QUELQUES REMARQUES SUR LES NOMBRES ET LEUR APPRENTISSAGE

Jean-Pierre KAHANE
Université de Paris-Sud

à la mémoire de José Sebastiáo et Silva, qui fut pendant plusieurs décennies le représentant du Portugal à la Commission internationale de l'enseignement mathématique

Le monde des nombres

Les mathématiciens ont tout un arsenal de nombres à leur disposition : les nombres entiers, les nombres rationnels, les nombres réels et parmi eux les nombres positifs et les nombres négatifs, les nombres complexes qui englobent tous les précédents ; et aussi, depuis un peu plus d'un siècle, tout ce qui permet la comparaison et l'énumération d'ensembles infinis : les cardinaux, les ordinaux, l'énumération transfinie. Toute une partie des mathématiques, la théorie des nombres, étudie les nombres sous différents aspects. Pour m'en tenir aux entiers, je citerai seulement le lien, mystérieux, entre leurs propriétés additives et multiplicatives, et en particulier tout ce qui concerne les nombres premiers, et les équations dont les inconnues sont des nombres entiers, qui sont la base de ce que l'on appelle aujourd'hui la géométrie algébrique. On sait que l'équation célèbre de Fermat, $a^n + b^n = c^n$, a donné beaucoup de mal aux mathématiciens depuis trois siècles et demi, et que le théorème attendu, à savoir que, pour n entier ≥ 3, il n'y a pas de solution en a, b, c quand on se restreint aux entiers ≥ 1, n'a été démontré que récemment, par Andrew Wiles (1994).

Il reste des problèmes célèbres non résolus. En voici trois, qui concernent les nombres premiers. Existe-t-il une infinité de nombres premiers « jumeaux », tels que 3 et 5, 5 et 7, 11 et 13, 17 et 19 ? Est-il vrai que tout nombre pair est la somme de deux nombres premiers (hypothèse de Goldbach, 1742) ? Si l'on désigne par $\pi(x)$ le nombre de nombres premiers inférieurs à x, et par *lix* une primitive de 1/log r, est-il vrai que $\pi(x)$ - *lix* $= O(x^a)$ quand $q \to \infty$ pour un a convenable plus petit que 1 (ce serait un pas décisif vers l'hypothèse de Riemann, de 1859, qui exprime que la relation est vraie pour tout $a > 1/2$) ?

La théorie des nombres est fascinante par la simplicité des énoncés et la variété des méthodes d'attaque. Et, indépendamment de la théorie des nombres, le monde de la pensée mathématique est peuplé de nombres et de formes.

Les nombres dans le monde des hommes.

C'est parce que ce monde des nombres est fascinant que les mathématiciens aiment en parler. Mais mon propos, aujourd'hui, n'est pas tant de vous faire visiter ce domaine que d'en repérer quelques portes d'entrée. En fait, tout le monde a une certaine expérience des nombres, et je dirai que cette expérience est bien plus massive et profonde aujourd'hui qu'autrefois.

Les nombres font partie de l'histoire de l'humanité. Les hommes ont appris en même temps, sans doute, à compter des objets et à conter des histoires - en portugais, c'est le même mot qui signifie compter, dans le sens de dénombrer, et conter, dans le sens raconter (contar), et dans beaucoup de langues les termes sont voisins. Les nombres font donc partie de la tradition orale.

Ils font aussi, et plus encore, partie de la tradition écrite. Les premières traces d'écriture, que l'on a relevées sur des tablettes d'argile en Mésopotamie, et qui datent de 3200 ans avant Jésus-Christ, sont relatives à des dénombrements. Les premiers systèmes de numération, chez les Sumériens, apparaissent en même temps que les premiers textes et que l'usage de l'écriture cunéiforme, et sont liés à la comptabilité - leur variété, au départ tient à la variété des objets à comptabiliser, et ce n'est que progressivement que se dégage le système sexagésimal en vigueur chez les Babyloniens, et la numération de position avec la notion de nombre indépendant de toute unité de mesure (2200 av. J.-C.). Chez les Chinois, ce sont les carapaces de tortue datant de la dynastie des Shang (1700-1200 J.-C.) où l'on voit, parmi les 3 000 caractères utilisés, les plus anciens chiffres chinois connus, toujours pour comptabiliser des hommes ou du bétail. Dès cette époque, les Chinois distinguent les unités, les dizaines, les centaines, les milliers et les centaines de milliers. En fait, toute la civilisation chinoise est imprégnée du système de numération décimal. Des livres passionnants ont été publiés, sur l'écriture des nombres dans les différentes parties du monde.

Et les nombres font aussi partie de l'histoire de chaque individu. Nous avons une aptitude innée, comme tous les mammifères supérieurs, à la perception des nombres tout au moins à la perception approximative des nombres entiers assez petits. On peut apprendre à des souris à distinguer les nombres 4, 5 ou 6, quand il s'agit du nombre de mouvements nécessaires pour accéder à un certain résultat. Il semble bien que certains neurones soient spécialisés dans le perception des petits nombres, comme d'autres le sont dans la perception des couleurs ; c'est ce qu'indiquent des travaux récents de neurophysiologie utilisant les techniques mises en œuvre pour le diagnostic des localisations cérébrales dans les épilepsies. Il est d'autre part établi que notre cerveau ne réagit pas de la même façon à l'audition et à la vision des nombres. Il me paraît indispensable, en vue de l'enseignement des mathématiques, de ne plus en rester aux travaux de Piaget, mais de tenir compte l'apport considérable de la neurologie contemporaine (cf. Dehaene1997).

Qu'est-ce qu'un nombre « naturel » ?

Pour les mathématiciens, les nombres naturels constituent un ensemble qu'ils désignent par N, et qui contient les nombres 0, 1, 2, 3, 4, etc. Ainsi, pour un mathématicien, 0 est un nombre naturel, et également $10^{10^{10^{10^3}}}$, le nombre indiqué par Skewes, dans l'année 1930, comme majorant du premier entier x (toujours inconnu) tel que $\pi(x)$ (le nombre de nombres premiers inférieurs à x) dépasse *lix* (le logarithme intégral de x, dont la dérivée est 1/logx) ; l'existence d'un tel nombre x, contrairement à l'opinion dominante à l'époque, avait été établie par Littlewood en 1914.

Mais 0 est une invention récente, et le nombre de Skewes défie l'imagination. Ni l'un ni l'autre ne sont « naturels » au sens usuel du terme. Qu'est ce qui est naturel pour un enfant ? Les nombres cardinaux, qui servent à dire l'effectif des collections (j'ai dix doigts, il y a 5 assiettes sur la table), ou les nombres ordinaux, qui servent par exemple à repérer les âges et les dates ?

Voici deux petites histoires à ce sujet.

La première a pour scène la plage de Nice, qui est une plage de galets et non de sable. Une petite fille de 15 mois est assise sur la plage, avec un seau à côté d'elle, et elle joue à remplir son seau avec des galets, qu'elle prend un à un sur la plage, puis à vider son seau en reprenant les galets un à un, et à recommencer. Après un certain temps, elle se lasse de cette manipulation. Le seau étant vide, elle imite les mouvements précédents en faisant semblant de saisir des galets et de les poser dans le seau. Puis, quand le seau est rempli de ces galets abstraits, elle imite le mouvement de les retirer et de les déposer sur la plage et ainsi de suite. Elle a clairement conscience (comment ?) du nombre de galets que le seau est capable de contenir, et elle n'y met pas plus de galets abstraits qu'il ne convient, à savoir une dizaine. Elle ne retire pas plus de galets abstraits que le seau n'en contient. Il y a là, sous une forme déjà abstraite, une expérience de la notion de cardinalité.

La seconde histoire se déroule entre un petit garçon qui apprend à compter, et son père, en train de travailler à son bureau. Le petit garçon frappe à la porte et entre.

- Dis, Papa, jusqu'où tu sais compter ?
- Jusqu'à mille. Laisse-moi travailler.

Le petit garçon s'en va et revient.

- Dis, Papa, jusqu'où on peut compter ?
- Jusqu'à cent mille Maintenant, laisse-moi tranquille.

Départ, puis retour du petit garçon.

- Dis, Papa on ne peut pas dire cent mille un ?

Que l'histoire soit ou non véridique, elle signifie que la propriété essentielle des entiers à savoir que chaque entier a un suivant, a été saisie. Il est bien peu probable que des animaux accèdent à cette notion. Pouvoir toujours ajouter un, c'est une première vision de l'infini, et c'est sans doute une pure création humaine. Elle est d'ailleurs très liée à manière d'écrire et de nommer les nombres ; l'histoire n'a de sens que parce qu'il y signes et des termes pour 1000, 100 000, 100 001.

La numération décimale.

J'en viens donc à la numération décimale.

Prenons la formule 97 + 4 = 101. Sous forme écrite, elle est universelle, et facile à comprendre. Sous forme parlée, elle dépend de la langue. Seuls les pays de tradition chinoise ont une langue parfaitement adaptée à la numération décimale. L'écriture nombres entiers sous forme décimale est relativement récente ; c'est là que le zéro, issu de l'Inde et transmis par les Arabes, s'est trouvé indispensable.

Pour mesurer le progrès que constitue la numération décimale, il n'est pas mauvais de lire l'entretien de Socrate et du sophiste Hippias dans le dialogue *Le petit Hippias* de Platon. Hippias est sûr de lui, vaniteux, et Socrate fait d'abord mousser sa vanité : « toi qui es si savant, saurais-tu, avec la plus grande célérité et la plus grande exactitude dire combien font trois fois sept cents ? », Hippias répond : « oui, je le saurais », mais sans donner la réponse. Au-delà de l'effet comique, il y a une réalité : les Grecs anciens avaient un système de numération convenable de 1 à 999, utilisant les lettres de l'alphabet. Au delà, il fallait un autre système, moins populaire. L'écriture décimale des entiers nous rend aujourd'hui évidentes des opérations qui ne l'étaient pas dans les systèmes utilisés autrefois.

L'introduction des nombres décimaux est encore plus récente, puisqu'on la doit à Simon Stevin. Elle eut immédiatement un succès prodigieux, en liaison avec l'imprimerie. Par exemple l'introduction des logarithmes, par Neper, fut immédiatement suivie, dans les années 1600, par la publication des premières tables de logarithmes. Les fonctions « élémentaires » de l'analyse, fonctions trigonométriques, puissances, exponentielles, logarithmes, comme plus tard les « fonctions spéciales » furent essentiellement les fonctions dont les valeurs numériques, sous forme décimale, pouvait se trouver dans les tables. Actuellement l'usage des calculettes, avec les écritures décimales à 8 ou 10 chiffres, familiarise tous les enfants avec les nombres décimaux.

Aujourd'hui, la quasi-totalité des valeurs numériques, qu'il s'agisse de grandeurs physiques, de statistiques, de finances, est donnée par leur développement décimal. Les développements décimaux illimités sont une bonne façon de se représenter les nombres réels.

Fractions et fractions continues.

Cependant, historiquement, les fractions sont apparues bien avant les nombres décimaux, et on les a utilisées de préférence aux nombres décimaux en beaucoup d'occasions jusqu'à aujourd'hui. En particulier, les Babyloniens utilisaient volontiers les sommes d'un entier et d'un inverse d'entier ; par exemple, le nombre de jours dans une année est approximativement 365 + 1/4. Au 19[e] siècle encore, pour exprimer le rapport entre le nombre de filles et de garçons à la naissance, Laplace ne disait pas 1,047 mais $\frac{22}{21}$.

Les fractions babyloniennes apparaissent nécessairement lorsque l'on compare deux grandeurs telles que des longueurs, susceptibles de mesure par l'algorithme d'Euclide : on prend la plus petite pour unité, on la retire à la grande autant de fois que l'on peut ; s'il ne reste rien, on a achevé la mesure, qui s'exprime par un nombre entier; sinon, on répète avec le reste et la petite ce qu'on vient de faire avec la petite et la grande ; si l'opération se termine à ce stade, on a le mesure sous la forme d'une fraction babyloniennes a + 1/b. Sinon, on poursuit et on obtient ce qu'on appelle une fraction continue :

$$a_1 + 1/(a_2 + 1/(a_3 + 1/...)), \text{ qu'on écrit } (a_1, a_2, a_3,...).$$

La fraction continue s'arrête si les deux grandeurs sont commensurables, et elle donne alors l'expression du rapport sous forme de fraction, c'est-à-dire d'un nombre « rationnel ». Sinon, le rapport est « irrationnel » et le développement en fraction continue ne s'arrête pas.

Par exemple $\sqrt{2}$ = (1, 2, 2,...). Le développement est illimité et, à partir du deuxième terme, ne contient que des 2. C'est une preuve que $\sqrt{2}$ est irrationnel, et je pense que c'est la première preuve que les Grecs ont donné de l'irrationalité de $\sqrt{2}$, peut être sous forme géométrique.

La théorie des fractions continues est très belle, et elle est très importante dans les mathématiques contemporaines. En particulier, c'est le point de contact obligé entre la théorie des nombres et celle des systèmes dynamiques, élaborée par Poincaré, Denjoy, Herman et Yoccoz. En effet, toute la théorie des fractions continues peut se faire en étudiant la disposition sur le cercle T, de longueur 1, des multiples n d'un nombre donné entre 0 et 1. Mais la disposition relative de ces points, qui constituent l'orbite sur T de la rotation d'angle, ne change pas par une déformation élastique du cercle : c'est une notion qui n'est plus métrique, mais topologique. Au lieu d'une rotation, on peut partir de n'importe quelle transformation bijective du cercle en lui-même; les points de l'orbite seront alors disposés comme ceux d'une certaine rotation, et l'angle de la rotation est le « nombre de rotation » de Poincaré. Comment obtenir la transformation bijective à partir de la rotation et d'une déformation convenable du cercle, et d'abord est-ce possible ? C'est une question où des progrès marquants ont été obtenus depuis une dizaine d'années.

Nombres décimaux et fractions. Les aller-retour

Les calculettes permettent immédiatement de passer d'une fraction à une expression décimale à 8 ou 10 chiffres. Deux questions peuvent se poser :

1) que doit-on conserver, comme chiffres significatifs ?
2) comment retrouver la fraction à partir d'une longue expression décimale ?

La première question est souvent affaire de bon sens. Quant à la seconde, les calculettes programmables permettent de répondre de façon économique. On programme :

1. X =
2. PRINT INT X
3.X = RCP(X—INT X)
4. GOTO 1,

et on obtient à simple lecture a_1, a_2, a_3,.... Les calculettes aiment les calculs répétés, et l'algorithme des fractions continues semble fait exprès pour elles.

Il me semble donc raisonnable de penser qu'après une longue éclipse, les fonctions continues retrouveront une place dans l'enseignement universitaire, et aussi, pour les amateurs dans un apprentissage ludique des mathématiques.

J'ai dit que la réponse à la première question était affaire de bon sens. Il est souvent absurde de donner des proportions ou des statistiques avec un grand nombre de décimales. S'il y a dans une classe 17 filles et 16 garçons, il est inutile et pédant de dire que la proportion de filles est de 51,5 %. Cependant, il y a toujours une signification cachée dans une information surabondante : ici, la proportion de 51,5 % dit que la fraction de départ est $\frac{17}{33}$, et que par conséquent il y a 33 élèves dans la classe, 17 filles et 16 garçons. C'est un exercice intéressant pour les mathématiciens que de déceler les informations cachées dans un fatras de chiffres.

Retour aux apprentissages.

Je viens d'émettre l'idée qu'il faudrait introduire les fractions continues dans l'enseignement et la vulgarisation des mathématiques. Les raisons ne manquent pas : elles sont liées à la mesure des grandeurs, au calendrier, aux systèmes dynamiques, elles ont des propriétés merveilleuses à découvrir, elles s'introduisent naturellement à partir de l'algorithme d'Euclide, ou de la recherche du pgcd, ou de l'orbite d'une rotation, et surtout les calculettes rendent praticables les calculs qui en interdisaient l'accès naguère.

Cependant il y a une objection sérieuse, que je vais examiner maintenant : les propriétés des nombres sont fort belles, mais on ne peut pas tout enseigner !

Je répondrai de façon provocatrice : si, il faut tout enseigner. Si les choses belles et utiles que découvrent les mathématiciens ne sont pas enseignées, elles se perdront. Les mathématiques ont fait des progrès gigantesques au cours de ce siècle. Il faut trouver les moyens pour qu'ils soient assimilés le plus largement et le plus profondément possible. Cela ne veut pas dire, assurément, que chacun doit tout apprendre ; c'est une tâche impossible. Mais le problème n'est pas insoluble s'il y a un nombre suffisant d'étudiants en mathématiques et d'amateurs des mathématiques, susceptibles de s'intéresser à des domaines divers. La question cruciale, dans tous les pays, est d'avoir un nombre suffisant d'étudiants en mathématiques, et qui poussent leurs études assez loin.

Cela dit, que doit-on enseigner à tout le monde ? Pour cela, c'est moins l'état des mathématiques qu'il faut considérer que l'état de la société tout entière. Nous vivons au milieu de signes et de symboles, d'images, de sons, de textes, qui sont tous numérisés. Nous baignons dans les nombres, numéros de sécurité sociale, numéros fiscaux, numéros de comptes, données numériques, statistiques, évaluations, et nous disposons avec les calculettes et les ordinateurs d'outils incroyablement puissants pour le traitement des nombres. Il nous faut absolument donner à tous les enfants les moyens de se repérer dans ce monde numérisé. Il faut qu'ils sachent utiliser les calculettes à bon escient, mais aussi qu'ils sachent pratiquer le calcul mental et le calcul des ordres de grandeurs. Il faut qu'ils se familiarisent avec toutes les écritures des nombres, en particulier l'écriture décimale, les fractions, les puissances de 10. Ils ne sont plus comme les enfants de Baudelaire, rêvant devant les livres et les estampes à des mondes inconnus ; en un instant, la télévision les fait changer d'échelle, de la nano seconde à l'année-lumière, des particules élémentaires aux galaxies. Les physiciens montrent l'exemple, avec les unités qui sautent de 1 à 1000: les pico, nano, micro, milli sont maintenant plus utilisés que les centi et déci de notre enfance, de même que les déca et hecto cèdent le pas au kilo, méga, giga et téra. Nous vivons dans un monde élargi, un monde de très grands nombres.

Ainsi, les enfants d'aujourd'hui doivent savoir manipuler des grands nombres, ce qui était une compétence de spécialiste au début du siècle. Ils voient à la calculette des développements décimaux assez longs, ils doivent savoir les relier à la mesure des grandeurs et aux nombres réels. Naturellement, ils doivent apprendre les nombres négatifs.

Tout cela fait beaucoup, et il n'est pas étonnant que les élèves soient parfois en difficulté. Il y a deux siècles, Lazare Carnot, le révolutionnaire, qui était aussi un bon mathématicien, excluait que l'on enseigne aux enfants les nombres négatifs, qui sont la source de tant de pièges. Il ne voulait même pas qu'on les appelle des « nombres ». Aujourd'hui nous n'avons pas le choix. Les enfants ont la pratique des thermomètres et des ascenseurs, il faut bien qu'ils découvrent le sens de -1, - 2, - 3.

Or chaque nouvel apprentissage, en mathématiques, se heurte à ce qui est acquis précédemment. Une expérience classique consiste à demander aux élèves d'une classe, deux ou trois semaines après l'introduction des nombres décimaux, quel est le plus grand de deux nombres tels que 2,734 et 3,27 (je les écris à la manière française) ; une bonne partie de la classe se trompe, en conservant dans l'esprit la règle que, de deux nombres entiers, celui qui a le plus de chiffres est le plus grand.

Ainsi il est naturel qu'il y ait des incompréhensions, voire des blocages. Cela ne signifie pas que les élèves ont la tête vide, mais au contraire qu'ils tiennent à ce qu'ils ont déjà appris au point de ne pas vouloir le mettre en question. C'est l'analogue de ce que Bachelard appelait les obstacles épistémologiques, et c'est en effet cela que les didacticiens des mathématiques désignent aujourd'hui par ce terme. Plus il y a des choses à apprendre, plus on doit s'attendre à ce type d'obstacles, et les professeurs devraient y être préparés. Tous les enfants - sauf quelques handicapés - peuvent s'initier aux nombres et aux mathématiques. Mais aussi tous les enfants peuvent éprouver, à un moment ou un autre, un blocage, et ce n'est pas plus grave qu'une maladie d'enfance. Il faut pouvoir diagnostiquer et traiter ces blocages, et cela me paraît être une tâche des enseignants relativement nouvelle.

L'apprentissage des mathématiques doit être multiple, non seulement par les matières à apprendre, mais par les méthodes d'enseignement. Il faut faire appel à la fois à la mémoire auditive (comme le font les petits japonais lorsqu'ils apprennent en chœur la table de multiplication), à la mémoire visuelle, aux automatismes et au raisonnement, au évaluations quantitatives et aux règles de calcul, à l'esprit critique et au sens commun.

Au sujet du lien entre la recherche du sens et la pratique du calcul, laissez-moi vous conter une dernière histoire. Il s'agit d'un exercice donné à des enfants comme introduction aux techniques de la division. On suppose que l'institutrice a 210 crayons et 17 élèves elle répartit également ses crayons entre les élèves. Combien lui en reste-t-il ? Réponse attendue : elle distribue d'abord 10 crayons à chacun, il lui en reste 40, puis elle en distribue 2 à chacun, il lui en reste 6. Réponse d'une petite élève : elle donne un crayon à chacun, il lui en reste 193. Le bon sens n'est-il pas du côté de la petite élève ?

Ma conclusion est simplement que l'apprentissage des mathématiques est difficile. Et aussi que, s'il y a une chose encore plus difficile que d'apprendre les mathématiques, c'est de les enseigner.

Lisbonne, le 12 décembre 1997

Quelques références

Sur le monde des nombres

DE KONINCK J.-M. et MERCIER A. (1994) *Introduction à la théorie des nombres Mont-Royal*, Modulo : Québec.

Sur les nombres dans le monde des hommes

Novembre 1993, Naissance des nombres, comptes et légendes. *Le Courrier de l'Unesco*, Paris.

DEHAENE S. (1997) *La bosse des maths*, Odile Jacob : Paris.

IFRAH G.(1981) *Histoire universelle des chiffres*, Seghers : Paris.

ZASLAVSKY C. (1973) *Africa counts*, Prindle, Weber and Schmidt. Boston.

Sur la numération décimale

PLATON Le petit Hippias, 366, (c) (d)

Sur les fractions

LAPLACE Essai philosophique sur les probabilités.