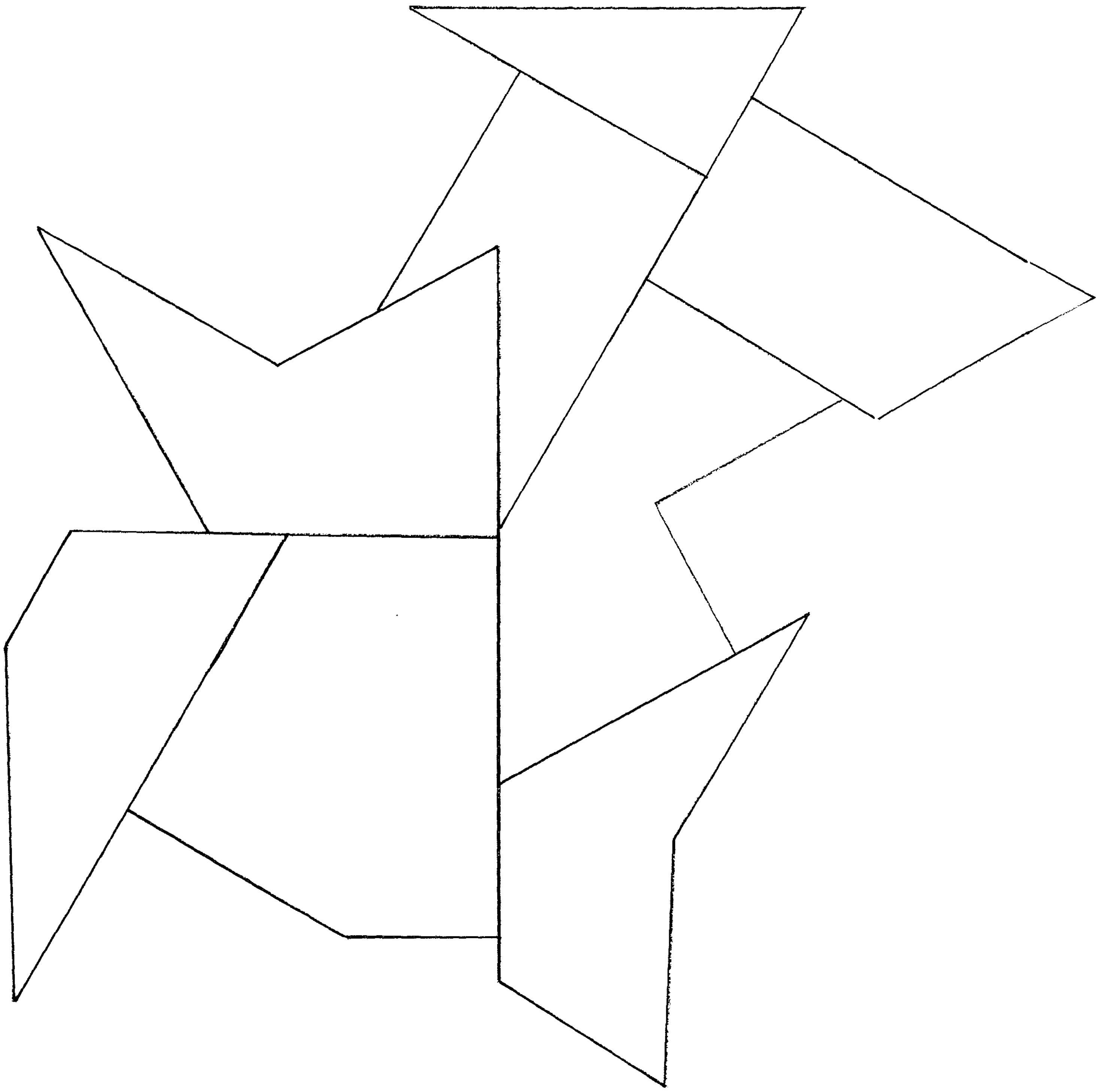


fig.2

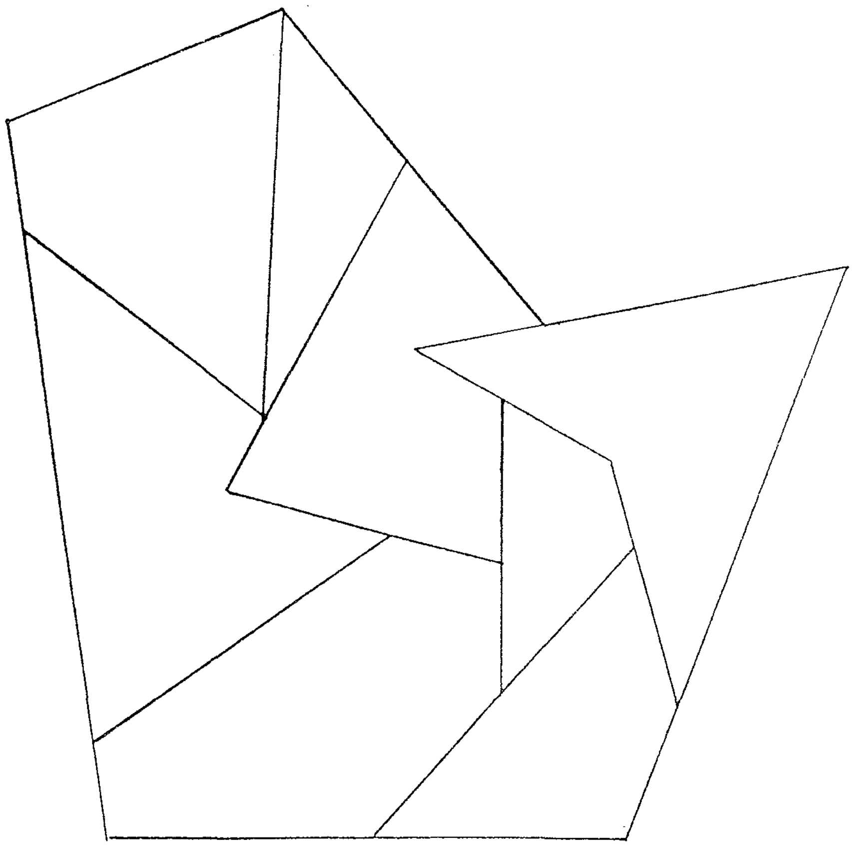


fig.3

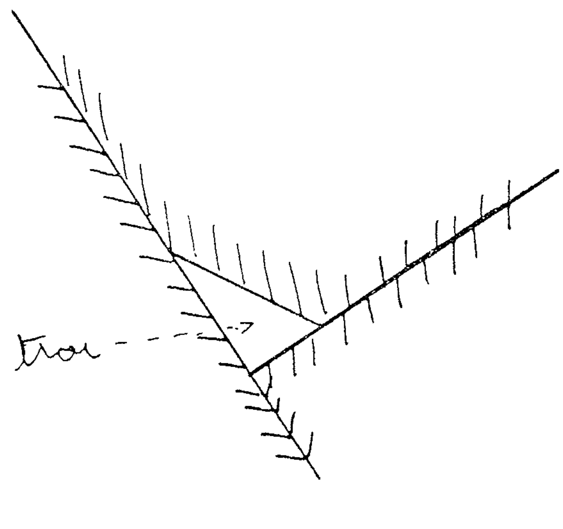


fig.4

lot et peut la poser si elle touche sans chevauchement, le long de deux de ses côtés, deux côtés du polygone formé par les pièces déjà assemblées suivant cette même règle. Sinon le tour passe au joueur suivant. Le premier qui s'est débarrassé de ses pièces a gagné.

Examinons l'effet, sur les connaissances nécessaires pour jouer, des moyens de se procurer les pièces : ces moyens sont définis par un ensemble de règles dont nous allons montrer qu'il constitue une variable didactique essentielle pour la construction de situations d'apprentissage de la notion d'angle.

C - VARIABLES DIDACTIQUES

1. La règle

Règle n° 1

Chaque joueur tire au hasard une pièce, il essaie de l'encastrer convenablement. S'il échoue, il replace la pièce dans son lot, s'il réussit, il la laisse posée ; dans les deux cas, le tour continue. Dans ces conditions, la réussite finale est due au hasard ; les joueurs doivent seulement être capables de déterminer si une pièce s'encastre bien et sinon d'organiser de manière efficace la recherche d'un autre angle ou d'un autre endroit pour cette pièce.

Règle n° 2

Chaque joueur tire une pièce et doit prévoir à voix haute quelle partie de la pièce il va pouvoir encastrer et à quel endroit du puzzle elle se place.

- S'il prévoit bien, c'est au suivant de jouer.
- S'il prévoit mal (l'angle de la pièce indiqué ne s'adapte pas à l'endroit indiqué), il perd son tour et remet sa pièce dans l'enveloppe
- Si le joueur dit qu'il n'y a pas de place pour sa pièce, il le vérifie.
  - si c'est vrai, il remet sa pièce et en tire une autre, avec laquelle il rejoue.
  - si c'est faux, il remet sa pièce dans son lot et passe son tour.

Ces règles favorisent les bonnes prévisions, qui s'appuient sur les comparaisons visuelles entre les angles des côtés de la pièce tirée et les angles extérieurs du puzzle.

Règle n° 3

Cette fois-ci, ce n'est pas le hasard qui décide de la pièce fournie au joueur mais c'est lui qui doit en commander une, dont il pense qu'elle convient à un endroit explicité par lui à l'avance, à un marchand (qui n'est aucun des joueurs). Mais le joueur ne voit pas l'ensemble des pièces dont dispose le marchand. Il doit donc fournir à ce dernier une information lui permettant de répondre à sa commande. Pour cela il dispose d'un crayon et d'une feuille de papier, et peut avoir recours à tout instrument qui lui parait nécessaire.

Que peut alors faire le joueur ?

Bien sûr, le marchand pourrait dupliquer toutes ses pièces sur la feuille de papier, et les numéroter pour que le joueur les commande "à l'oeil". Cette solution, de "commande par correspondance" n'est pas celle que nous avons choisie, c'est à l'acheteur de fournir une information et au marchand soit de satisfaire son client, soit de lui dire qu'il ne peut pas (comme dans les pratiques sociales les plus courantes).

Quelle information le joueur doit-il donc fournir au marchand ?

La solution la plus économique consiste à reproduire par superposition un angle extérieur du polygone déjà formé en demandant au marchand de lui fournir une pièce ayant une partie se superposant à cet angle. Cette solution suppose que les élèves, émetteurs et récepteurs, soient capables de donner du sens à une figure constituée de deux segments de même sommet, c'est à dire de concevoir qu'elle permet de représenter la propriété que doit posséder la pièce nécessaire à la poursuite du puzzle.

En l'absence de cette connaissance, on peut prévoir deux autres stratégies :

• l'enfant émetteur peut dessiner ou décrire une pièce polygonale, anticipant une forme possible, mais sans recours à la superposition. L'échec probable du marchand à trouver cette pièce peut conduire celui-ci soit à affirmer qu'il ne peut répondre à la demande, soit à rechercher une pièce qui ait un angle superposable avec l'un de ceux de la pièce dessinée. Dans un cas comme dans l'autre, la rétroaction de la situation peut inciter l'élève émetteur à modifier l'information transmise et à ne dessiner que les traits pertinents de la pièce qu'il désire.

• le joueur peut aussi dessiner par superposition le polygone déjà constitué et demander une pièce pouvant s'encastrer convenablement à l'endroit qu'il désigne, puis compléter son dessin, la pièce une fois posée, pour commander la suivante. Cette solution contient en germe la solution visée, puisqu'elle met en oeuvre la représentation par superposition. Toutefois, si elle est considérée comme aussi efficace que la représentation d'un angle, rien n'incitera les élèves à cette "décantation". Aussi, il faut trouver le moyen de la rendre plus coûteuse que l'autre, par le biais de l'organisation de la situation.

Conclusion

Nous voyons donc qu'à chaque ensemble de règles correspondent des connaissances implicites différentes, de plus en plus élaborées, à partir desquelles il est possible de construire un enseignement qui vise l'acquisition et la maîtrise par les élèves des savoirs sur les angles correspondants aux classes de CM2 et de 6ème.

2. Autres variables didactiques de ce jeu

La convexité des pièces

L'une de ces variables concerne la nature des pièces : si toutes sont convexes, le concept d'angle risque d'être associé chez les enfants à celui de saillant, alors que le déroulement du jeu n'est pas affecté par ce caractère. Par contre, si parmi les pièces, il y en a qui ont à la fois des angles rentrants et des angles saillants, il faudra trouver un moyen de différencier les deux types dans le message.

La règle d'assemblage

Telle qu'elle est énoncée ci-dessus, elle rend possibles des configurations comme sur la figure 4, c'est à dire des puzzles avec trou. Ces configurations pourraient être intéressantes pour généraliser la notion d'angle à celle d'angle de deux demi-droites d'origines différentes. Si l'on veut éviter ce genre de configuration, il suffit de préciser, dans la règle, que deux côtés consécutifs de la pièce à poser doivent toucher deux côtés consécutifs du polygone déjà constitué.

IV - SITUATIONS DIDACTIQUES BATIES AUTOUR DU JEU DU GEOMETRISCRABBLE

Dans cette partie, nous donnerons successivement, pour chaque leçon, une description et un compte rendu d'observations. Nous avons reproduit tout ou partie de ce processus trois années consécutives au CM_2. Les résultats des observations s'appuient donc sur l'observation de comportements que nous avons pu relever au moins deux fois. Les résultats quantitatifs correspondent à l'année 89-90.

PREMIÈRE LEÇON

Objectifs

- familiariser les enfants avec ce type de matériel, qui présente à la fois des ressemblances et des différences avec les puzzles auxquels ils sont habitués.
- leur fournir une occasion de faire des comparaisons d'angles de manière visuelle.

Organisation de la classe

Les élèves sont par trois, chaque groupe dispose d'un jeu de 2O pièces. Ils en tirent 2, qu'ils posent sur la table en les accolant par un côté ; puis ils se partagent les 18 pièces restantes.

Consignes et déroulement

Première phase : avec la règle n° 1.

Chaque joueur tire au hasard une pièce, il essaie de l'encastrer convenablement ; s'il échoue, il replace la pièce dans son lot, s'il réussit, il la laisse posée ; dans les deux cas, le tour continue.

Recherchons à quelle condition le jeu peut se dérouler de manière satisfaisante. S'il n'existe pour chaque pièce qu'une seule configuration pour pouvoir la placer, le jeu sera presque toujours bloqué : d'une part, il faudra au début que ce soit le maître qui place les deux premières pièces , d'autre part, en cours de jeu, puisqu'il y a tirage avec remise, il peut arriver que ce ne soit qu'après un grand nombre de tours qu'un joueur sorte la pièce nécessaire. Pour éviter cet écueil, il suffit de choisir des pièces dont les mesures des angles sont toutes des multiples de 30 degrés. L'assemblage de telles pièces fait apparaître des angles qui ont eux aussi une mesure multiple de 30 degrés. Il y a alors une multitude de configurations possibles pour un même ensemble de pièces.

C'est le choix de ce matériel que nous avons fait. La figure 5 montre comment il est constitué. L'expérience montre qu'il n'y a que très peu de possibilités de blocages pour cause de longueur de côtés. Ces blocages se produisent tout à fait à la fin du jeu et ressemblent à ce qui se passe au vrai jeu du scrabble quand les joueurs ne peuvent pas placer leurs dernières lettres.

La pratique de ce jeu étant seulement destinée à placer les élèves dans le contexte, avec une règle simple, il est arrêté quand chaque équipe a fait deux parties.

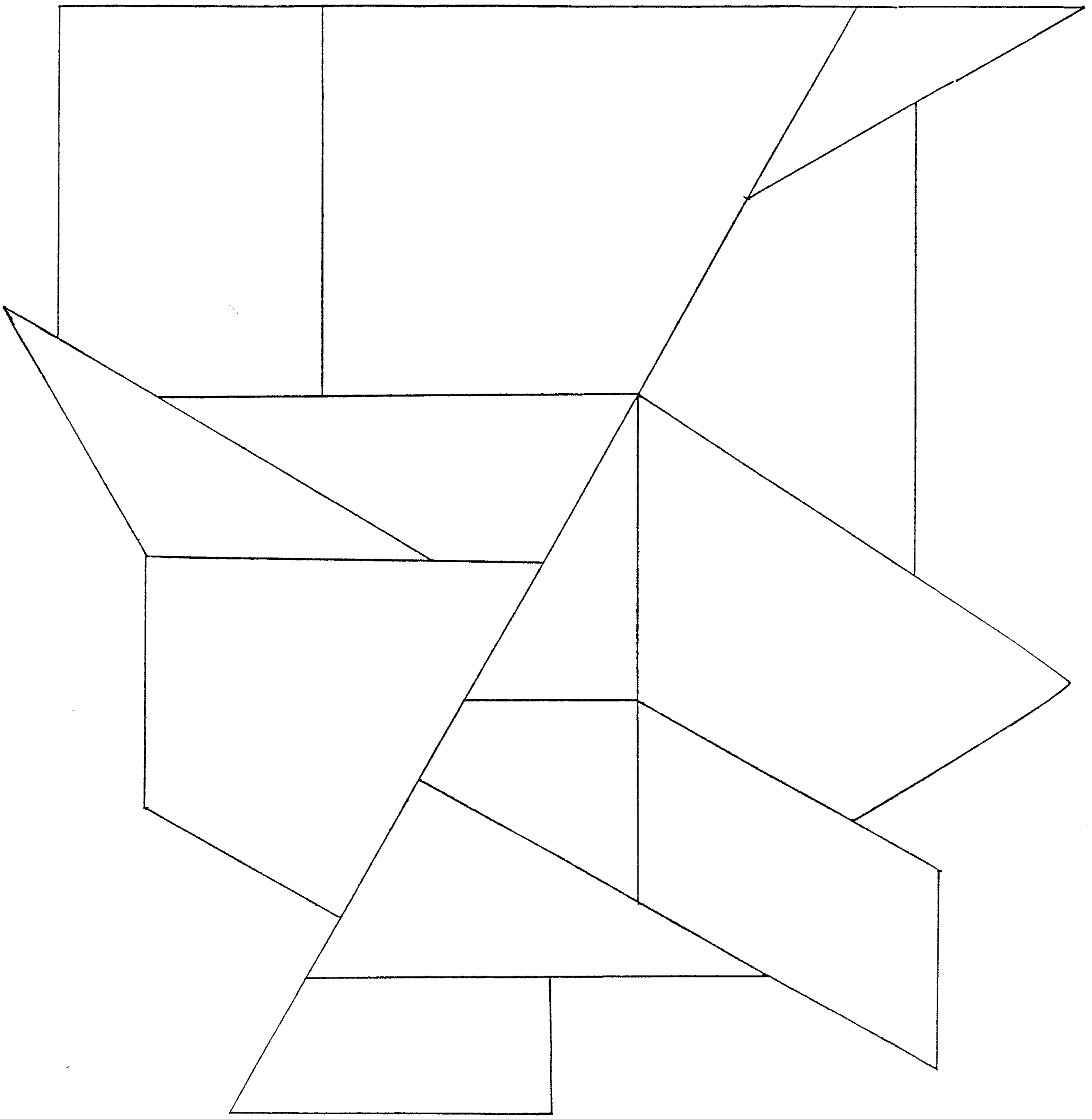


fig.5

Deuxième phase : avec la règle n°2.

Là aussi, les élèves sont par équipes de trois. Le matériel est le même (pour la même raison).

L'enseignant annonce :

« Vous allez rejouer avec ce matériel mais les règles vont être différentes.
Une fois la distribution faite, vous cachez vos pièces dans l'enveloppe que je vous ai distribuée. Le premier joueur tire une pièce et doit prévoir à voix haute quelle partie de la pièce il va pouvoir encastrer et à quel endroit du puzzle elle se place.
Nous allons faire ensemble un début de jeu au tableau».

Le maître place au tableau les deux pièces du départ et appelle deux élèves. Le premier tire et prévoit, puis le second, puis le maître. Au fur et à mesure, en fonction de ce qui se passe, l'enseignant énonce les règles suivantes :

• Si le joueur prévoit bien, c'est au suivant de jouer.

• S'il prévoit mal (l'angle de la pièce indiqué ne s'adapte pas à l'endroit indiqué), il perd son tour et remet sa pièce dans l'enveloppe

• Si le joueur dit qu'il n'y a pas de place pour sa pièce, il le vérifie.
 - si c'est vrai, il remet sa pièce et en tire une autre, avec laquelle il rejoue.
 - si c'est faux, il remet sa pièce dans son lot et passe son tour.

• Le premier dont l'enveloppe est vide a gagné.

Quand tous les élèves ont fait deux ou trois jeux, l'enseignant fait rapidement le bilan des parties gagnées ou perdues par chacun, mais sans insister. Il annonce que ces jeux préparaient la leçon du lendemain.

Résultats des observations

Phase 1

Ce premier jeu permet aux enfants à la fois de se familiariser avec le matériel ,en faisant attention à placer convenablement les pièces qui ont tendance à glisser, et de recevoir du maître des réponses aux questions (sur la règle) qu'ils se posent au fur et à mesure du déroulement de la première partie : «peut-on retourner les pièces ?», «est-ce qu'il faut que cela fasse une forme particulière ?», «tout s'emboîte bien mais il y a un trou dans le puzzle, est-ce que je peux poser ma pièce ainsi ? ».

Une fois les réponses aux questions bien comprises par les enfants, cette phase est arrêtée puisque le jeu ne fait intervenir que le hasard.

Cette phase remplit bien son rôle et dure environ 10 minutes.

Phase 2

Avec les nouvelles règles du jeu, il faut comparer à l'oeil les angles de la pièce tirée avec les angles extérieurs du puzzle déjà formé.

Nous avons remarqué :

- des différences individuelles très grandes quant à la capacité à explorer le puzzle et la pièce ; certains enfants tiennent la pièce dans la main et ne s'intéressent qu'aux angles qu'ils ont sous les yeux, sans penser à la faire pivoter.
- des différences également importantes quant à l'évaluation à l'oeil de la taille des angles.
- que la vitesse de déroulement du jeu est très variable : certains en sont à la troisième partie quand d'autres n'ont pas fini la première. Toutefois, cette lenteur, liée

à un manque de méthode, ne semble pas constituer un handicap pour la suite des leçons.

- que le langage utilisé par les élèves est très pauvre puisqu'ils ont la possibilité de montrer : «ça, ça rentre là». Nous avons toutefois relevé l'usage du mot «coin», ainsi que du terme «angle droit» dans des cas où en effet, la pièce comportait un tel angle.

DEUXIÈME LEÇON

Objectifs

- placer les élèves dans une situation d'affinement des moyens qu'ils utilisaient pour prévoir quelle pièce choisir dans la situation précédente,
- donner du sens à la représentation d'un angle par le dessin «usuel»,
- donner du sens à la superposition comme moyen de comparer deux angles et de faire expliciter la non-pertinence de la comparaison des longueurs des côtés.

Les deux phases de la leçon y contribuent : d'une part, la situation de communication dans laquelle il s'agit de trouver un moyen écrit de communiquer les informations nécessaires, d'autre part la phase d'explicitation et de comparaison de ces moyens entre les différents groupes de la classe.

Organisation matérielle

Les élèves sont répartis par groupes de trois : deux joueurs et un marchand.

Les premiers sont côte à côte et tournent le dos au marchand.

Ils disposent :

- d'une grande feuille de papier sur laquelle sont collées deux pièces du puzzle, formant un polygone connexe, polygone qu'ils doivent agrandir peu à peu, au fur et à mesure de leurs commandes au marchand,
- de feuilles de papier blanc assez minces pour les messages,
- d'un feutre.

Le marchand dispose de 9 autres pièces : 6 d'entre elles ont des angles multiples de 30 degrés, comme les 2 pièces déjà collées, 3 autres sont intruses, c'est-à-dire n'ont aucun angle multiple de 30 degrés mais leurs angles ont été choisis proches (5 à 10 degrés environ) de ceux des 6 autres pièces. Ces pièces intruses, qui n'existaient pas dans les jeux précédents, ont pour but de mettre en échec, s'ils apparaissent, les messages comportant des dessins d'angles avec des côtés très courts.

Consigne et déroulement

Première phase

L'enseignant, après avoir décrit l'organisation des groupes et le matériel de chacun, continue ainsi :

«Voici la règle du jeu :

Les trois élèves d'un même groupe sont associés, les huit groupes sont concurrents.

Dans chaque groupe, un des émetteurs, chacun à son tour, commandera par un message, une pièce s'emboîtant à un endroit du puzzle désigné par lui à l'avance à l'aide d'un pion.

Le marchand recevra le message et enverra la pièce commandée. L'autre émetteur contrôlera que la pièce obtenue convient bien, c'est-à-dire que l'un des angles de la pièce reçue s'emboîte bien à l'endroit prévu.

- Si c'est bien le cas, la pièce est collée.
- Si ce n'est pas le cas, la pièce est renvoyée.
- Si l'un des angles s'emboîte bien mais qu'il y a chevauchement, les joueurs renvoient la pièce au marchand.
- Si le marchand n'a pas la pièce demandée, il le signale, les joueurs font une autre demande.

Au bout de 15 minutes, tous les groupes arrêtent leurs échanges, celui qui a collé le plus de pièces a gagné.

Avant de jouer, les membres d'un même groupe, allez vous concerter pour trouver un moyen de faire votre commande que le marchand puisse comprendre.»

L'enseignant laisse environ 5 minutes puis lance le jeu en distribuant le matériel. Il interrompt cette première partie au bout de 15 minutes, fait le bilan du nombre de pièces collées par chaque groupe.

Deuxième phase

L'enseignant annonce une deuxième partie avec un nouveau matériel et après qu'un des deux émetteurs ait remplacé le marchand.

Si au moins un groupe de la classe a communiqué grâce à la représentation par superposition de tout le polygone, la consigne est légèrement modifiée pour rendre cette stratégie coûteuse en temps et inciter les enfants à en changer : après chaque commande efficace, le message est laissé au marchand. Un nouveau temps de concertation est donné aux groupes (mais il n'y a pas d'échange entre les groupes, l'évolution doit pouvoir se faire par une réflexion interne sur les difficultés rencontrées). Le jeu est arrêté après 10 minutes.

Troisième phase

La dernière phase est consacrée à un deuxième bilan et à la mise en commun des moyens utilisés et des difficultés rencontrées. Le jeu est donc arrêté et le travail porte sur l'explicitation et la comparaison des divers moyens de réaliser une commande efficace.

L'enseignant demande à un des élèves de venir au tableau donner un exemple de commande pour un angle désigné, il choisit un groupe dont le score est faible : soit parce que n'ayant pas encore compris qu'on ne pouvait demander une pièce entièrement définie, soit parce que dessinant à chaque fois le puzzle tout entier.

Si l'action n'a pas permis aux élèves concernés de comprendre l'échec de la première stratégie, les réactions des autres élèves du genre «on ne peut pas savoir s'il y a un triangle qui s'emboîte là» doivent les aider à en prendre conscience.

La deuxième stratégie, comparée à celle qui consiste à représenter chaque angle choisi, doit apparaître comme trop lourde.

L'enseignant appelle ensuite deux élèves de deux groupes différents qui ont réalisé un message de même type (celui visé) pour un même angle[6] et demande comment on peut se rendre compte qu'ils correspondent bien au même angle : Il attend la proposition de superposition des deux tracés et profite de ce moment pour introduire

---

[6] Un de ceux du polygone de départ, qui sont communs à tous les enfants.

les termes de côtés et de sommet d'un angle. L'indépendance, pour la comparaison, de la longueur des côtés est alors explicitée.

Le maître demande ensuite quelles difficultés les élèves ont rencontrées et comment ils les ont surmontées. Devraient ainsi apparaître les ambigüités liées au fait qu'à un tracé correspondent deux angles, le saillant et le rentrant et la solution du marquage de l'angle choisi.

Remarques

(Pour le lecteur : la première remarque est facultative)

1. L'organisation que nous avons choisie pour cette deuxième leçon modifie assez profondément le jeu étudié avec la règle 3 : en effet, dans la première leçon, les joueurs sont concurrents, c'est à chacun d'avoir une attitude d'exploration du puzzle et de contrôle de ses coéquipiers. Il n'a pas intérêt à les aider. Nous avons envisagé la mise en oeuvre d'une situation de communication gardant les mêmes caractéristiques. Il aurait fallu alors que chaque joueur ait son marchand et qu'en dehors du contrôle des pièces reçues des marchands, les deux joueurs n'aient aucun rapport entre eux pour pouvoir élaborer et expérimenter des stratégies indépendantes. Mais la prise d'informations sur le puzzle commun, si elle avait du se faire en l'absence de l'adversaire aurait nécessité une organisation lourde : deux lieux éloignés pour le puzzle et chacun des deux couples joueur-marchand, une rotation des présences auprès du puzzle difficile à gérer, etc. Or, des contextes de jeu plus simples doivent permettre de faire la dévolution aux élèves du problème de la comparaison d'angles de pièces que l'on ne peut ni superposer ni comparer visuellement. C'est l'hypothèse que nous avons faite en choisissant l'organisation décrite, qui a l'avantage aussi de développer les interactions entre les enfants, interactions tout à fait fructueuses dans une tâche comme celle-ci d'élaboration d'un moyen nouveau.

2. Le terme d'angle est utilisé dans deux acceptions par l'enseignant, au cours de la leçon :

- dans le sens culturel, au début, comme moyen de désigner une partie de la pièce ; il est synonyme de «coin»,
- dans le sens mathématique, dans la troisième phase, quand il affirme que deux pièces de forme différente, mais qui peuvent s'encastrer au même endroit, ont un même angle. Cet abus de langage nous a paru impossible à éviter, d'autant plus que les élèves de CM2 utilisent couramment le terme d'angle droit pour caractériser certaines propriétés des quadrilatères.

Résultats des observations

Les stratégies développées par les élèves

Comme nous l'avions prévu dans l'analyse a priori, elles peuvent être classées en deux grandes catégories, celles qui témoignent d'une certaine "décantation" de la notion d'angle[7] et celles qu'utilisent les élèves qui ne peuvent concevoir qu'on puisse décrire une pièce répondant à la question sans donner toutes ses caractéristiques. Précisons-les en les désignant par des lettres pour pouvoir les repérer :

---

[7] Wermus H. (1976), «Essais de représentation de certaines activités cognitivesà l'aide des prédicats avec composantes textuelles», Archives de Psychologie, vol.XIV n°171, Genève, p. 205-221.

Stratégie A1

Demande d'une pièce par le nom de sa forme, sans autre précision.

Stratégie A2

Demande d'une pièce, le plus souvent un triangle permettant de rendre convexe le puzzle, en fournissant comme informations les mesures des côtés. La description peut être accompagnée d'un dessin fait à l'oeil ou respectant certaines mesures de longueur.

Stratégie A3

Utilisation de la feuille comme calque et reproduction du puzzle entier par superposition.

Stratégie A4

Choix d'un angle parce qu'il est droit et demande d'une pièce ayant un angle droit sans préciser sa forme.

Stratégie A5a

Représentation d'un angle du puzzle à l'oeil avec indication des mesures des côtés.

Stratégie A5b

Représentation d'un angle du puzzle en utilisant la feuille comme calque et en superposant, avec indication des mesures des côtés.

Nous avons regroupé ces deux stratégies sous un même nom A5 parce qu'elles manifestent la possibilité pour l'élève, de représenter le seul caractère pertinent de la figure, à ce moment.

Stratégie A6

Représentation d'un angle du puzzle en utilisant la feuille comme calque et en superposant (comme A5b) mais les longueurs sont seulement respectées sans être indiquées

Stratégie A7

Représentation d'un angle du puzzle en utilisant la feuille comme calque et en superposant (comme A5b) mais sans respecter ni indiquer les longueurs des côtés.

Nous avons relevé chaque année deux ou trois enfants proposant, pour désigner l'angle demandé, de déterminer sur chacun des côtés deux points à 1cm du sommet et de mesurer la distance entre ces deux points. Cette procédure était vite abandonnée car difficile à expliquer par écrit au marchand ! Elle pourrait constituer la base de la procédure de reproduction d'un angle à la règle et au compas. Nous ne l'avons pas exploitée car trop minoritaire.

Pour chacun des groupes, nous avons pu relever tous les messages et, pour quelques-uns, observer les réactions des marchands et les échanges avant chaque jeu.

Nous donnons ci-après le tableau des résultats détaillés.

Stratégie / Groupe	A_1	A2	A_3	A_4	A_{5a}	A_{5b}	A_6	A_7
Jeu 1	6(3)	2 3 5 6 12 13(2)	9 10 11	1 13(1) 6(1) 13(7)	4 7 6(2)		5 8 14 15	
Jeu 2		2	9 12	A'_4 : 1	7	3	A_6:4-5-13 14 - 15 A'_6:10-11(1) 15	A'_7: 6 8 11(2)

Tableau : les stratégies observées

Les dessins correspondant aux stratégies A4 à A7 peuvent être accompagnés d'informations supplémentaires permettant de différencier angles rentrants et angles saillants. Nous avons alors ajouté un (') aux stratégies correspondantes.
Les chiffres entre parenthèses correspondent au rang de la stratégie utilisée par les groupes qui en ont changé au cours d'un même jeu.

Synthèse des observations du travail par groupes

La majorité des groupes utilise dans les premiers échanges soit A2 soit A4.

Etant donné le puzzle initial, A4 permet de réussir pour deux pièces ; ensuite il n'y a plus d'angle droit rentrant dans le puzzle. Les élèves se retrouvent dans la même situation que ceux qui n'ont pas remarqué l'existence d'angle droit. Toutefois la proportion de ceux qui régressent vers A2 est plus faible que celle de ceux qui adoptent une procédure d'indice supérieur ou égal à 5[8].

Comme nous nous y attendions, l'impossibilité de fournir une pièce correspondant à une forme bien déterminée déstabilise les enfants,plus ou moins vite. Nous avons constaté que certains groupes, après avoir déclaré dans la discussion initiale que les longueurs des côtés n'étaient pas importantes, qu'on ne pouvait pas savoir la forme de la pièce, faisaient leur première demande en utilisant A2.

A l'issue du deuxième jeu, 11 groupes sur les 15 étaient passés à une procédure de type A5, A6 ou A7, A5a étant utilisé par un seul groupe ; 6 groupes avaient attribué l'échec de certains messages à l'ambigüité du tracé ne permettant pas de savoir «s'il fallait envoyer une pointe ou un creux» et avaient mis au point des solutions (flèches, estompage de la partie pleine, etc.) La formulation «où on peut faire rentrer un angle droit» a été utilisée par un groupe qui n'est pas sorti de la stratégie A4.

Quant aux groupes ayant utilisé A3, le changement de règle entre le premier et le deuxième jeu a suffi pour faire abandonner par deux groupes sur quatre cette procédure, efficace mais ne permettant pas d'engager le type de travail sur les angles que nous visions, pour leur faire adopter la procédure A6.

8 Mais nos effectifs sont trop peu nombreux pour faire apparaître un résultat significatif.

La phase d'échanges en fin de leçon

Elle commence par le bilan du nombre de pièces collées. L'enseignant interroge ensuite les enfants des quelques groupes qui n'ont réussi à coller qu'une pièce pour qu'ils viennent expliquer leurs difficultés[9].

Les groupes qui n'ont pas réussi à dépasser A4 ou A2 posent le problème : «Il n'y avait pas de pièce comme on voulait».

Les autres groupes viennent expliquer leur méthode : «nous, on a pris la trace de l'angle en superposant la feuille sur le puzzle», ce qui provoque dans l'une des classes une réaction indignée des élèves de deux groupes : «c'est de la triche!»[10]

Dans les deux classes, certains enfants sont revenus sur l'importance de prendre en compte ou non les mesures des «bords». Cela a été l'occasion pour l'enseignant d'une part d'introduire les termes de côté et de sommet d'un angle[11], d'autre part de préciser quand deux pièces ont un même angle : le sommet et les deux côtés de l'angle se superposent en partie, une même trace représente les angles des deux pièces.

Quelques élèves font remarquer qu'à une même trace correspondent deux sortes de pièces[12] et qu'ils ont trouvé le moyen de préciser laquelle ils désiraient. Ceci permet à l'enseignant d'expliciter qu'à une même trace correspondent deux angles, d'introduire les termes de saillant et rentrant ainsi que la notation mathématique usuelle.

Ainsi, à la fin de la séance, une première institutionnalisation à propos des angles a été faite. Nous verrons qu'elle ne suffit pas.

TROISIÈME LEÇON

Les angles n'y sont plus considérés en tant qu'outils pour résoudre un problème spatial mais en tant qu'objets graphiques se référant toutefois à la situation vécue dans la leçon précédente ; ce sont des représentations d'angles de pièces fictives à propos desquels la comparaison par superposition a déjà un sens.

---

9 Dans cette deuxième phase, les enfants qui ont utilisé une méthode «'» ont collé plus de pièces que les autres. Mais le nombre de pièces collées n'est pas un critère sûr de la qualité de la procédure employée par le groupe: dans chaque classe, un groupe a réussi un bon score en utilisant la méthode du «coup d'oeil auxiliaire». Aussi, il est très important que l'enseignant explique pourquoi marchand et clients ne doivent pas se retourner pour regarder le jeu de l'autre: «Ils ont l'impression de gagner, mais cela les gênera pour apprendre ce que l'on apprend en faisant ce jeu et les autres activités qui vont suivre».

10 Cette réaction a souvent été observée dans des situations où il s'agit «d'inventer». Le contrat didactique est déstabilisé, le permis et non permis n'est pas pré-déterminé par le maitre, et certains élèves, même n'ayant aucune difficulté sur le plan conceptuel, restent bloqués. On peut penser aussi qu'ils ont envisagé cette solution mais qu'elle leur paraît si simple qu'ils n'imaginent pas que ce soit cela que l'enseignant attend.

11 Les enfants connaissent déjà l'emploi de ces deux termes dans le cas des polygones, ils ne le réutilisent pas spontanément dans ce contexte.

12 «Celles qui ont un angle qui sort, celles qui ont un angle qui mange» ! Les expressions sont toujours très imagées !

Objectifs

- confronter les élèves, de manière individuelle, à un problème de comparaison d'angles par report sur un calque ;
- leur présenter un instrument de comparaison et de report d'angle, proche du rapporteur usuel : le rapporteur muet à aiguille, et de les faire réfléchir sur l'utilisation que l'on peut en faire pour la résolution du problème précédent ;
- commencer l'institutionnalisation des procédures d'emploi du rapporteur.

Matériel

- une feuille d'exercice n°1 par élève (voir page suivante) et une demi-feuille de papier calque,
- une paire de feuilles d'exercice n°2 (voir pages suivantes) par groupe de deux élèves,
- un rapporteur muet à aiguille par groupe.

Le rapporteur

L'observation des erreurs faites par les élèves dans l'emploi d'un rapporteur ordinaire[13] montre qu'elles renvoient à deux sources de difficultés :

- la première à l'absence de représentation mentale de l'angle du rapporteur qu'il faut superposer à l'angle que l'on veut mesurer. D'où la grande difficulté à positionner convenablement le rapporteur, en superposant son centre sur le sommet et la base sur un des côtés de l'angle.
- la deuxième à la complexité de la double graduation.

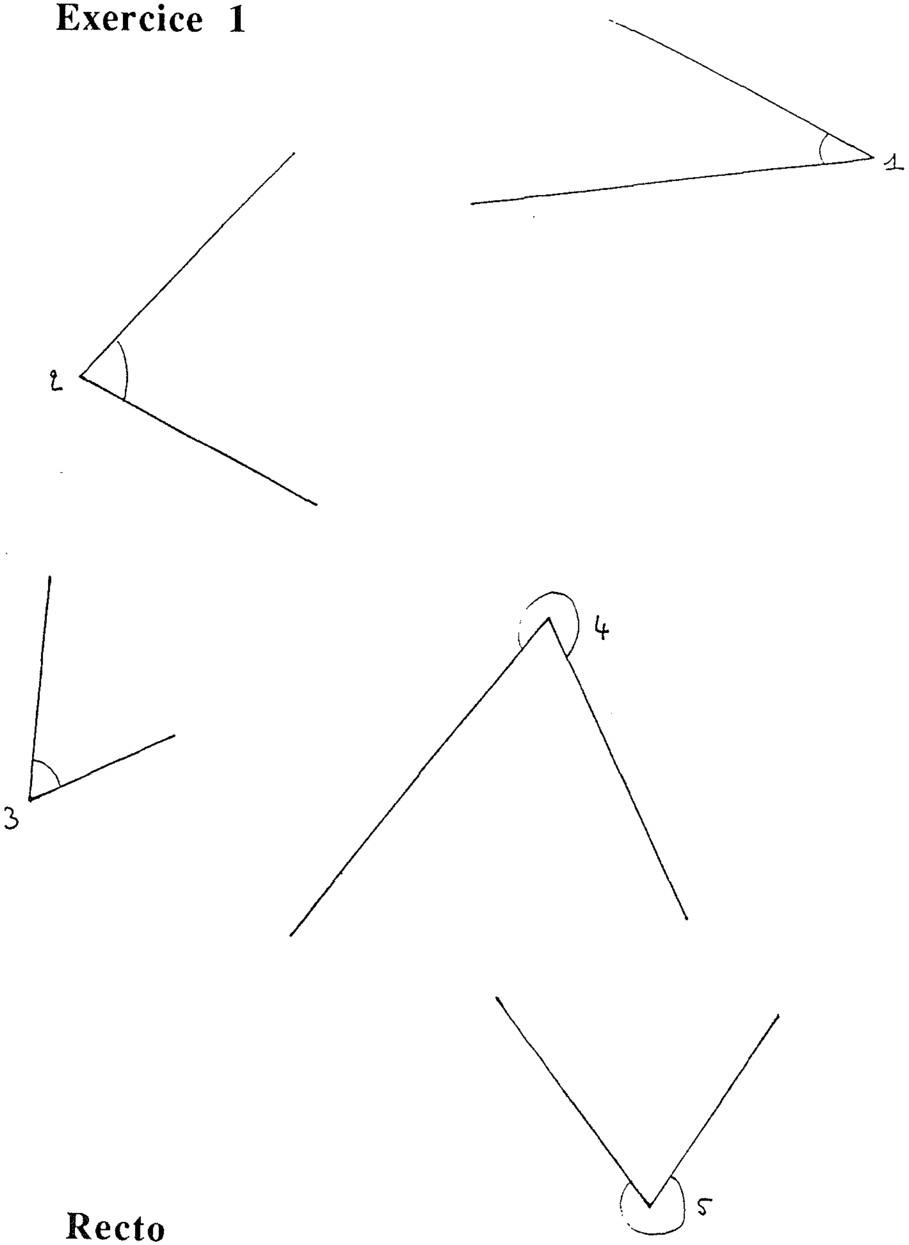
C'est cette première difficulté que l'emploi d'un rapporteur muet peut aider les élèves à surmonter, pourvu qu'il leur soit présenté dans un contexte qui ait du sens pour eux.

Nous avons donc fait le choix de garder le contexte du géométriscrabble comme situation objective évoquée pour les exercices présentés dans cette leçon, et celui de construire nous-mêmes dans du plastique transparent un rapporteur comportant les éléments traditionnels (base et centre) auxquels est ajoutée une aiguille rectangulaire pivotant autour du centre, sur laquelle une demi-droite issue de ce dernier permet de matérialiser, sur le rapporteur, le second côté de l'angle que l'on veut reporter (voir la figure 5). Le procédé de fabrication étant peu élaboré, la position de l'aiguille doit être repérée à l'aide d'un trait au feutre sur la partie fixe, car il est impossible de l'empêcher de bouger lors des déplacements du rapporteur. L'existence de cette aiguille simplifie le report d'angles dont les côtés sont plus courts que le rayon du rapporteur puisqu'elle les prolonge automatiquement, mais nous n'envisageons l'utilisation de cet instrument que pour une période brève, très vite (dès la première séance pour certains à cause de sa fragilité), les élèves seront amenés à utiliser un rapporteur sans aiguille, puisque celle-ci se détache du reste du rapporteur.

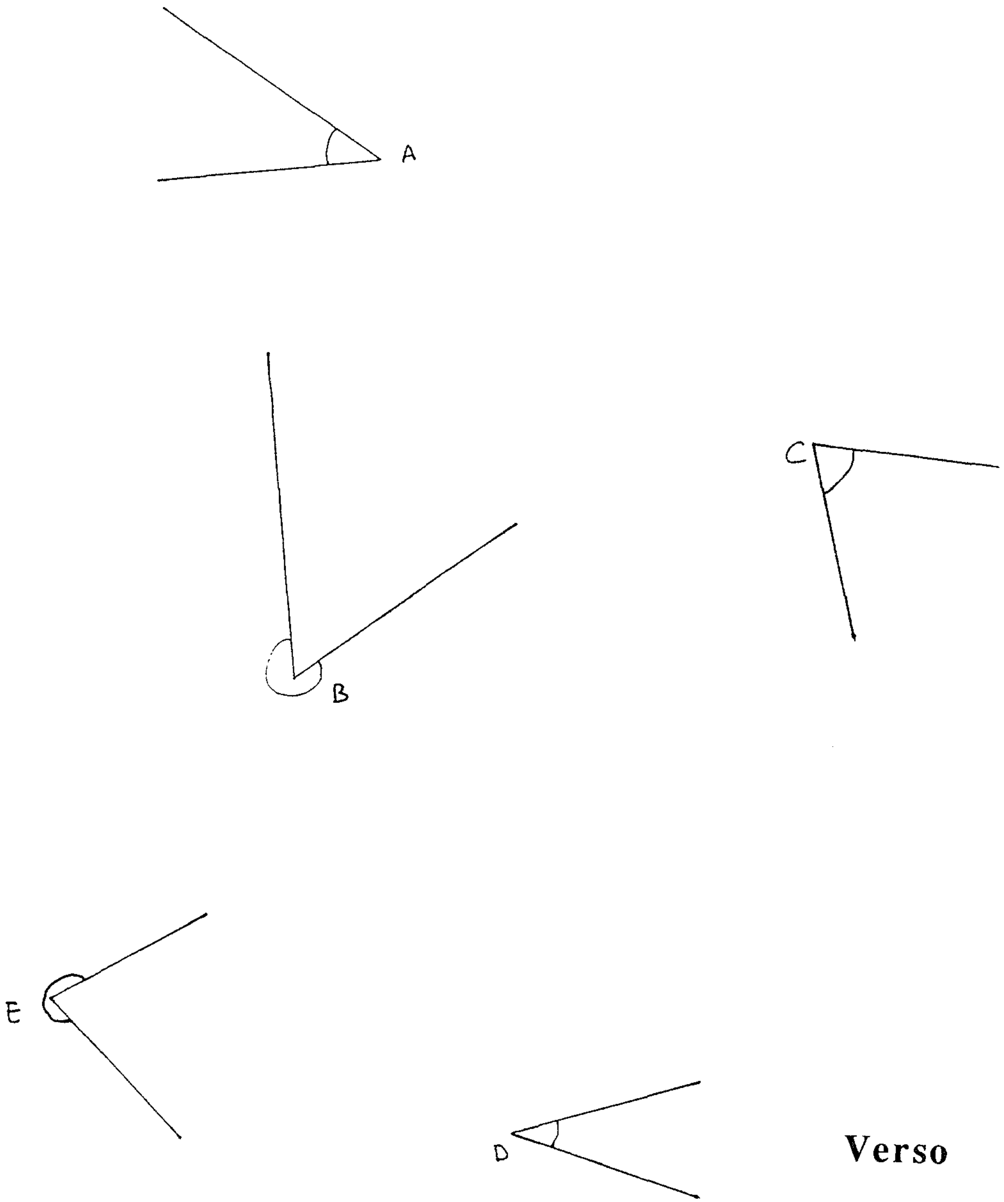
---

[13] Close rend compte de nombreuses observations cliniques à ce propos.
Close G.S. (1982), «Children's understanding of angle at the primary/secondary transfer age», Master of science, Polytechnic of the South Bank.

Exercice 1

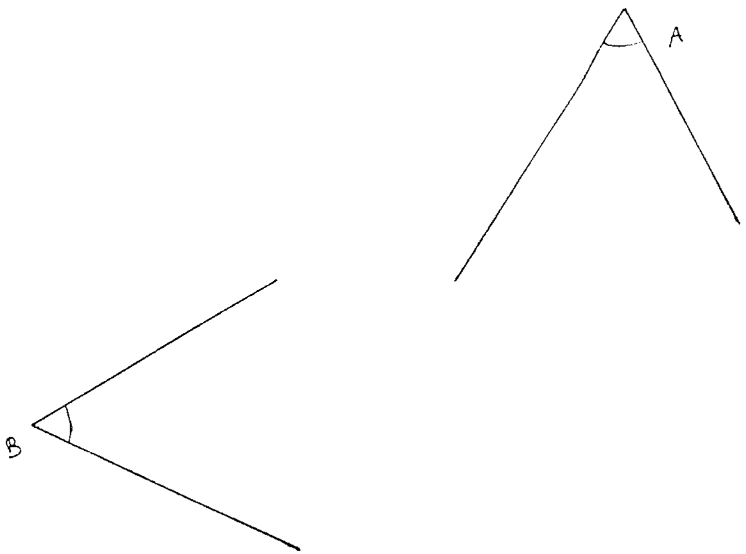


Recto

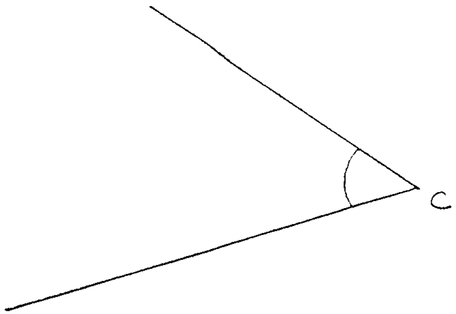


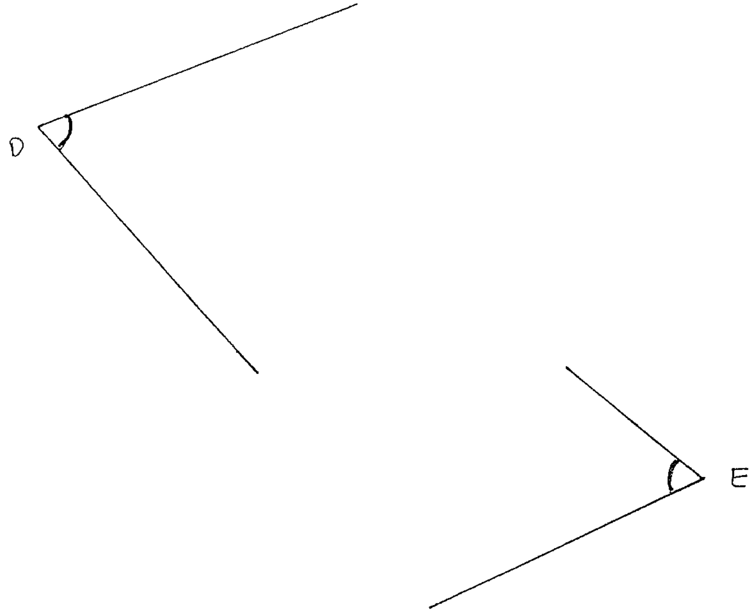
Verso

Exercice 2

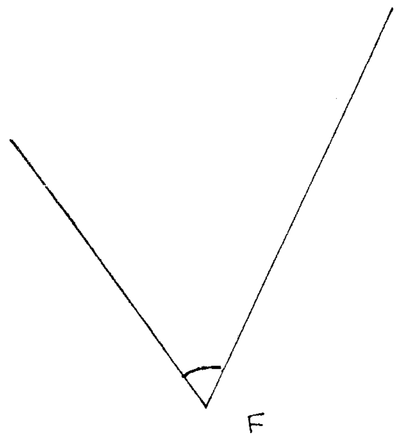


Feuille donnée aux élèves





Feuille sur une table éloignée



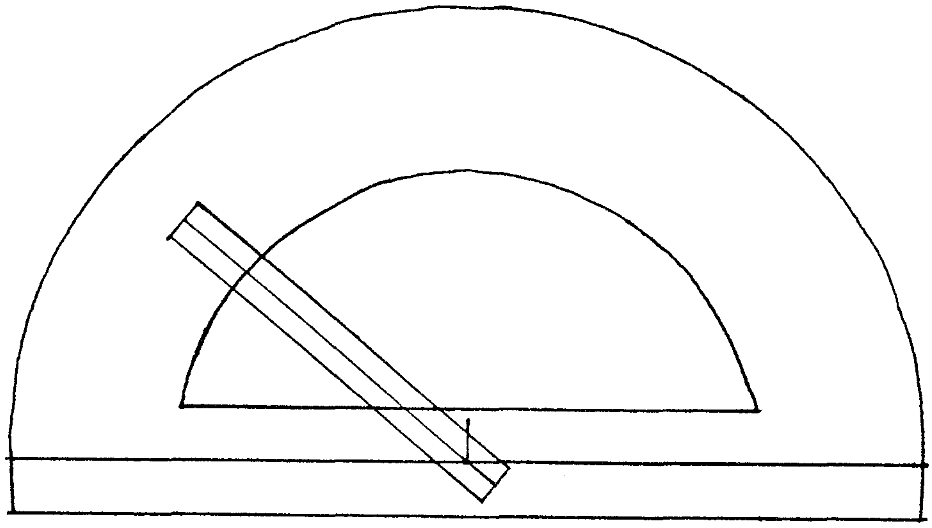


fig. 5

Les exercices

Il s'agit, dans les deux exercices, d'apparier des angles représentés sur des feuilles : en recto-verso d'une même feuille pour le premier, sur deux feuilles différentes et éloignées l'une de l'autre pour le second.

Dans le premier cas, en effet, les élèves doivent réinvestir des connaissances élaborées la veille, alors que dans le second, l'objectif est de faire sentir l'intérêt de l'emploi d'un instrument comme le rapporteur qui permet de repérer de manière économique les tailles de plusieurs angles à condition de concevoir que la base du rapporteur constitue un côté commun pour tous et qu'il suffit de repérer les deuxièmes côtés. Pour que les élèves puissent évaluer l'économie de cette procédure, ils sont placés dans une situation de concurrence entre les équipes : elles doivent trouver le moyen de comparer les angles des deux feuilles à l'aide du rapporteur en effectuant le moins de voyages possible entre les deux. Aura gagné l'équipe qui aura réussi avec le plus faible nombre de déplacements.

Les différences de valeur des angles constituent une autre variable didactique. Nous les avons choisies ainsi :

• pour le premier exercice, sur chaque page, trois angles sont saillants, deux sont rentrants. En ce qui concerne les angles saillants, la différence entre un angle d'une page et les trois angles de l'autre est soit visible à l'oeil pour l'un, soit égale à environ 10 degrés pour l'autre, soit égale à 5 degrés pour le dernier, sauf pour le couple où il y a égalité. Pour ce couple, les longueurs de côtés d'un des angles sont le double de celles de l'autre. Pour les angles rentrants la différence est soit de 5 degrés soit de 10 degrés. De plus, sur les cinq paires d'angles, trois sont constituées d'un angle rentrant et d'un angle saillant dont la somme est égale à deux plats. Nous attendons donc deux sortes d'erreurs, l'une provenant de la confusion rentrant-saillant, l'autre de la fabrication de représentations des angles sur le calque avec des côtés trop courts (en particulier chez ceux qui ont le mieux compris que la longueur de ses côtés ne caractérisait pas un angle) ne permettant pas de différencier deux angles ayant une différence de mesure de 5 degrés.

* pour le deuxième exercice, nous n'avons proposé que des angles saillants puisque son but est l'usage du rapporteur. Les angles ont des différences de mesure de 5 degrés, ils sont disposés de manières diverses sur la feuille.

Consigne et déroulement

Phase 1

Chaque élève reçoit une feuille recto-verso et une feuille de calque.

Le maître expose : «Sur le recto et sur le verso de votre feuille sont tracés cinq angles correspondant à des pièces d'un puzzle. Parmi eux, il en existe deux, un de chaque côté, qui correspondent au même angle. Trouvez-les.»

L'enseignant laisse 5 minutes environ puis relève les résultats. S'ils sont différents, il envoie au tableau un élève pour montrer comment il a obtenu son résultat. Etant donné le choix des angles, des erreurs de manipulation ou de report au moyen d'angles décalqués aux côtés trop petits peuvent expliquer les différences. Cette comparaison des résultats est l'occasion pour le maître de faire expliciter ces difficultés et d'introduire dans le contexte les termes d'angles égaux, sans en donner une définition formelle.

Phase 2

L'enseignant propose aux élèves un instrument qui permet de remplacer le papier calque. Il montre alors un rapporteur du commerce, et demande qui a déjà vu cet instrument. Il poursuit : «pour vous aider à l'utiliser, car ce n'est pas très simple, j'en ai fabriqué en les modifiant un peu». Il montre alors le rapporteur muet à aiguille qu'il fait décrire par les enfants mais sans leur en expliquer le fonctionnement, et leur propose de rechercher à deux comment ils auraient pu utiliser cet instrument pour faire l'exercice précédent. Au bout de quelques minutes, après être passé dans les rangs pour aider les enfants ne trouvant pas de solution, il fait expliciter par plusieurs groupes les procédés utilisés pour comparer deux angles et fait remarquer que placer l'aiguille hors du demi-disque (fig 6) est particulièrement malcommode, même si cela permet de réussir à condition que l'aiguille ne bouge pas.

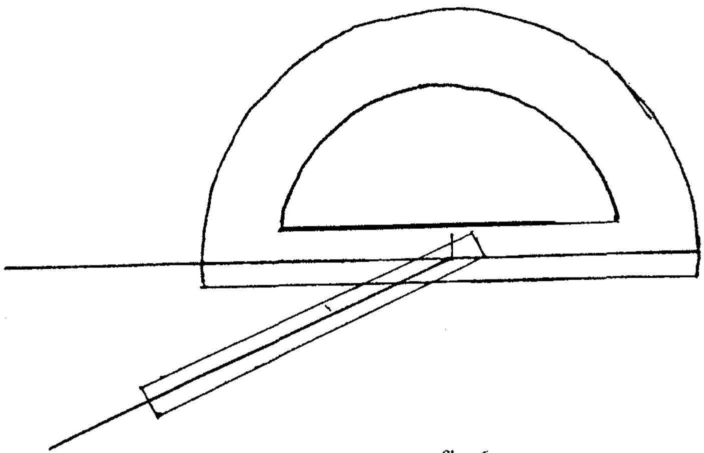


fig.6

Si les enfants remarquent qu'on ne peut pas former un angle rentrant sur le rapporteur, il leur montre un rapporteur en forme de disque.

Phase 3

Le maître distribue à chaque groupe de deux une feuille sur laquelle sont représentés trois angles, et dispose sur des tables éloignées des enfants d'autres feuilles sur lesquelles sont représentées également trois angles. Il expose leur travail :

«Vous allez refaire une recherche de paires avec le rapporteur mais cette fois-ci sur deux feuilles séparées. Pour plus de facilité, il n'y a que des angles saillants. Une des feuilles est sur votre table, l'autre loin de vous. L'équipe championne sera celle qui réussira en faisant un seul déplacement entre les deux feuilles. Alors réfléchissez bien.»

L'enseignant veille à encourager les équipes à aller jusqu'au bout de l'exercice, c'est-à-dire à trouver la bonne paire même si c'est avec deux déplacements ou plus.

Au bout de 10 minutes, il relève les résultats des différentes équipes (paire trouvée et nombre de déplacements) et fait exposer les différentes méthodes utilisées en comparant leur l'efficacité.

A la fin de la séance, l'enseignant institutionnalise l'usage habituel du rapporteur, avec coïncidence du sommet et du centre de l'angle à reporter, et coïncidence de la base avec un des côtés de l'angle.

Résultats des observations

Phase 1 : Recherche des deux angles superposables

Comportements et résultats des élèves

Sur les 44 élèves qui ont fait l'activité, 42 ont reproduit un ou plusieurs angles sur leur calque, certains en respectant les longueurs de côté, les autres en les faisant délibérément plus petits. Les deux élèves restants ont repéré les extrémités des tracés par des points et n'ont pas conclu.

La moitié a réussi et comme nous nous y attendions, les erreurs viennent des deux sources mentionnées dans l'analyse a priori :

- un quart des enfants a donné une réponse attestant qu'ils ne différenciaient pas l'angle rentrant et l'angle saillant correspondant à un même tracé.
- l'autre quart a donné une réponse correspondant à deux angles de mesure erronée de 5 degrés. Cela provient soit de la taille des côtés, soit d'une mauvaise maîtrise de la reproduction sur le calque.

Les échanges après le bilan des résultats

Aussitôt que l'enseignant a inscrit au tableau l'ensemble des réponses trouvées par les élèves, plusieurs réfutent celles correspondant à des angles dont la somme est deux plats en disant : «ça ne va pas, il y a un extérieur et un intérieur». L'enseignant rappelle alors les termes adéquats.

Puis interviennent les débats à propos des deux paires correspondant à des angles saillants. L'enseignant propose à un élève de montrer comment il compare A et

1, à un autre D et 1. Un des enfants explique : «il faut les faire assez longs (les côtés) parce qu'au début ils sont pareils». Les autres causes d'erreur sont énumérées spontanément : l'épaisseur du feutre, le fait de dessiner les côtés à main levée, le manque de transparence du calque.

En conclusion, l'enseignant fait redire à l'un des enfants comment l'on reconnait que deux angles sont égaux. Il introduit ici ce terme que certains enfants avaient déjà utilisé, sous sa forme symbolique, dans leur réponse (D=1). L'emploi des termes adéquats est encore difficile pour les élèves.

Phase 2 : introduction du rapporteur à aiguille

Il s'agit, dans cette phase, de trouver comment le rapporteur muet permet de comparer deux angles.

Les enfants recherchent à deux puis l'enseignant demande à un enfant de venir expliquer sa méthode. L'enfant explique convenablement, les remarques des autres enfants fusent : «L'aiguille, j'arrive à m'en servir mais ça bouge» ; «le rapporteur, c'est mieux parce qu'il n'y a pas d'aiguille, il y a une graduation» ; «au lieu de tenir l'aiguille (après avoir repéré l'angle), il n'y a qu'à faire une marque».

Une discussion s'engage :

- «Le 4 (c'est un angle rentrant), on ne peut pas le mesurer».
- «Ce n'est pas la même pièce qui s'emboîte mais on peut le faire».
- «L'aiguille dépasse le rapporteur».
- «Il faudrait un rapporteur rond».

L'enseignant en sort un ; un enfant vient montrer comment il pourrait l'utiliser.

Ainsi, la dynamique de la situation conduit les élèves les plus mûrs à envisager les différents problèmes que l'on peut rencontrer dans l'usage du rapporteur avant même que l'enseignant ne les ait posés. Il ne faut tout de même pas se leurrer, la majorité des enfants a besoin d'être confrontée à un usage effectif du rapporteur muet dans lequel les erreurs vont être sanctionnées par l'échec. C'est l'objet de la troisième phase.

Phase 3 : Utilisation du rapporteur à aiguille

Comportements et résultats des élèves

Sur les 22 groupes, 1 n'a pas eu le temps de terminer, 4 ont échoué en appariant des angles dont la différence de mesure était de 5 ou 10 degré, ou en ne trouvant pas d'angles égaux, les 17 autres groupes ont réussi, la majorité en un seul déplacement, par transport du rapporteur sur lequel les élèves avaient repéré les trois angles de la feuille de leur table. L'attache de l'aiguille étant très fragile, celle-ci s'est parfois détachée du rapporteur lui-même. Certains groupes ont vu d'eux-mêmes qu'en fait elle ne servait à rien puisque on pouvait repérer par transparence le deuxième côté de l'angle (les côtés des angles ayant été choisis à dessein assez longs dans ce premier exercice). Aux enfants venant lui demander de la réparer, l'enseignant répondait «crois-tu vraiment que c'est nécessaire ? » et en cas de réponse affirmative il replaçait l'aiguille.

Les élèves ont tous choisi comme premier côté de leurs angles, l'un des deux segments CA ou CB de la base du rapporteur. Un deuxième déplacement a été nécessaire quand les enfants se sont aperçus qu'ils n'avaient pas noté le nom des angles.

Bilan et conclusion

Après la prise en compte des résultats, l'enseignant appelle un des enfants d'un groupe qui n'a pas réussi pour qu'il refasse le travail devant la classe. Il commente et institutionnalise l'usage du rapporteur muet et explique aux enfants qu'ils apprendront au collège à utiliser le rapporteur avec graduations.

V - EVALUATION DES CONNAISSANCES DES ELEVES A L'ISSUE DE LA SERIE DE TROIS SEANCES.

A - Les objectifs

Ils sont de deux ordres :

- Pour le maître, s'assurer que les élèves ont bien construit les connaissances visées et qu'ils savent les réinvestir dans des situations dont le contexte est de plus en plus éloigné du contexte initial.

- Au niveau de la gestion didactique, fournir aux élèves et à l'enseignant une occasion de revenir sur ces connaissances, et sur leur explicitation. C'est à l'occasion de la correction du contrôle que le terme «angles égaux» est institutionnalisé, après une discussion sur les phénomènes liés à la longueur des côtés.

B - Les épreuves

Epreuve 1

C'est la plus proche de la situation a-didactique. Elle comporte deux items du même type : prévoir si une pièce polygonale dessinée d'un côté de la feuille peut s'encastrer dans le puzzle dessiné de l'autre côté.

Pour répondre à la question, les enfants ont à leur disposition, à la demande, règles, double-décimètre, papier calque, mais pas de rapporteur dont l'usage, mal maîtrisé par tous à ce moment, pourrait masquer des difficultés sur la conception des angles. Il leur est demandé d'expliquer comment ils ont fait. L'analyse de ces explications peut nous permettre de voir dans quelle mesure ils réinvestissent leur connaissance des termes comme angle, superposer, etc.

Le premier item comporte deux solutions, un même angle (rentrant) de la pièce peut s'emboîter à deux endroits différents. Un «piège» a été prévu : un autre angle (saillant) de la pièce est égal à un angle saillant du puzzle.

Le deuxième item ne comporte pas de solution, mais un des angles de la pièce est égal à un des angles du puzzle.

Epreuve 2

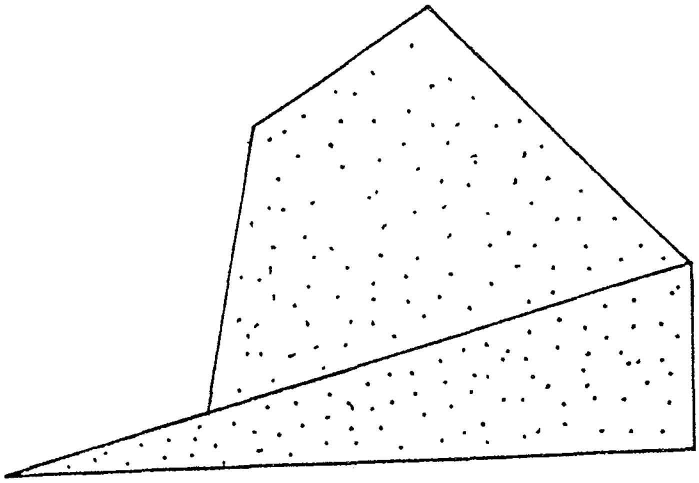
Deux gabarits de triangle sont dessinés sur une même feuille, chacun des angles étant désigné par une lettre. Les enfants ont à répondre à deux questions :

- Dans le triangle n°2, y-a-t-il un angle égal à l'angle Q du triangle n°1 ? Si oui lequel ?

- Dans le triangle n°1, y-a-t'il un angle égal à l'angle T du triangle n° 2 ? Si oui lequel ?

Épreuve 1
Item 1

Recto

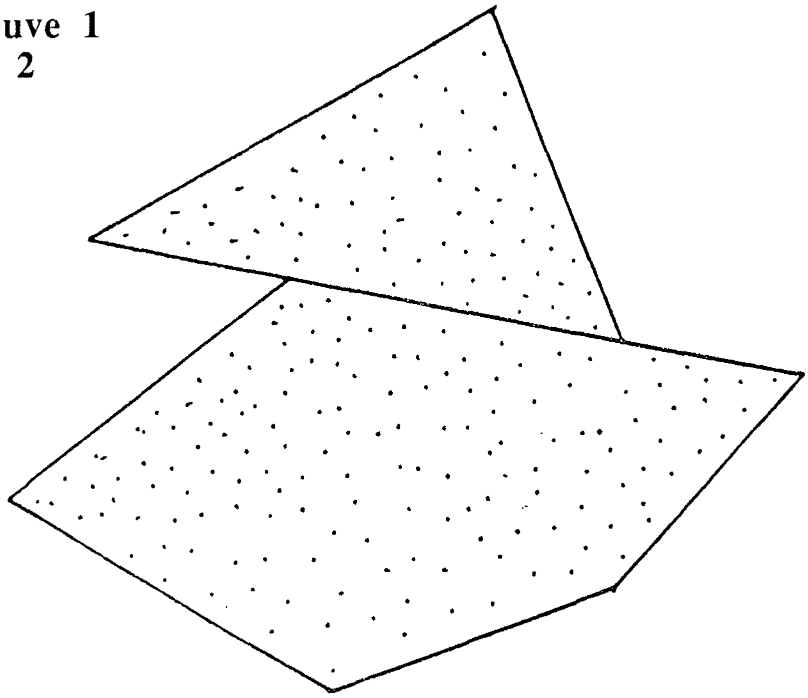


La pièce dessinée derrière la feuille peut-elle s'emboîter dans le puzzle ?

Explique comment tu as fait pour répondre.

Mets une croix à l'endroit où la pièce s'ajuste.

Épreuve 1
Item 2



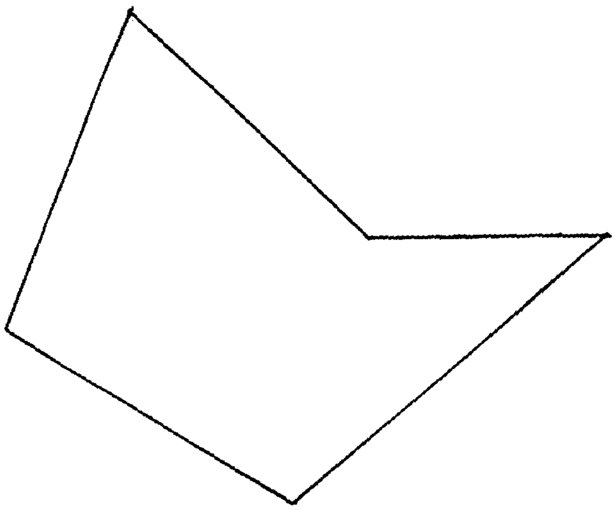
La pièce dessinée derrière la feuille peut-elle s'emboîter dans le puzzle ?

Explique comment tu as fait pour répondre.

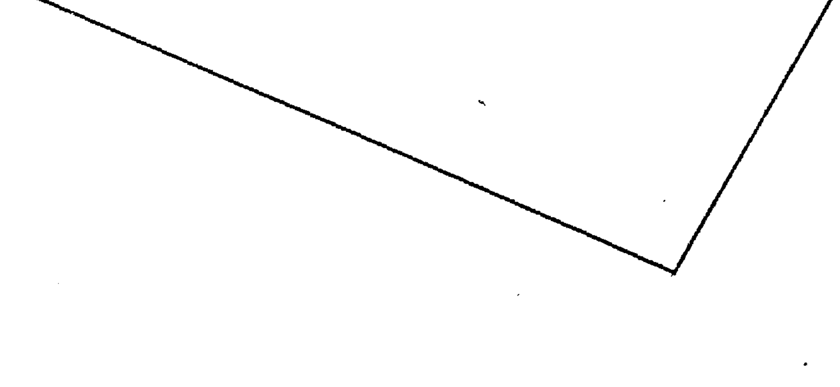
Mets une croix à l'endroit où la pièce s'ajuste.

Épreuve 1
Item 1

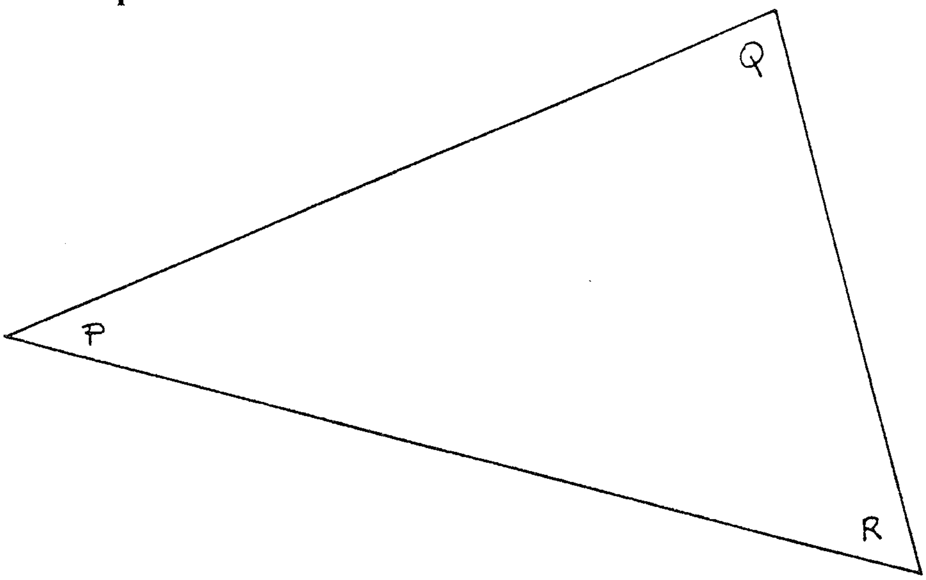
Verso



Épreuve 1
Item 2



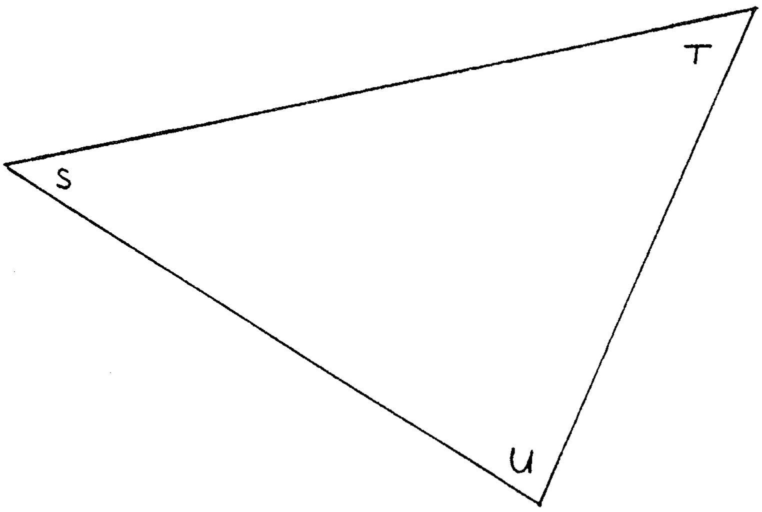
Épreuve 2



triangle n° 1

Dans le triangle n° 2, y a-t-il un angle égal à l'angle Q du triangle n° 1 ?
Si oui, lequel ?

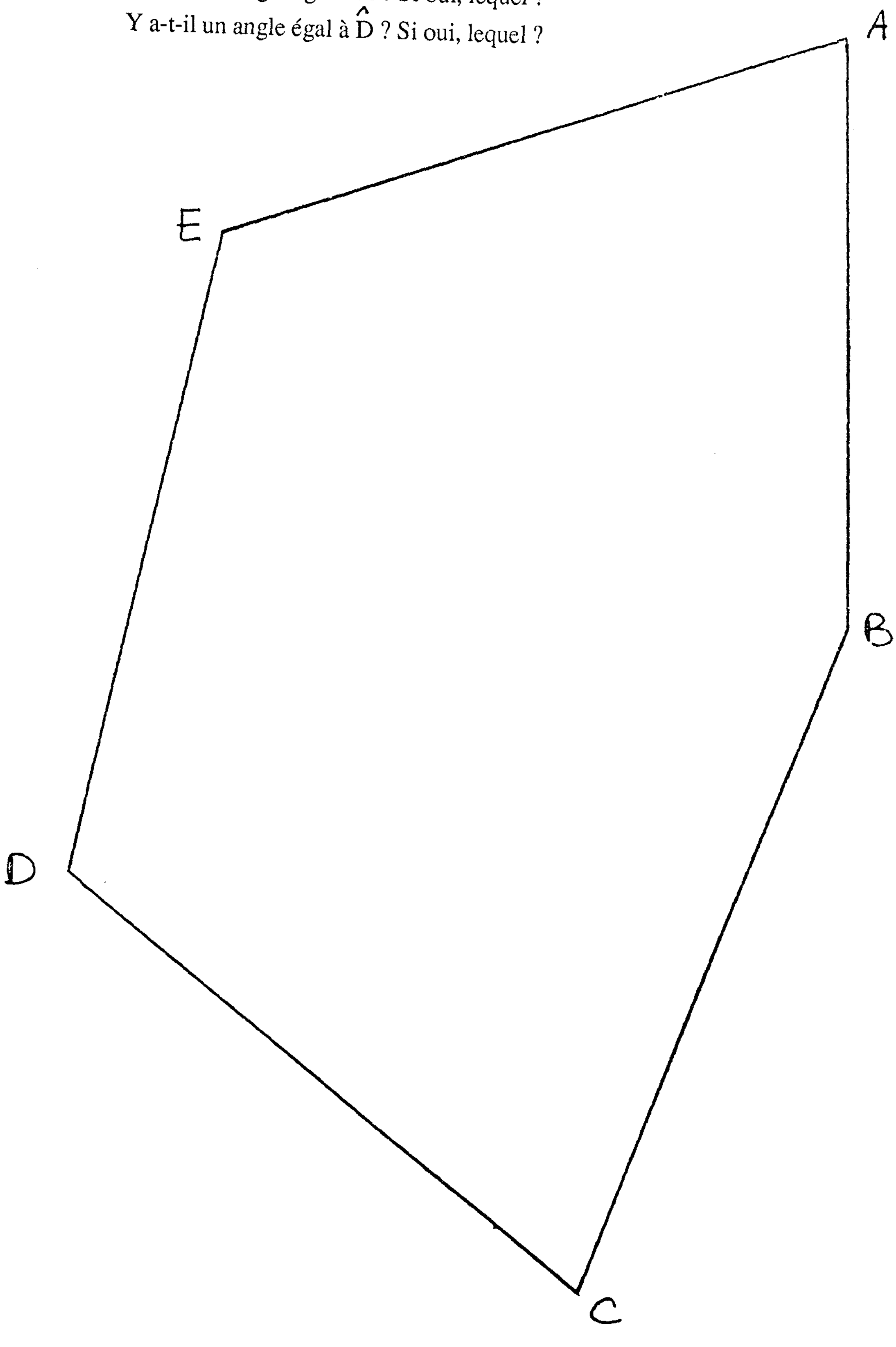
Dans le triangle n° 1, y a-t-il un angle égal à l'angle T du triangle n° 2 ?
Si oui, lequel ?



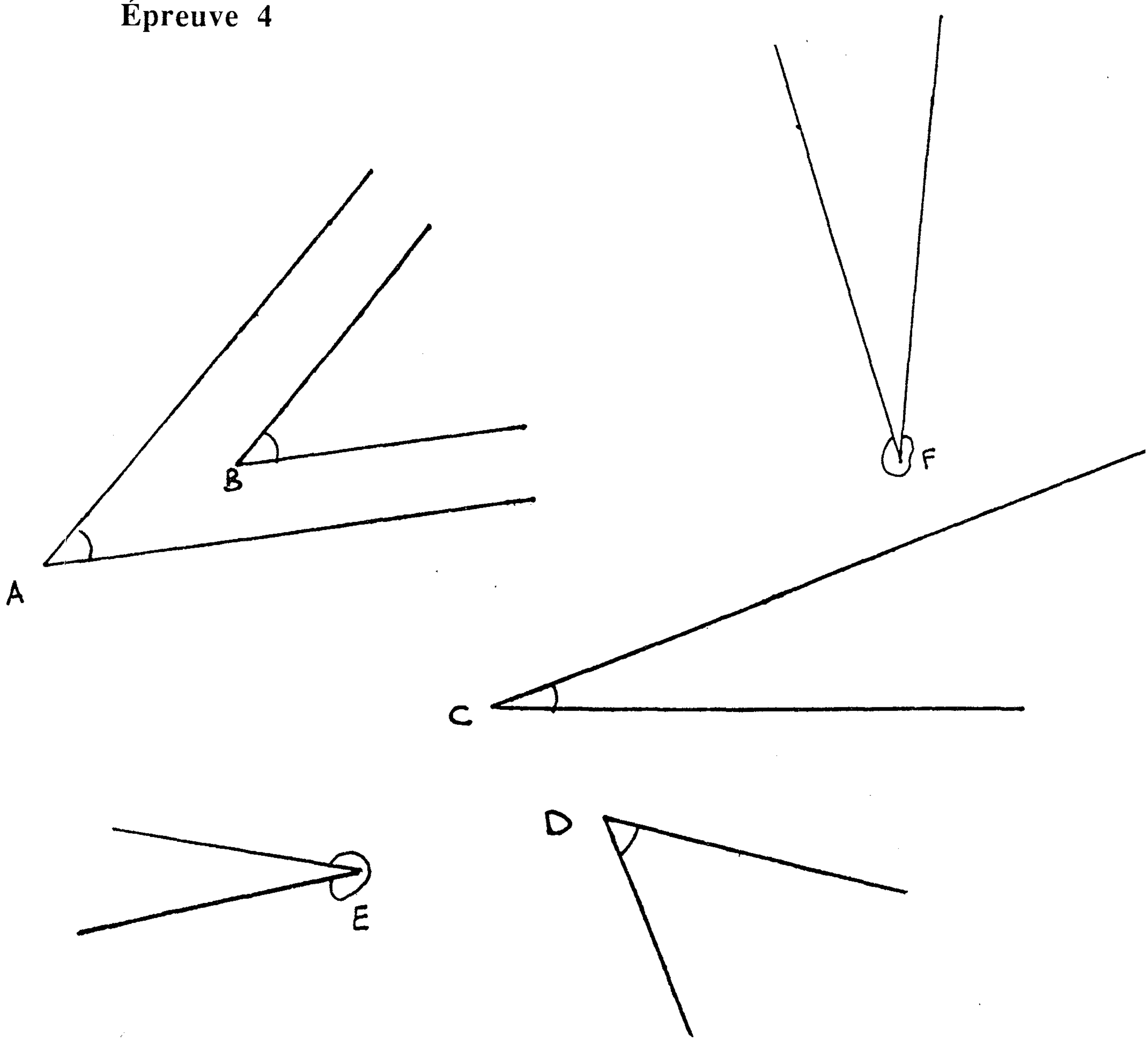
triangle n° 2

Épreuve 3

Y a-t-il un angle égal à $\widehat{A}$? Si oui, lequel ?
Y a-t-il un angle égal à $\widehat{D}$? Si oui, lequel ?



Épreuve 4



Sur chaque paire d'angles
écris le nom du plus grand ou alors écris «ils sont égaux».

$\hat{A}$, $\hat{B}$:
$\hat{A}$, $\hat{C}$:
$\hat{C}$, $\hat{D}$:

$\hat{B}$, $\hat{D}$:
$\hat{B}$, $\hat{C}$:
$\hat{C}$, $\check{E}$:
$\check{E}$, $\check{F}$:

Aucune des deux réponses ne peut être donnée à l'oeil, les mesures des angles concernés étant proches. Les deux angles égaux ont des côtés de longueur différente. Aucune explication sur le sens des termes «angle égal» n'est fournie d'emblée aux enfants. Si certains posent la question, l'enseignant doit répondre que cela veut dire superposable.

Epreuve 3

Un pentagone irrégulier est dessiné sur une feuille. A côté de chaque sommet est placée une lettre servant à désigner l'angle correspondant. Deux questions sont posées :

- Y-a-t-il un angle égal à A ? si oui lequel ?
- Y-a-t-il un angle égal à D ? si oui lequel ?

La réponse attendue est oui (C) pour la première question.

La réponse attendue est non pour la deuxième question.

Les côtés de A et de C sont de longueur différente, alors que ceux de D et de E dont la différence de mesure est environ de 5 degrés sont de même longueur.

Epreuve 4

Elle a été construite pour pouvoir comparer les résultats des élèves avec ceux de Close (1982) . Les enfants ont à répondre, pour 6 paires d'angles, à la question suivante :

Ecris le nom du plus grand ou alors écris : «ils sont égaux».

C'est la première fois que les enfants ont à répondre à une question de cette nature, les réponses précédentes portant sur égalité ou inégalité. Nous avons choisi des configurations pièges, comme celle de A et B, pour observer dans quelle mesure les élèves étaient capables de les éviter et donc de résister à l'obstacle décrit dans la première partie ; la comparaison porte aussi sur un couple constitué d'angles rentrants et sur un couple constitué d'un angle saillant et d'un angle rentrant dont la somme est égale à 360 degrés.

C.- Les résultats de l'évaluation

Introduction

Au terme des trois leçons associées au jeu du géométriscrabble, les élèves ont semblé maîtrisé de mieux en mieux le concept d'angle. L'évaluation faite une semaine après permet de contrôler ce qu'il en est pour chacun d'entre eux.

Epreuve 1

39 enfants sur 41 ont réussi au premier item, 36 au deuxième. Tous ont utilisé le papier calque ; pour les deux items, la grande majorité d'entre eux (34) ont décalqué les pièces entières, les autres seulement les angles leur paraissant convenir. Un seul élève a confondu, dans le deuxième item, emboîtement et superposition des angles[14].

Dans leurs explications, peu d'enfants utilisent spontanément le terme d'angle, 9 seulement : 5 sur les 7 qui n'ont décalqué que les angles, et 4 sur les 34 qui ont décalqué les pièces entières. Telle qu'elle était posée (à dessein), la question n'appelait

[14] En 90-91, cette erreur a été plus fréquente, elle correspond à 20% des réponses.

pas nécessairement une réponse en terme d'angles, il est normal que seuls ou presque, l'aient employé ceux qui ont effectivement comparé des angles.

Epreuve 2

Rappelons qu'il s'agit ici de comparer les angles de deux triangles. Pour le premier item, il y a une solution, pour le deuxième pas, mais un des angles du triangle un ne mesure que 7 degrés de plus que l'angle du triangle 2.

Pour les deux items, 35 enfants sur 41 réussissent, trois échouent aux deux items.

Epreuve 3

Elle est de même type que la précédente, mais les enfants doivent comparer des angles d'un même quadrilatère. Les deux angles qu'ils doivent déclarer égaux ont des côtés de longueur nettement différente, par contre pour le deuxième item, deux angles ont l'air égaux alors que leur mesure diffère de 5 degrés Tous les enfants ont réussi le premier item, 8 ont échoué au second ayant soit comparé à l'oeil (3), soit pris un calque aux côtés très courts (2), soit mal contrôlé la superposition des côtés (3).

Epreuve 4

C'est l'épreuve la plus éloignée du contexte dans lequel le concept d'angle a été présenté aux élèves.

Six items permettent de contrôler si les élèves conçoivent la taille des angles comme indépendante de celle de leurs côtés, sont capables de donner du sens à la relation «être plus grand que» entre des angles de même nature, un item propose la comparaison d'un angle saillant et d'un angle rentrant dont la somme est égale à 360 degrés.

Comparaison d'angles de même nature

En 89-90, les résultats aux 6 items varient entre 76 et 93%. En 90-91, entre 74 et 87% [15].

Si nous examinons de plus près les résultats de 90, et regroupons les enfants par nombre de résultats justes, nous voyons que seuls quatre enfants ont moins de 4 réussites. Celle qui n'a qu'une réussite a systématiquement donné la réponse correspondant à l'angle dont les côtés sont les plus longs, sa seule réponse juste concerne deux angles de longueur de côtés à peu près semblable, un autre enfant n'a pas suivi la consigne et a donné le résultat de la relation d'égalité (sans se tromper), les deux derniers enfants ont donné trois résultats justes, il semble qu'ils aient comparé à l'oeil pour l'un, avec une mauvaise technique de report pour l'autre mais qu'ils aient une conception convenable des angles. En résumé, nous pouvons affirmer que seule une élève sur 41 n'a pas compris ce qui était en jeu dans la suite d'activités[16].

Rappelons qu'un de nos objectifs était de faire la preuve que la conception de l'angle comme une paire de segments de même origine était le résultat d'un obstacle didactique, et que cette conception pouvait ne pas apparaître ou être rapidement transformée dans une autre approche. Les résultats présentés nous paraissent attester que nous avons bien atteint cet objectif

---

[15] L'ensemble de l'épreuve a été proposée l'avant dernier jour de classe, ce qui peut expliquer la petite différence entre les deux années.

[16] En 90-91, sur 54 élèves, un élève est en échec total, cinq ne maitrisent convenablement que la relation d'égalité.

Comparaison d'un angle saillant et d'un angle rentrant de somme égale à 360 degrés (facultatif)

Comme nous le pensions, c'est l'item qui a posé le plus de problèmes aux élèves. En 89-90, nous avons relevé 5 types de réponse dont nous donnons la fréquence :

- la bonne réponse, E > C : 11/41
- l'égalité : 24/41
- «impossible» : 2/41
- «différent» : 1/41
- pas de réponse : 3/41

Comment expliquer ces résultats ? Nous pouvons faire l'hypothèse que pour tous les élèves, il y a une difficulté dans la comparaison entre un angle saillant et un angle rentrant parce que ces deux types d'angles correspondent à des propriétés perceptives nettement différentes des objets spatiaux correspondants.

Certains ne la surmontent pas et soit ne répondent pas, soit ont «l'audace» de dire qu'il est impossible de répondre à la question posée par le maître.

On peut interpréter de deux façons différentes la réponse d'égalité : soit les élèves n'ont pas remarqué qu'un des termes du couple est un angle rentrant et l'autre saillant, soit ils résolvent la difficulté (parce qu'il faut bien donner une réponse) en négligeant un des caractères des figures à comparer, à savoir le caractère rentrant. Nous n'avons pas le moyen de savoir pour chaque enfant ce qu'il en est mais les explications souvent confuses données au moment de la comparaison des réponses apportées à cette question nous laissent penser qu'il y a là une difficulté conceptuelle. Malgré la concrétisation proposée faisant jouer le même rôle aux pièces concaves et convexes, donc aux deux types d'angles, pour la majorité des enfants, ils restent hétérogènes ; la superposition qui a du sens pour comparer deux angles de même type n'en a plus pour comparer deux angles de type différent puisque la relation «naturelle» entre les deux est l'emboîtement.

Cette difficulté est-elle l'effet du processus d'apprentissage que nous avons mis en oeuvre?

Il semble qu'elle soit plus générale puisque, après un enseignement à des élèves de 6ème, Close donne comme résultat pour des items du même type mais où les côtés des angles sont parallèles (voir page suivante):

item 6- (i) (j)   réussite : 11/21   égalité : 4/21
item 6- (m) (n)   réussite : 3/21   égalité : 12/21

Et elle conclut que la capacité à reconnaître des angles rentrants n'a pas été suffisamment développée par la méthode d'enseignement adoptée.

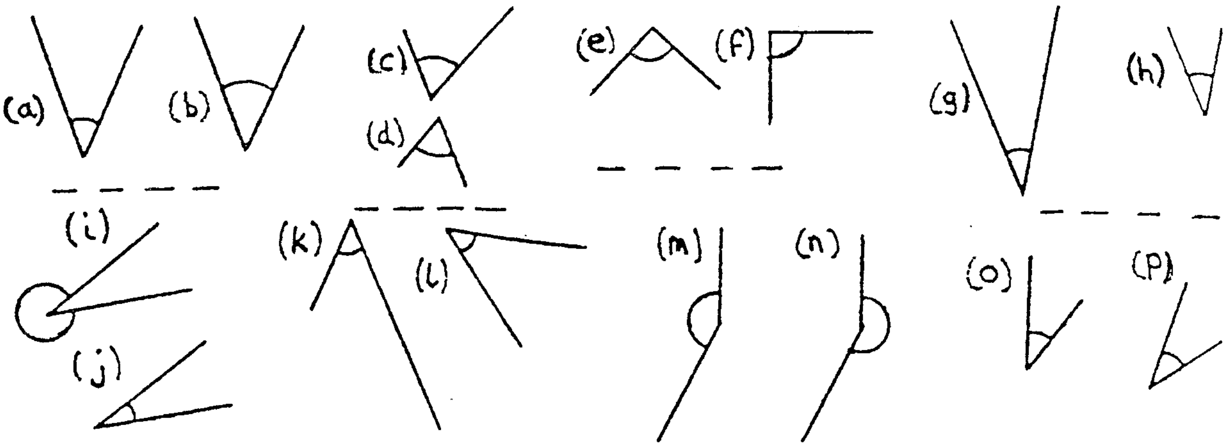
En ce qui nous concerne, nous n'avons pas étudié comment lever cette difficulté[17].

---

17 Y-a-t-il un obstacle culturel (la forme apparente de la plupart des objets du micro-espace est convexe, c'est le «vide» qui comporte des angles rentrants) ?

Tiré de Close (1982)

(6) Which angle is BIGGER or are they ABOUT THE SAME SIZE?
Answer this question for each pair of angles.



(i) (j)
réussite 11/21
égalité 4/21

(m) (n)
réussite 3/21
égalité 12/21

VI - REPRODUCTION DE POLYGONES A L'AIDE DU RAPPORTEUR MUET

L'observation du travail des élèves dans des situations de reproduction de quadrilatères nous avait montré l'intérêt de ce type de tâches pour la maîtrise de l'usage du rapporteur. Remarquons que cette tâche n'est jamais proposée dans les manuels de collège malgré sa richesse.

Nous avons donc proposé aux élèves, en fin d'année, une situation individuelle de reproduction d'un pentagone non convexe en leur demandant explicitement d'utiliser les rapporteurs muets. Le travail fait avec eux antérieurement en géométrie aurait pu les inciter à le faire par triangulation. Cette possibilité, si elle avait été évoquée par certains, devait être reconnue comme efficace par le maître mais ne correspondant pas à la consigne.

A - Les caractéristiques de la situation choisie

Description

Sur la table de chaque élève, est collée une demi-feuille de papier calque sur laquelle est dessinée un pentagone non convexe dont les longueurs des côtés sont comprises entre 3 et 12 cm. L'élève dispose d'une feuille de papier blanc. Dans un coin de la classe, sont réunis à la disposition des enfants, règles graduées, équerres, compas, rapporteurs muets avec ou sans aiguille. L'élève doit reproduire le pentagone, la vérification se fera quand il pensera avoir terminé, par superposition des deux figures. Trois figures sont préparées (voir ci-dessous). Quand l'élève a terminé son travail avec l'une, il peut passer à la suivante.

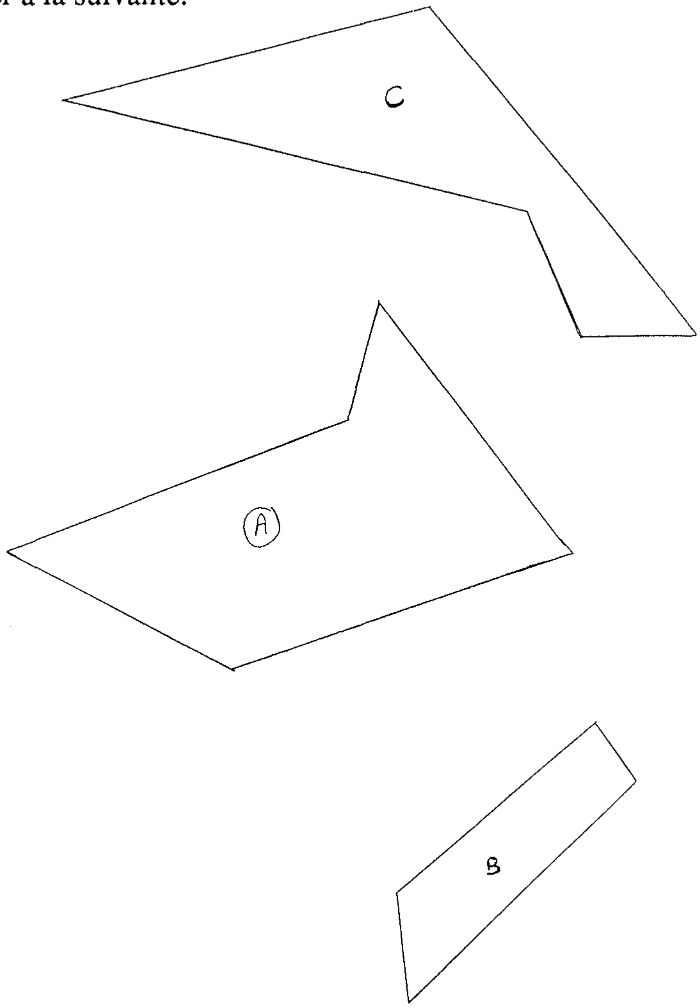


fig 7

Les figures préparées
(réduction 1/2)

Analyse a priori

Le choix du pentagone

C'est une figure où le nombre d'informations à saisir est suffisamment important pour que les enfants aient plusieurs occasions de reporter des angles et des longueurs. Le fait qu'il soit non convexe est lié au choix que nous avions fait de travailler d'emblée sur ce type de figures ; mais cette propriété ne parait pas pouvoir avoir d'incidence sur les stratégies des élèves puisque le modèle étant constamment sous leurs yeux, ils n'ont pas besoin de garder en mémoire le fait qu'un angle est saillant ou rentrant.

Les longueurs des côtés ont été choisies de manière à poser au moins une fois le problème de report d'un angle dont les côtés sont de longueur inférieure à celle du rayon du rapporteur. Il faut donc décider de les prolonger, un prolongement à vue, que l'on peut attendre de certains élèves risque de conduire à une figure fausse.

La position du modèle

Elle a été choisie proche de l'élève pour qu'il ait à chaque instant le contrôle visuel du moment où il en était dans sa progression. Un autre choix (modèle loin de la réalisation) aurait nécessité la création de désignations (ordre des côtés, relations entre côtés et angles) pour effectuer l'auto-communication d'informations et ce contrôle, cela nous parait mériter une autre leçon que nous n'avons pas réalisée.

La variété des instruments

Bien que la consigne demande aux élèves de reproduire le polygone avec un rapporteur, nous leur avons laissé la possibilité d'avoir recours à d'autres instruments, en particulier au compas, pour ceux qui seraient incapables d'utiliser le rapporteur.

La vérification et la prise de décision de la réussite

Nous avons déjà vu les problèmes que pose la détermination de la réussite ou de l'échec. Nous avions pensé déterminer un «seuil de tolérance», le même pour tous les enfants, qui constituerait un critère objectif tenant compte de l'impossibilité d'obtenir la superposition parfaite avec les instruments grossiers dont disposent les élèves (en particulier le rapporteur sur lequel on est obligé de faire des repères épais). Mais l'analyse du problème montre qu'une même erreur d'angle correspond à des différences plus ou moins importantes des positions des sommets en fonction de la longueur des côtés correspondants (voir figure 7). Aussi il aurait fallu déterminer une bande dont la largeur aurait varié selon les côtés. Dans l'impossibilité de justifier cela avec les enfants, nous avons renoncé à déterminer un seuil. La réussite est validée par l'enseignant en accord avec l'enfant (qui est en général plus exigeant). En cas de différence nette (l'enseignant l'estime dans un premier temps par rapport aux autres élèves) avec le modèle, le maître demande à l'élève de comparer les angles et les côtés séparément pour déterminer d'où viennent ses erreurs.

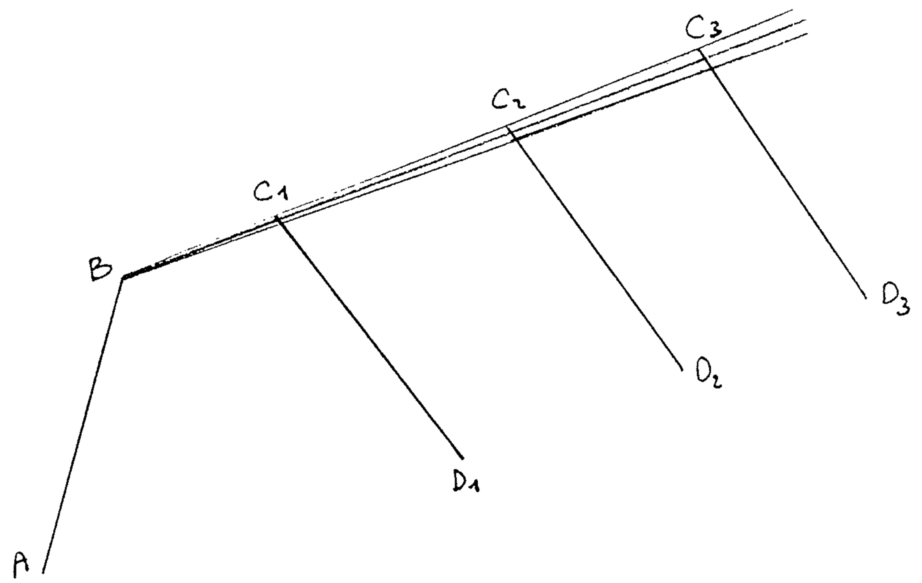


fig.8

Les comportements des élèves que nous prévoyons

Une première difficulté provient du fait que pour reporter un angle, il faut d'abord tracer un sommet et un côté, sans contrainte, puis utiliser l'information fournie par le rapporteur pour tracer le second côté. Nous pouvons prévoir que certains enfants vont commencer par prendre une information avec le rapporteur, puis vouloir l'utiliser d'emblée. Plusieurs cas sont possibles :

- le blocage : l'enfant ne voit pas comment «décalquer» l'angle dessiné sur le rapporteur sur sa feuille de papier.

- des essais de reproduction en soulevant un peu le rapporteur pour dessiner les côtés les plus proches possibles de ceux du rapporteur : cette méthode risque de générer des erreurs que l'enfant pourra repérer s'il procède à des vérifications
- l'émergence de la solution soit directement, soit après un premier essai comme ci-dessus.

B.- La reproduction de pentagones

Remarquons tout de suite que c'est une tâche qui passionne les enfants, ils sont capables de rester plus d'une demi-heure sur leurs figures, de recommencer plusieurs fois si la réussite n'est pas acquise.

Dans les deux classes, les dix premières minutes de la leçon ont été consacrées à faire rappeler, par un des élèves, la façon d'utiliser le rapporteur, la moitié d'entre eux ayant oublié puisque cette séance s'est déroulée environ un mois après la leçon 3. Pour quelques enfants, ce rappel n'a pas suffi, il a fallu de nouvelles explications individuelles de l'enseignant.

Les difficultés rencontrées

Au moment du démarrage du travail, comme nous l'avions prévu, plusieurs enfants, capables d'utiliser le rapporteur pour comparer des angles déjà tracés sont bloqués car ils ne voient pas comment reporter l'angle représenté sur le rapporteur : Ils n'imaginent pas qu'il faille d'abord tracer l'un des côtés et décider de la position du sommet.

Une deuxième difficulté survient pour reporter la position du deuxième côté. Plusieurs cas sont possibles :

• L'extrémité du côté est située «sous» la partie pleine du rapporteur assez loin des bords. Les élèves ont tendance, dans un premier temps, à la repérer par un point qu'ils ne peuvent facilement reporter sur leur feuille, ils essaient de le faire en soulevant le rapporteur sans le déplacer, ce qui les conduit à une position approximative et explique les erreurs de précision.

• Le côté est plus court que le rayon intérieur du rapporteur :

- si celui-ci a une aiguille, elle prolonge le côté mais seulement jusqu'au milieu de la bande, les enfants ont tendance à y marquer cette extrêmité et rencontrent la même difficulté que ci-dessus.
- si le rapporteur n'a pas d'aiguille, il faut prolonger le côté avec une règle soit en dessinant sur la figure de départ, soit seulement pour déterminer sa direction par un petit trait sur le rapporteur. Nous avons vu très peu d'enfants utiliser la première méthode.

Ces difficultés sont peu à peu surmontées par la plupart des élèves, mais à des vitesses très variables et la complexité de la tâche fait que quand ils contrôlent mieux, par exemple, le report d'un angle, ils oublient la vérification de la longueur du côté[18]. D'autre part, s'ils s'aperçoivent qu'un angle ne va pas, ils effacent et corrigent sans nécessairement être conscients des effets de cette correction sur l'angle consécutif.

Enfin quelques élèves ont confondu l'angle à reporter avec son supplémentaire, erreur qui leur faisait perdre du temps mais dont ils se rendaient compte dans la plupart des cas, la forme de leur figure étant alors nettement différente.

---

[18] Voir l'observation de Jérôme en annexe.

Comment expliquons-nous ces difficultés ?

Elles nous semblent témoigner de la persistance de la conception micro-spatiale de la figure. Les démarches qui consistent à prolonger les côtés, ou à dissocier le côté de son support ne sont pas spontanées, elles se construisent (peu à peu), parce que la tâche n'est pas réalisable autrement.

Il faut noter que sur la plupart des figures terminées, les élèves s'empressent d'effacer les traits ayant servi à construire et ne correspondant pas aux côtés, ce qui peut être relié à la ressemblance recherchée avec le modèle.

Remarques

Elles concernent des comportements que nous avons vu apparaître, mais de façon assez rare.

Le tracé du dernier côté

Quand quatre des côtés sont tracés, le dernier s'obtient sans prise d'informations supplémentaires. Par contre, la comparaison de sa longueur avec celle du côté correspondant sur le modèle permet une vérification de la construction. Un petit nombre d'enfants y a recours, alors que la plupart, désireux de tester leur travail, s'empressent de tracer le segment et de déclarer qu'ils ont fini. Dans une perspective de maîtrise spatiale, il serait intéressant de valoriser le contrôle préalable.

Stratégie mixte

Nous avons observé quelques élèves qui, après avoir tracé trois côtés à l'aide du rapporteur, ont obtenu le dernier sommet par intersection des deux cercles de centres respectifs les deux sommets "libres" et de rayons les longueurs des côtés. Ils ont bien réinvesti le travail sur le tracé de triangle fait quelques mois plus tôt.

Résultats quantitatifs

Les observations que nous avons faites ne nous ont pas permis de quantifier tous les comportements rapportés ci-dessus. Une étude plus approfondie nécessiterait une observation clinique des élèves.

Nous ne disposons donc que de quelques observations longitudinales et des résultats à la fin de la séance. Comme les deux classes ont des profils voisins, nous les donnons regroupés.

Sur 43 élèves,

- 18 ont réussi à tracer au moins une bonne figure à l'aide du rapporteur et de la règle graduée.
- 1 a réussi par triangulation avec le compas.
- 6 ont «presque» réussi, c'est-à-dire que les erreurs sur les longueurs sont proches des tolérances qui font partie des exigences en cours dans la classe : 1mm. Si nous avions retenu celles de EVAPM, ces élèves auraient été considérés comme ayant réussi.
- 11 ont échoué, mais plusieurs angles de la figure ont été convenablement reportés.
- 7 enfants sont en difficulté, dont 4 importante. Sauf pour un d'entre eux, ces élèves avaient bien réussi le bilan individuel.

Notons aussi l'extrême hétérogénéité des élèves : dans le même temps, deux d'entre eux ont réalisé les trois figures sans erreur, six en ont réalisé deux et certains ne sont pas arrivés à terminer la première.

Conclusion

Pour une bonne partie des enfants, l'apprentissage n'est pas terminé, une ou deux séances supplémentaires auraient été nécessaires. Mais il nous semble que cette activité, introuvable dans les manuels de 6ème et 5ème, fournit aux élèves une source intéressante d'apprentissages concernant les angles et le rapporteur.

On pourrait penser à prolonger cette activité par un questionnement sur le nombre minimal d'informations à prendre sur la figure de départ pour la reproduire. Notons cependant que l'intérêt spatial peut s'avérer différent de l'intérêt géométrique : saisir plus de mesures qu'il n'en est besoin pour la construction est utile pour vérifier immédiatement cette construction, et le choix des informations permettant de favoriser la précision de la construction effective n'est pas aussi ouvert que celui des informations géométriques suffisant à déterminer la figure.

VII - CONCLUSION SUR LE DEROULEMENT DU PROCESSUS

Nous avons reproduit ce processus trois années, dans les classes de CM_2 de l'école Michelet. Nous avons conclu à sa reproductibilité et à son efficience, relativement aux objectifs que nous nous étions fixés. Seule la durée à affecter à la deuxième leçon nous paraît être sujette à variation : selon la rapidité des élèves à s'approprier la représentation des angles du polygone à compléter par décalque, cette leçon nécessite une ou deux séances.

Nous insistons particulièrement sur le fait que, pour les élèves, le terme d'angle a du sens, aussi bien pour caractériser certaines propriétés d'une figure polygonale fermée[19] que pour désigner la figure formée par deux demi-droites de même extrémité. Ils ne connaissent pas ce terme, mais ils sont capables de traiter les côtés de la figure comme des demi-droites pour comparer les angles.

Enfin, nous pensons qu'il faudrait étudier la possibilité d'introduire le rapporteur à une graduation et à aiguille plutôt que le rapporteur muet. C'est ce que nous ferions pour les élèves de 6ème.

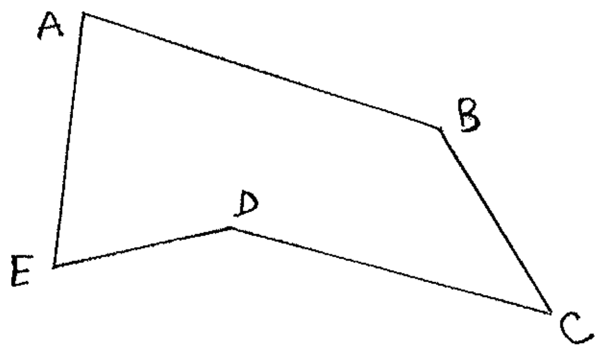
Ce processus a été incorporé dans les leçons ordinaires de la classe de CM_2 de l'école Michelet.

---

[19] Nous n'avons pas eu la possibilité d'introduire la bissectrice. Il aurait été éclairant de comparer leurs résultats à ceux des élèves de 6ème pour l'item EX4 de EVAPM. (voir la partie I).

ANNEXE

OBSERVATION DE JEROME



modèle (réduit)

Jérôme commence par reporter l'angle en A sur le rapporteur convenablement, puis il le pose sur sa feuille et place deux points à chaque extrémité des côtés de l'angle. Il retire le rapporteur et s'aperçoit qu'il n'y a pas de centre ; il mesure alors le côté [AE] et le trace. Il reprend l'angle en A et ne sait pas où le placer. Il prend alors avec son compas l'écartement AE, retrace le segment [AE] avec son double-décimètre, vérifie avec le compas, trace un arc de cercle de centre A, pose le rapporteur à peu près comme il faut, et place un point isolé au bout du côté qui n'est pas [AE].

Il reporte alors l'angle en E sur son rapporteur, et mesure ED. Il le reporte sur la feuille, convenablement mais en traçant un côté [ED] très court, sans en vérifier la longueur. Il reporte alors l'angle en D, et trace [DC]. Il s'aperçoit alors que [DC] n'a pas la bonne longueur, donne l'impression de vouloir tout gommer, se ravise et prolonge [ED] convenablement puis reporte [DC].

Il continue par l'angle en C, place d'abord le rapporteur du mauvais côté puis se ravise et trace [CB].

Il compare la longueur de [AB] sur le modèle avec la distance entre A et B (non tracée), et s'aperçoit qu'elle est trop petite. Aussi, il efface [AE], reprend l'angle en E, le trouve plus large et retrace [EA]. Il vérifie AB, n'est pas satisfait ; il vérifie les autres angles, et termine par B. Comme le côté n'est pas tracé et que le rayon du rapporteur est plus petit que le côté, il vérifie à l'œil. Il vérifie à nouveau l'angle E, le corrige, replace D, reprend l'angle en D, ne mesure pas [DC] mais mesure [CB], et joint [AB] parce que l'enseignant annonce que le temps est écoulé.

Ainsi, Jérôme fait partie des élèves méticuleux, qui contrôlent la longueur du dernier côté avant de la tracer, et qui enclenchent alors un processus de correction qui pourrait être sans fin, car la complexité de la tâche est telle qu'ils n'arrivent pas d'emblée à en contrôler toutes les composantes. Mais il ne se décourage pas pour autant.