PROPORTIONNALITE SIMPLE, PROPORTIONNALITE MULTIPLE

Cycle III

Jean-Pierre LEVAIN
I.R.E.M. de Besançon

Gérard VERGNAUD
Directeur de Recherche C.N.R.S.
Université Paris V

INTRODUCTION

Ces quinze dernières années ont été marquées par un renouvellement important des recherches concernant la résolution des problèmes de proportionnalité. La théorie des stades de Piaget a été progressivement abandonnée. Un ensemble de recherches ont en effet mis l'accent à la fois sur la réussite précoce (dès huit à dix ans), et sur l'échec tardif et durable (au-delà de quinze ans) à des catégories différentes de problèmes de proportionnalité. Ainsi Françoise Tourniaire (1986) souligne que dès huit ou neuf ans 50% des élèves réussissent des problèmes simples de type recherche d'une quatrième proportionnelle, lorsque le domaine de référence est familier et que les nombres sont petits et entiers. Même si les stratégies utilisées sont souvent de type «addition itérée», elles n'en respectent pas moins la structure de proportion du problème. D'un autre côté, Kathleen Hart (1981) relève «une extrême lenteur» dans les acquisitions ainsi que la difficulté pour certains élèves à dépasser une stratégie additive. Elle insiste également sur les conceptions implicites, qui découlent de généralisations tirées du domaine des entiers positifs, et qui constituent de véritables obstacles lorsqu'on étend les opérations aux nombres décimaux plus petits que un. L'exemple le plus connu d'une telle conception fausse est que la multiplication rend «plus grand», la division «plus petit», ou que la division implique normalement que c'est le plus grand nombre qui doit être divisé par le plus petit, jamais l'inverse.

Karplus (1972) a été l'un des premiers chercheurs à analyser les réponses des sujets en fonction de leur niveau de compréhension de la tâche. Il catégorise comme suit les diverses procédures utilisées par les élèves pour résoudre un problème de proportionnalité :

1- une utilisation incomplète ou erronée des données de l'énoncé ;

2- une procédure additive utilisant des différences constantes ;

3- des procédures transitionnelles, itératives ou graphiques n'utilisant qu'une partie des propriétés de la proportionnalité ;

4- les procédures qui font explicitement référence à l'égalité de deux rapports.

Karplus remarque que ces deux dernières catégories de procédures sont utilisées de manière croissante à partir de douze ans dans les milieux sociaux supérieurs et moyens. Mais cette progression ne se retrouve pas chez des adolescents de quatorze à dix-sept ans appartenant à des milieux urbains défavorisés. Il souligne également comme Hart, la difficulté à passer des rapports simples (de type 1/2 ou 1/4) aux rapports plus complexes (de type 3/2).

Aujourd'hui les recherches prennent davantage en compte les connaissances mathématiques impliquées dans les différentes tâches ainsi que la description analytique des procédures spécifiques qu'elles engendrent. Malgré la diversité des perspectives de recherche, la plupart des auteurs s'accordent sur plusieurs points.

Le passage, au cours de l'apprentissage, des problèmes additifs aux problèmes multiplicatifs est relativement difficile. L'enfant doit faire face à la fois à une augmentation importante du nombre de catégories de problèmes, et à une complexité plus grande des procédures et des concepts qui permettent de les résoudre. Un grand nombre de facteurs concourent à rendre un problème plus ou moins complexe :

- sa structure mathématique (s'agit-il d'un problème de multiplication, de division, de la recherche d'une quatrième proportionnelle, d'une proportion simple ou d'une proportion multiple ?) ;
- les valeurs numériques impliquées (nombres petits ou grands, entiers ou décimaux, supérieurs ou inférieurs à 1) ;
- la plus ou moins grande familiarité du domaine de référence de l'énoncé ou éventuellement de l'ordre de présentation des informations.

Cette complexité résulte en partie des premiers apprentissages des structures additives et de l'adaptation qu'elles ont demandée aux élèves. Les structures multiplicatives viennent s'intriquer dans des structures additives déjà partiellement acquises, provoquant des interférences.

Le raisonnement proportionnel est généralement décrit comme une compétence locale qui, progressivement, doit être étendue à une classe de plus en plus large de problèmes. Cette conception s'appuie sur le fait que les savoirs et les savoir-faire des élèves se développent sur une longue période de temps et se construisent à partir d'un grand nombre de situations qui, progressivement, donnent du sens aux concepts et aux procédures utilisées. Les situations les plus primitivement comprises par les enfants sont évidemment les situations de multiplication, avec des nombres entiers et petits et dans des domaines familiers de l'expérience : prix des objets achetés, partage égalitaire.

Beaucoup d'auteurs insistent sur l'importance des processus de conceptualisation et de construction de sens. La maîtrise des problèmes de proportionnalité nécessite en effet l'utilisation de nombreux concepts de nature différente. Un concept opère dans plusieurs situations et plusieurs concepts agissent simultanément à l'intérieur d'une même situation. Le **champ conceptuel des structures multiplicatives** consiste en «l'ensemble des situations dont le traitement implique une ou plusieurs multiplications ou divisions et l'ensemble des concepts et théorèmes qui permettent d'analyser ces situations : proportion simple et proportion multiple, fonction linéaire et n-linéaire, rapport scalaire, quotient et produit de dimensions, fraction, rapport, nombre rationnel, multiple et diviseur, etc.» (Vergnaud, 1991).

La théorie des champs conceptuels fournit un cadre pour comprendre le développement progressif des savoirs et savoir-faire à l'intérieur d'un vaste ensemble de situations de différents niveaux de complexité. Elle intéresse à la fois le psychologue et le didacticien puisqu'elle permet de catégoriser ces différentes situations, d'analyser les procédures utilisées par les élèves, y compris les erreurs, ainsi que d'étudier les principales représentations symboliques utilisées par les élèves. Elle intéresse aussi l'enseignant en l'aidant à proposer aux élèves un ensemble organisé de problèmes. L'enjeu principal est d'aider l'élève à développer un répertoire de procédures d'une richesse et d'une plasticité plus grandes que celles habituellement enseignées comme par exemple les procédures reposant sur le seul coefficient de proportionnalité ou sur le produit en croix.

LE CHAMP CONCEPTUEL DES STRUCTURES MULTIPLICATIVES

Gérard Vergnaud (1983, 1988) a développé une analyse systématique des problèmes multiplicatifs. Cette classification s'appuie sur l'analyse de la structure mathématique du problème, c'est-à-dire des relations qu'entretiennent les questions et les différentes données de l'énoncé.

Si nous considérons par exemple les deux problèmes suivants (Levain, 1992) :

«Paul achète 7 petits pains pour 28 F. Combien coûte un petit pain ?»
«Nicolas achète des tubes de colle pour 28 F; chaque tube coûte 7 F. Combien de tubes a-t-il acheté ?»

La solution pour les deux problèmes est : «28 : 7 = 4». Le «: 7» du premier problème (fig.1) représente l'application d'un opérateur entre deux grandeurs de même nature. C'est un rapport ou un opérateur «scalaire» c'est-à-dire «sans dimension» : «sept fois moins», et son inverse, «sept fois plus», s'appliquent aussi bien aux francs qu'aux petits pains mais ne sont ni des petits pains ni des francs.

Par contre le «: 7» du deuxième problème (fig.2) est un opérateur qui fait passer d'une catégorie de mesure à l'autre. Ce passage s'analyse en termes de fonction, il implique la notion de quotient de dimensions (francs par tube de colle) et de fonction réciproque, dont la maîtrise est délicate.

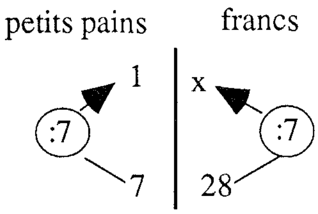

fig. 1

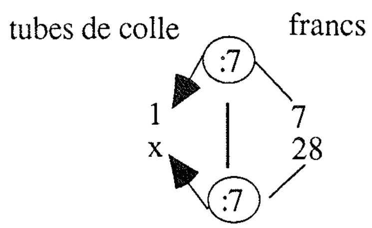

fig. 2

La structure de proportion simple

Cette structure mèt en jeu quatre quantités appartenant à deux espaces de mesure différents. Par exemple :

«4 stylos coûtent 6 francs. Combien coûtent 10 stylos ?

Ici la fonction permettant de passer d'un espace de mesure à l'autre est $f(x) = 1{,}5\ x$.

En fait beaucoup d'élèves, pour résoudre ce problème, mettent en œuvre une procédure «verticale» (fig.3), et utilisent ainsi un opérateur scalaire, sans dimension. «Comme on a multiplié 4 stylos par 2,5, il faut également multiplier 6 francs par 2,5».

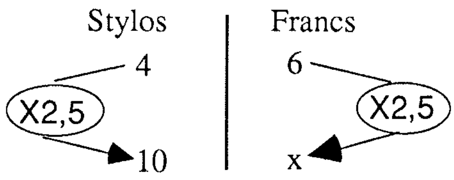

fig. 3

D'autres utilisent plutôt une procédure de type «addition itérée» : «10 stylos c'est 4 plus 4 plus 2 stylos, ils coûteront donc 6 plus 6 plus 3 francs, c'est-à-dire 15 francs».

Enfin certains élèves utilisent une procédure qui combine les deux précédentes : «10 stylos c'est 2 fois 4 plus la moitié de 4 stylos qui coûteront 2 fois 6 francs plus la moitié de 6 soit : 15 francs».

Ces trois procédures mettent en œuvre les propriétés de linéarité de la fonction et traduisent ainsi la compréhension intuitive des propriétés d'isomorphisme :

$$\text{Prix } (2{,}5 \times 4) = 2{,}5 \text{ Prix } (4)$$
$$\text{Prix } (4 + 4 + 2) = \text{Prix } (4) + \text{Prix } (4) + \text{Prix } (2)$$
$$\text{Prix } (2 \times 4) + \text{Prix } (\tfrac{1}{2} \times 4) = 2 \text{ Prix } (4) + \tfrac{1}{2} \text{ Prix } (4).$$

En revanche, certains élèves analysent les données de ce problème de manière horizontale, et calculent directement le coefficient de proportionnalité (fig.4).

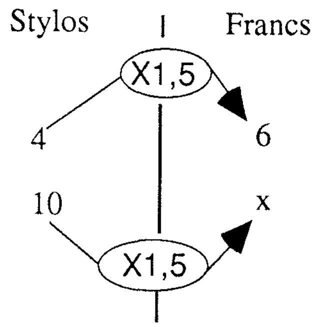

fig. 4

Cette procédure traduit une autre propriété de la fonction linéaire :

Prix (x) = 1,5 x.

Cet opérateur-fonction fait apparaître une difficulté supplémentaire qui tient au rôle des unités de mesure. Il fait passer d'une catégorie de mesure à l'autre. Ce passage s'analyse en termes de quotient de dimensions (1,5 francs / stylo) ; la fonction réciproque est d'une maîtrise délicate.

Au cycle primaire, de nombreux problèmes sont résolus par l'emploi d'une seule multiplication ou division. Ces problèmes sont néanmoins de véritables problèmes de proportion : simplement l'une des quatre quantités de la proportion est égale à 1 (fig.5). Un grand nombre de situations quotidiennes et professionnelles mettent en jeu cette structure (distribution en parts égales, coûts, vitesse uniforme, etc.).

M1	M2
1	f(1)
x	f(x)

fig. 5

Trois grands types de problèmes peuvent donc être distingués, en fonction de la place occupée par l'inconnue :

- Multiplication : trouver f(x)
- Division de type 1 : trouver f(1) (fig. 1)
- Division de type 2 : trouver x (fig. 2).

La structure de proportion simple composée

La structure de proportion simple composée résulte de la composition de deux ou plusieurs proportions simples. Par exemple :

«Une institutrice commande 4 boîtes de feutres. Dans chaque boîte il y a 8 feutres. Un feutre coûte 3 francs. Combien l'institutrice paye-t-elle en tout ? »

Cette structure traduit la composition de deux proportions simples (fig.6). Elle comporte le plus souvent trois espaces de mesure M_1, M_2 et M_3 dans lesquels une fonction f permet de passer de M_1 à M_2 et une fonction f ' de M_2 à M_3.

M1	M2	M3
1	f(1)	
	1	f' (1)
x		f'of(x)

fig. 6

Il s'agit donc d'utiliser la fonction linéaire composée f 'o f. Nous retrouvons donc les trois types de problèmes précédents :

- Multiplication : trouver f 'o f(x)
- Division de type 1 : trouver f '(1) ou f(1)
- Division de type 2 : trouver x.

La structure du produit de mesure

Cette structure (fig.7) renvoie à la composition cartésienne de deux espaces de mesure M_1 et M_2 en un troisième M_3 (aire, volume, produit cartésien). Par exemple :

«A l'anniversaire de Nicolas, il y a en tout 5 garçons et 4 filles. Combien peuvent-ils former de couples si chaque garçon danse avec chaque fille, et chaque fille avec chaque garçon ? »

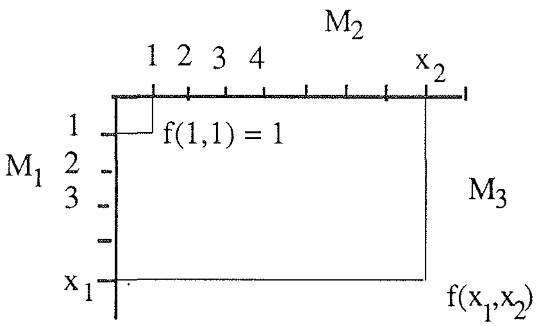

fig. 7

Comme trois variables sont impliquées, cette structure est représentée par une table à double entrée. Deux types de problèmes seulement relèvent de cette structure :

- Multiplication : trouver $f(x_1,x_2)$, connaissant x_1 et x_2
- Division de type 2 : trouver x_1 connaissant x_2, et $f(x_1,x_2)$.

Comme par définition f(1,1) = 1 (par exemple: 1m x 1m = $1m^2$) ; il n'existe pas de division de type 1. Cette structure peut être analysée dans les termes d'une double proportion (Vergnaud, 1981). L'aire d'un rectangle est proportionnelle à la longueur (lorsque la largeur est constante) et à la largeur (lorsque la longueur est constante). De même le volume d'un pavé est en relation de double proportionnalité avec l'aire de base et la hauteur.

La structure de proportion double

Cette structure est proche de celle du produit de mesure puisque la seule différence est que f(1,1) n'est plus nécessairement égal à 1. Prenons l'exemple de la production moyenne de lait d'une ferme en fonction du nombre de vaches et du nombre de jours. Il n'y a ici aucune raison pour que la production moyenne d'une vache par jour soit nécessairement d'un litre de lait. Le temps est une variable fréquemment utilisée dans ce type de structure (consommation, production, dépense etc.). Nous retrouvons ici deux types de division : trouver f(1,1) et trouver x_1 ou x_2 connaissant les autres valeurs.

Principaux résultats des recherches

Nous avons présenté 50 problèmes multiplicatifs à un échantillon composé de 46 élèves appartenant à trois classes de CM_2 (Levain, 1992). Nos résultats montrent que la structure du problème détermine dans une large mesure la réussite ou l'échec des élèves. Nous trouvons en effet une différence notable de réussite entre les problèmes de proportion simple, ceux de proportion simple composée et ceux de proportion double. Les résultats des élèves sont globalement élevés puisque la réussite à l'ensemble des problèmes est de 65%. Les problèmes de quatrième proportionnelle sont réussis à 50%.

Nous observons également une chute de 10 points du pourcentage de réussite quand on passe d'un domaine de référence familier (achat et vente de marchandises) à d'autres moins familiers (vitesse, taux de change, agrandissement).

Le choix de la bonne opération dépend également du type de nombre impliqué ; l'importance du facteur «variable numérique» est maintenant bien validée (Vergnaud 1983, Bell et al. 1984, Greer et Mangan 1984). Par exemple, pour les problèmes de multiplication, les entiers sont mieux réussis que les décimaux supérieurs à 1, eux-même mieux réussis que les décimaux inférieurs à 1 (Greer et Mangan 1984).

En fait, malgré la commutativité de la multiplication, les élèves ne font pas jouer le même rôle au multiplicateur et au multiplicande. Par exemple les élèves ont moins de difficultés à résoudre un problème de multiplication lorsqu'il faut multiplier «0,6 F par 38 crayons» (0,6 X 38), que lorsqu'il s'agit de multiplier «43 F par 0,7 kg»[1] (43 X 0,7). Le premier problème est réussi par 80% des élèves, le second par seulement 48%. Tout se passe comme si la multiplication n'était pas commutative lorsqu'on a des grandeurs : il n'est pas conceptuellement équivalent, pour les élèves, d'avoir un nombre plus petit que 1 en position d'opérateur scalaire ou en position d'«opérande».

Comme on pouvait s'y attendre, les élèves réussissent mieux les problèmes de multiplication que ceux de division. Ils éprouvent des difficultés lorsque le diviseur est supérieur au dividende. L'introduction d'un décimal inférieur à 1 rend les choses plus complexes également pour les problèmes de division (Bell et al. 1984, Greer 1987).

D'ores et déjà, les résultats des recherches permettent d'étayer un ensemble de données qui pourraient servir de relais à l'expérimentation de nouvelles propositions didactiques :

1- Il convient de présenter plus systématiquement aux élèves les différentes structures de problèmes, en faisant varier très largement les valeurs numériques (petits entiers, grands entiers, décimaux supérieurs et inférieurs à 1) ainsi que l'ordre de présentation des informations.

2- Les problèmes proposés doivent pouvoir déboucher sur l'analyse d'une grande variété de procédures de résolution ; un même problème pouvant être traité de différentes manières. Aider les élèves à constituer un répertoire de procédures

---

[1] 0,6 F représente le prix d'un crayon et 43 F le prix d'un kilogramme de viande.

organisées de manière dynamique et signifiante semble essentiel pour favoriser la compréhension des problèmes plus complexes. Il importe également de mettre davantage l'accent sur certaines relations qui sont mal reconnues par les élèves.

3- Il paraît particulièrement utile d'attirer l'attention des élèves sur la commutativité de la multiplication, tout au long du processus d'apprentissage (construction des tables, technique opératoire, résolution des problèmes à plusieurs étapes), notamment après l'introduction des nombres décimaux.

4- Nous insistons, tout particulièrement, sur le fait que les problèmes de multiplication et de division les plus simples (ceux pour lesquels l'une des quatre quantités est égale à 1) sont déjà des problèmes de proportionnalité. Ils doivent être traités comme tels. Il est notamment utile, pour les jeunes élèves, de les présenter avec la structure à quatre termes présentée ci-dessus : ces problèmes simples apparaissent alors comme des cas particuliers de la recherche d'une quatrième proportionnelle. La portée de cette représentation, qui découle de l'analyse des structures multiplicatives, a été jusqu'ici sous-estimée.

Nesher (1988), dans une étude à la fois didactique et clinique, invite 46 élèves âgés de douze ans à représenter systématiquement par écrit les quatre termes appartenant aux deux espaces de mesure d'un ensemble de huit problèmes multiplicatifs complexes. La réussite augmente alors de manière spectaculaire, passant de 38% à 73%. Une recherche plus étendue serait nécessaire afin d'établir de manière certaine la portée de ces résultats et de les intégrer au sein d'un ensemble de propositions didactiques pour le cycle 3 et pour le collège.

Les représentations symboliques ont le mérite d'être laconiques, et de ne retenir de l'information que ce qui est le plus pertinent pour raisonner. Les propriétés de l'espace permettent de bien mettre en évidence les correspondances colonne à colonne et ligne à ligne ; le symbolisme des flèches verticales et horizontales permet de dégager sans ambiguïté les solutions numériques.

Par exemple on peut expliquer utilement les raisonnements concernant le calcul d'une quatrième proportionnelle (fig. 8 et 9).

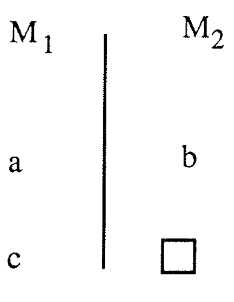

fig. 8

Représentation du problème.

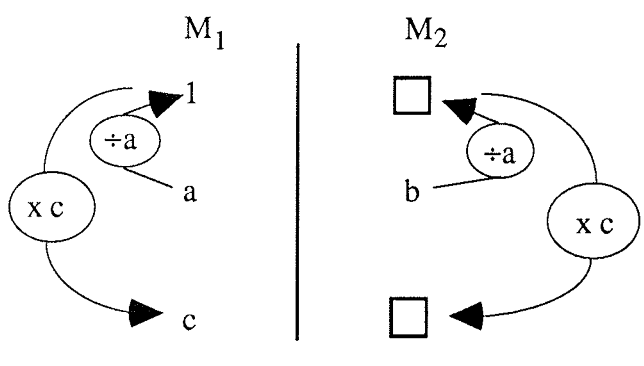

fig. 9

Représentation d'un raisonnement scalaire.

On peut même envisager à la fois à la fin du CM_2 et au collège, d'aborder les problèmes de double proportionnalité. L'exemple suivant va permettre de voir comment.

«Supposons que les élèves d'une classe de CM_2 soient en train de préparer un séjour en classe de neige pour 50 enfants pendant 28 jours. Comment calculer la consommation de sucre nécessaire, sachant qu'il faut compter 3,5 kg de sucre par semaine pour 10 enfants ?»

1. On peut d'abord placer les informations et la question dans un tableau de proportion double (fig. 10).

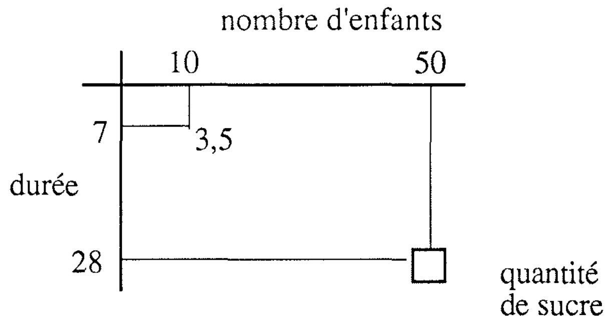

fig. 10

2. On peut ensuite travailler séparément sur les proportions ligne à ligne ou colonne à colonne ; chacune d'elles est une proportion simple puisque l'une des variables est tenue constante (fig. 11 et 12).

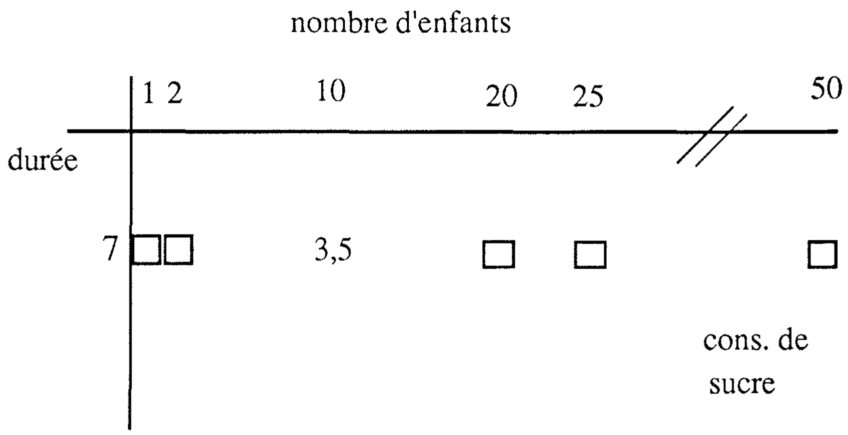

fig. 11

On tient la durée constante (7 jours) et on fait varier le nombre d'enfants et la consommation de sucre correspondante.

nombre d'enfants

durée		10
	1	□
	7	3,5
	14	□
	21	□
	28	□

fig. 12

On tient le nombre d'enfants constant (10 enfants) et on fait varier la durée du séjour et la consommation de sucre correspondante.

3. On peut également représenter certains raisonnements complexes utilisant les rapports comme «5 fois plus, 4 fois plus, ça fait 20 fois plus» (fig. 13) :

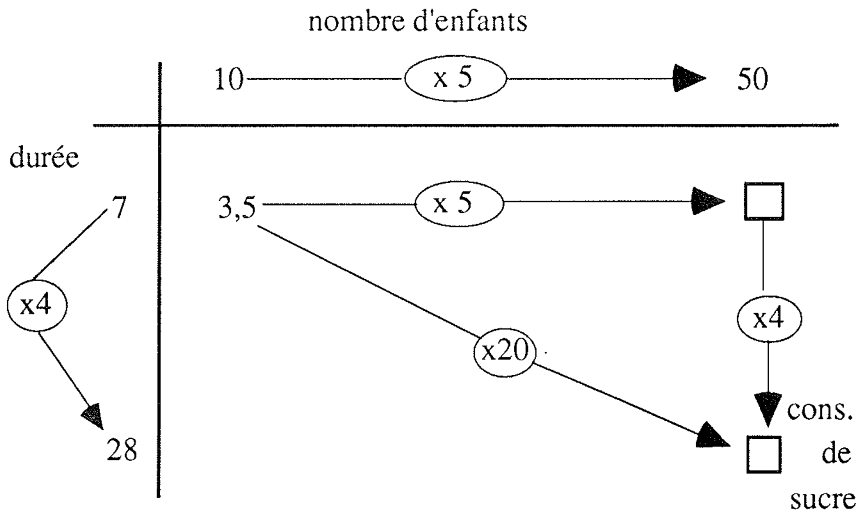

fig. 13

La consommation de 5 fois 10 enfants pendant 4 fois 7 jours est égale à 20 fois, c'est à dire (5 fois x 4 fois) la consommation de 10 enfants pendant 7 jours.

$$\text{Cons}(5 \times 10 ; 4 \times 7) = 4 \times 5 \ \text{Cons}(10 ; 7)$$

qui est une propriété des fonctions bilinéaires

$$f(l_1 x_1 , l_2 x_2) = l_1 l_2 \ f(x_1 , x_2).$$

Le tableau est visiblement plus facile à comprendre que le formalisme des fonctions !

4. Enfin on peut représenter l'équivalence de plusieurs raisonnements (fig. 14) :

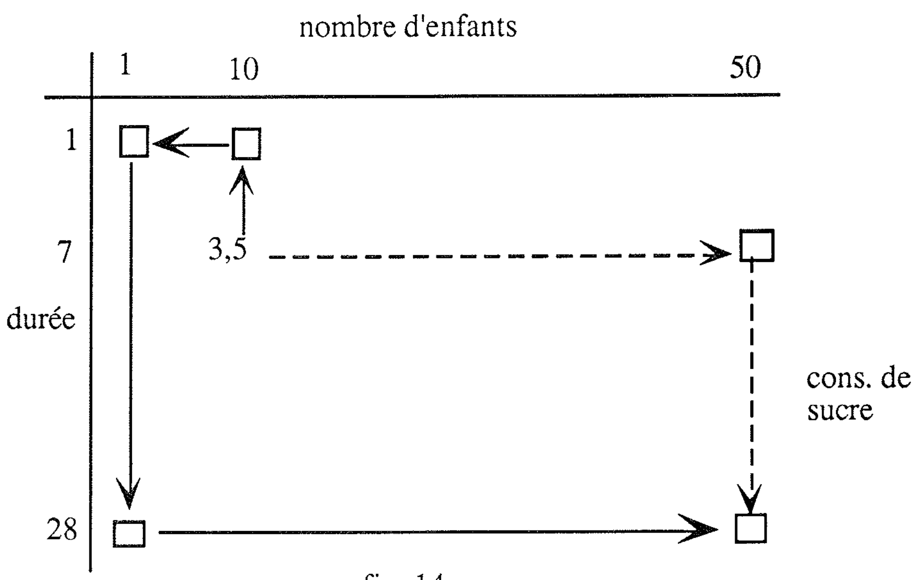

fig. 14

Deux chemins, parmi plusieurs possibles, sont ici représentés,

- **en pointillés** : le calcul de la consommation de 50 enfants pendant 7 jours, puis de la consommation de 50 enfants pendant 28 jours ;

- **en traits pleins** : le calcul de la consommation de 10 enfants pendant 1 jour, puis de 1 enfant pendant 1 jour, puis de 1 enfant pendant 28 jours, puis de 50 enfants pendant 28 jours.

La reconnaissance par les enfants de la diversité des procédures possibles pour traiter les situations de proportionnalité est une voie nécessaire de l'apprentissage.

CONCLUSION

La proportionnalité est probablement l'un des domaines des mathématiques le plus nécessaire dans la vie. On le reconnaît volontiers aujourd'hui. On en reconnaît aussi la difficulté, sans toujours voir suffisamment qu'il existe aussi des raisonnements proportionnels relativement précoces chez les élèves. Dans la dernière période, le Ministère de l'Education Nationale a été enclin à considérer que la proportionnalité ne relevait pas de l'école élémentaire. C'est là une grave erreur d'appréciation, et ceci pour deux raisons distinctes :

- C'est méconnaître la nature des relations et des raisonnements mathématiques que de ne pas considérer les problèmes de multiplication et de division comme des problèmes de proportionnalité.

- La recherche d'une quatrième proportionnelle est à la portée de la majorité des enfants de CM_2, lorsque les données numériques sont simples et que le domaine d'expérience auquel se réfèrent les grandeurs en jeu est familier aux élèves (Levain, 1992). Pourquoi se priver d'une approche didactique s'appuyant sur cette compétence ?

Le malentendu repose en partie sur la méconnaissance par certains enseignants et responsables ministériels de la nature des raisonnements intuitifs des enfants.

Ce sont en effet les propriétés d'isomorphisme de la fonction linéaire qui sont les mieux comprises, comme l'avait montré Ricco dans sa thèse il y a longtemps déjà (Ricco, 1979).

La leçon à tirer de ces remarques est évidemment que c'est sur cette compréhension partielle, par les élèves, des propriétés de la proportionnalité qu'il faut s'appuyer. Cela ne signifie nullement qu'on doive en rester là. Le coefficient de proportionnalité constant est bien entendu une propriété essentielle, qu'il faut faire reconnaître aux élèves. Cela pose alors la question délicate de l'analyse dimensionnelle qu'il n'est guère envisageable d'aborder en tant que telle à l'école élémentaire. Mais les analyses en lignes, colonnes et opérateurs, ont d'une certaine manière une fonction analogue, puisqu'elles contribuent à clarifier le statut des grandeurs en jeu.

REFERENCES

BELL A.W, FISCHBEIN E. and GREER B.(1984), Choice of operation in verbal arithmetic problems : the effects of number size, problem structure and context. *Educational Studies in Mathematics* 2, 129-147.

GREER B. and MANGAN C.(1984), Understanding multiplication and division. *Proceedings of the 6 th Annual Meeting of the Noth American Chapter of the International Group for the Psychology of Mathematics Education.* Madison, Wisconsin.

GREER B.(1987), Understanding of arithmetical operations as models of situations.In Sloboda, J.A., Rodgers, D (Ed. *Cognitive Processes in Mathematics.* Clarendon Press. Oxford, 60-80.

HART K.M.(1981), *Children Understanding of Mathematics.* J. Murray, London.

KARPLUS R., KARPLUS E.F.(1972), Intellectual development beyond elementary school : Ratio, a longitudinal study. *School, Science and Mathematics*, 72, 735-742.

LABORDE C., VERGNAUD G.(1994), Apprentissages et didactique. Où en est-on ?, in Vergnaud G (Ed), *Les recherches sur l'apprentissage et l'enseignement des mathématiques.* Hachette, Paris.

LEVAIN J.P.(1992), La résolution de problèmes multiplicatifs à la fin du cycle primaire. *Educational Studies in Mathematics* , 23, 139-161.

NESHER P.(1988), Multiplicative school word problems : theoritical approaches and empirical findings, in Hiebert J. and Behr M (Ed.), *Number Concepts and Operations in the Middle Grades.* Hillsdale N.J : Erlbaum/Reston, VA : National Concil of Teachers of Mathematics, 19-40.

RICCO G.(1979), Le développement de la notion de fonction linéaire chez l'enfant de 7 à 12 ans. *Doctorat de 3è cycle en Psychologie.* Université Paris V, 29-01-1979.

TOURNIAIRE F.(1986), Proportions in elementary school. *Educational Studies in Mathematics*, 17, 401-411.

VERGNAUD G.(1981), *L'enfant, la mathématique et la réalité*. P. Lang, Berne.

VERGNAUD G.(1983), Multiplicative structures. In Lesh, R. and Landau M. (Ed.) *Acquisition of Mathematics Concepts and Processes*. Academic Press, New York, 127-174.

VERGNAUD G.(1988), Multiplicative structures, in Hiebert J. and Behr M (Ed.), *Number Concepts and Operations in the Middle Grades*, Hillsdale N.J : Erlbaum/ Reston, VA : National Concil of Teachers of Mathematics, 141-161.

VERGNAUD G.(1991), La théorie des champs conceptuels. *Recherches en didactique des mathématiques*. Vol. 10 / 2.3, 135-169.