ANALYSER LES PRAXÉOLOGIES
QUELQUES EXEMPLES D'ORGANISATIONS MATHÉMATIQUES

Yves MATHERON
IREM d'Aix-Marseille

Résumé. Comment définir et analyser les « contenus » mathématiques à enseigner tels qu'on les trouve dans les programmes, manuels, cahiers d'élèves, comptes-rendus de séances de cours, etc ? En quoi les mathématiques relatives à la même « notion » diffèrent-elles d'une réforme des programmes à une autre ? La notion d'organisation mathématique, fruit des derniers développements de l'approche anthropologique en didactique, permet de construire des réponses à ces questions ; cet article la présente sous forme exemplifiée ainsi que son usage.

1. La notion d'organisation praxéologique

Les derniers développements de l'approche anthropologique en didactique, initiée par Y. Chevallard et son équipe (voir Chevallard 1992), ont vu émerger le concept d'*organisation praxéologique* (ou plus rapidement de *praxéologie*) comme jouant un rôle de premier plan dans la théorisation[1].

Ainsi, un des fondements sur lesquels repose *la théorie anthropologique du didactique* est-il énoncé en ces termes par Chevallard (1997) :

> ... on tient ici pour un postulat que *toute action humaine procède d'une praxéologie*, en admettant bien sûr que cette praxéologie puisse être en cours d'élaboration, ou, aussi bien, que sa construction se soit arrêtée – peut-être définitivement, à l'échelle d'une vie humaine ou institutionnelle – , en la figeant dans un état d'incomplétude ou de sous-développement, avec, par exemple, un type de tâches mal identifié, une technique à peine ébauchée, une technologie incertaine, une théorie inexistante.

L'adoption d'un symbolisme spécifique - T pour un *type de tâches* contenant au moins une *tâche* t, τ pour une certaine manière de faire ou *technique* permettant d'accomplir une tâche de ce type, θ pour la *technologie* rendant intelligible et justifiant la

[1] On pourra se reporter, pour une présentation plus détaillée à Chevallard (1996, 1996, 1999), Bosch et Chevallard (1999), Bosch (1994).

technique, Θ pour la *théorie* justifiant à son tour et rendant compréhensible la technologie - permet de noter une organisation praxéologique complète sous la forme $[T/\tau/\theta/\Theta]$. En vertu du postulat anthropologique énoncé dans cette citation, il résulte que faire, étudier ou enseigner les mathématiques étant considérés comme des actions humaines parmi d'autres, elles peuvent se décrire selon ce modèle praxéologique.

Le présent article est bâti à partir d'une intervention lors des journées des 28 et 29 mai 1999 à Vichy, organisées par la Commission inter–IREM didactique sur le thème des « activités » au Collège. Son intention est double. Tout d'abord, illustrer le concept d'organisation praxéologique sur des exemples tirés de l'activité mathématique, les organisations praxéologiques relatives aux activités mathématiques étant alors nommées des *organisations mathématiques* et, partant, montrer dans un deuxième temps en quoi il permet d'étudier une même notion mathématique désignée du même nom, mais prise à l'intérieur d'organisations mathématiques de natures différentes car, déployées au sein d'institutions différentes.

Ce dernier point relève ainsi de la prise en compte de l'*écologie*[2] relative à un objet, c'est-à-dire du questionnement du réel existant ou n'existant pas à propos de cet objet, dans une institution où vit une organisation mathématique donnée. Il veut montrer que cette dimension écologique permet de poser des questions telles que : pour un objet identifié dans les programmes comme étant à enseigner, quels types de tâches, accomplies avec quelles techniques, disponibles ou pas, enseigner et être en droit d'exiger des élèves ? Quelle organisation mathématique et, par conséquent, quelle progression mettre en place ? Comment évaluer une « activité » proposée par un manuel et comment en construire ?

Il serait prétentieux, et vain, d'affirmer que le présent article répond à ces questions. Ne serait-ce que parce qu'il n'analyse pas la dimension relative aux praxéologies de l'étude, les *organisations didactiques*, il ne saurait, par essence, en faire un tour complet. Sa modeste ambition est de montrer que les développements récents de la didactique des mathématiques mettent à la disposition de qui veut bien s'en servir, des outils contribuant à forger des réponses, même partielles, à ces questions, « en suivant » les savoirs.

Dans le prolongement d'un travail ancien, mené alors que le concept d'organisation mathématique n'était pas encore disponible[3], nous nous sommes ici exercé à l'utilisation du concept sur un même objet mathématique, bien connu dans le système éducatif français, le théorème de Thalès.

Il s'agit d'étudier, dans cet article, la place du théorème de Thalès relativement à la réalisation de types de tâches, et donc sa place à l'intérieur de techniques et d'énoncés technologiques au sein d'organisations mathématiques différentes, mais contenant toutes l'objet « théorème de Thalès ». Il s'agit, par conséquent, d'étudier ces organisations mathématiques du point de vue des variations produites conjointement sur les autres

---

[2] Au sein de la théorie anthropologique du didactique, le concept d'*écologie* a été étudié, entre autres, par L. Rajoson (1988) et T. Assude (1992) dans leurs thèses menées sous la direction de Y. Chevallard. On pourra aussi se reporter à M. Artaud, T. Assude et Y. Chevallard (1997) in « Actes de la IX$^{\text{ème}}$ École d'été de didactique des mathématiques »

[3] Voir Y. Matheron (1993) « Les répercussions des changements de programme entre 1964 et 1989 sur l'enseignement du théorème de Thalès » in « petit x » n°34

termes lorsque l'un des termes change. Ce travail nécessite alors de balayer divers champs mathématiques, certains d'entre eux relevant de systèmes didactiques vivants ou ayant vécu, et d'autres du savoir savant.

L'étude exhaustive de ces organisations mathématiques excèderait (et de loin !) la place disponible dans cet article, aussi le lecteur curieux pourra-t-il se livrer lui-même à l'exercice, sur cet objet ou sur tout autre, et compléter les éventuels « trous » laissés ici béants. Nous serons conduits à rencontrer successivement, au fil de l'exposé qui suit, les termes d'organisation mathématique *ponctuelle, locale, régionale* et *globale.* Mais, afin de se familiariser avec la notion d'organisation mathématique, nous proposons tout d'abord l'étude d'un exemple, assez éloigné, et qui évoquera certainement divers souvenirs au lecteur.

2. Un exemple

Soit la tâche suivante, bien connue d'un élève ayant suivi une classe de 1ère S par exemple, et qui consiste à résoudre l'équation $x^2+10x-39=0$. Il s'agit d'une tâche relevant d'un type de tâches couramment attendu à ce niveau du système éducatif français.

2.1. Une technique standard

Familier des équations du second degré, on peut imaginer que, pour accomplir la tâche qui lui est demandée, cet élève pourra procéder ainsi :

$\Delta=10^2-4\times1\times(-39)$
$\Delta=100+156$
$\Delta=256$
Comme $\Delta>0$ et que $\sqrt{\Delta}=16$ alors cette équation admet deux racines qui sont :
$x_1=\dfrac{-10-16}{2}$ et $x_2=\dfrac{-10+16}{2}$
soit : $x_1=-13$ et $x_2=3$

On peut aussi raisonnablement penser, qu'avec un peu de sens pratique et de savoir-faire sur les équations du second degré, cet élève pourra remarquer, après avoir « testé » cette équation, que 3 est racine évidente puisque $3^2+10\times3=39$ et que, comme le produit des racines est dans ce cas égal à $\dfrac{-39}{1}$, alors l'autre racine est $-39\div3$, c'est-à-dire -13.

Il n'y a là rien que de très naturel pourra estimer tout un chacun. Il faut cependant remarquer que le « naturel » trouve parfois rapidement ses limites. Ainsi, l'ordinaire des classes actuelles de 1eS ne contient pas, en règle générale, la technique suivante qui fut pourtant routinière en d'autres temps, par ailleurs pas si éloignés :

$\Delta'=5^2-1\times(-39)$
$\Delta'=25+39$
$\Delta'=64$
Comme $\Delta'>0$ et $\sqrt{\Delta'}=8$ alors cette équation admet deux racines qui sont :

$x_1 = \dfrac{-5-8}{1}$ et $x_2 = \dfrac{-5+8}{1}$

soit : $x_1=-13$ et $x_2=3$

C'est, qu'en effet, la technique dite du « discriminant réduit » n'est plus aujourd'hui enseignée et, avec elle, le (petit) calcul algébrique qui la justifiait et lui donnait son intelligibilité.

2.2. Une technique non-standard

Imaginons maintenant que, pour résoudre l'équation $x^2+10x-39=0$, un élève écrive ceci :

$10 \div 4 = 2{,}5$
$4 \times (2{,}5)^2 = 25$
$25+39=64$
$\sqrt{64}=8$
$8-2\times 2{,}5=3$
Donc la racine positive est 3
D'où la racine négative : -13 puisque $3\times(-13)=-39$

Si la détermination de la racine négative, une fois la racine positive trouvée, semble aller de soi, il n'en est pas *a priori* de même pour la première étape consistant à déterminer la racine positive. On peut prendre le pari qu'une telle production d'élève, certes hautement improbable, plongerait nombre de professeurs devant une certaine perplexité : incompréhension envers les différentes écritures produites à chaque pas du calcul, interrogations sur la validité de la démarche suivie, car elle n'est pas justifiée bien qu'elle produise cependant les solutions attendues.

Ces questions trouvent leurs fondements dans le fait que, est reconnue conforme à l'acception que nous avons de l'activité mathématique, une activité relevant d'un certain nombre de critères partagés, parmi lesquels celui qui pose que toute technique doit être compréhensible et justifiée[4]. Sinon la part de vrai qui tient aux réponses fournies, et c'est le cas ici, peut être attribuée au hasard (ou au « délire » de cet élève !) qui aurait, une fois de plus, « bien fait les choses »... mais sûrement pas à une activité, de nature mathématique, pouvant être attribuée à l'élève.

2.3. L'éclairage technologique

Imaginons maintenant que l'élève ait rédigé, pour accompagner son calcul, le texte suivant :

L'aire du carré central est x^2

---

[4] Ce critère est souvent mis au compte des Grecs et de leur apport au développement des mathématiques en Occident. De récents travaux (voir Le Monde du 24/03/99) laissent entrevoir que les Chinois semblent, eux aussi, avoir rencontré des préoccupations d'ordre démonstratif, et relatives aux algorithmes et procédures de calcul qu'ils ont établis

L'aire d'un rectangle est $2,5x$
Donc l'aire des quatre rectangles est : $4\times 2,5x=10x$
L'aire du carré central et des quatre rectangles est : x^2+10x
qui est égal à 39 d'après l'équation
L'aire des quatre carrés gris est : $4\times(2,5)^2=25$
Donc l'aire du grand carré est : $25+39=64$
Le côté du grand carré est donc : $\sqrt{64}=8$
x est donc la solution de : $x+2\times 2,5=8$, c'est-à-dire : $8-2\times 2,5=3$

Cette technique sera-t-elle alors plus compréhensible, davantage justifiée par une démarche qui pourra être attestée comme étant mathématique ? À ce stade, des doutes peuvent encore subsister. Ils se dissiperont à coup sûr si, par ailleurs, ce petit discours est illustré de la figure suivante :

	2,5	
2,5	x x x x	2,5
	2,5	

Le lecteur aura peut-être noté que cette petite fiction, dont l'avènement est fort improbable au sein du système d'enseignement français de cette fin de siècle, emprunte beaucoup à Al-Huwarizmi (« Hisab al-jabr wa'l-muqqâbala », traduction latine « Liber algebrae et almuchabala »), mathématicien arabe du IX^e siècle. Au-delà de ce détour par l'histoire des mathématiques, elle veut montrer qu'effectuer un « pas de côté » est parfois nécessaire pour dénaturaliser le regard, et faire alors apparaître ce qu'une longue accoutumance à la pratique des mathématiques a rendu transparent, donc invisible. Il s'agit en effet ici d'accomplir une tâche t (résoudre dans **R** l'équation $x^2+10x-39=0$), relevant d'un type de tâches T (résoudre dans **R** une équation du second degré), en utilisant une technique τ, devenue allogène pour quiconque ne connaît que la technique associée τ' apprise au sein du système éducatif français de ces cinquante dernières années. Sans le discours tenu sur cette technique, sous la forme d'une mise en texte qui s'appuie sur l'observation d'une figure particulière, son intelligibilité et sa justification nous paraissent, de prime abord, inaccessibles. Ce discours, nécessaire, sur la technique est appelé *la technologie* θ *de la technique* τ.

On peut s'interroger sur cette technique. Est-elle fiable, facilement reproductible, « marche-t-elle » à tout coup, obtient-on ainsi toutes les racines et pour tout type d'équations du second degré ?

On peut aussi s'interroger sur le discours technologique qui la justifie et la rend compréhensible. Sur quoi s'appuie-t-il, qu'est-ce qui le rend lui-aussi intelligible, et surtout qu'est-ce qui le justifie ? Le lecteur du XX^e siècle notera qu'il présuppose l'existence de certaines propriétés de ces figures et de leurs aires, la possibilité de déterminer des longueurs à partir d'aires, etc. Ce dernier niveau, nécessaire lui-aussi et qui, à son tour, justifie la technologie, relève de *la théorie*. Son étude ne sera pas menée ici, mais il ne semble guère risqué d'affirmer que ce discours sur la technologie aurait pu trouver son fondement, à l'époque de Al-Huwarizmi, sur certaines parties des Eléments d'Euclide, sur les enrichissements et les ruptures opérées par ses continuateurs grecs, sur les mathématiques hindoues et babyloniennes dont les arabes maîtrisaient la connaissance[5].

2. Un exemple d'organisation mathématique ponctuelle

Page 70, un ouvrage de 3[e] édité en 1993[6] propose l'activité 6 du chapitre 5 relatif au théorème de Thalès :

Construction d'une quatrième proportionnelle

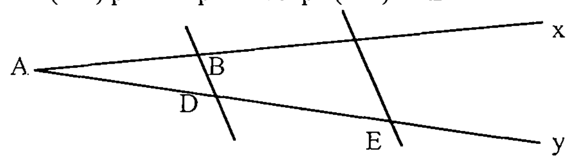
On appelle quatrième proportionnelle à trois nombres a, b et c le nombre x tel que $\frac{a}{b} = \frac{c}{x}$.

A Calcul

Trouve, en résolvant une équation, la quatrième proportionnelle aux nombres 3, 5 et 7.

B Construction

Construis, sur la même demi-droite [Ax), deux segments [AB] et [AC] tels que : AB=3cm, AC=5cm. Trace une autre demi-droite [Ay), d'origine A. Place, sur cette demi-droite, le point D tel que AD=7cm. La parallèle à (BD) passant par C coupe (AD) en E.



En appliquant le théorème de Thalès, tu obtiens :

$\frac{AB}{AC} = \ldots$

Donc AE représente la valeur de la quatrième proportionnelle.

C Contrôle : mesure AE sur ton dessin.

Dans cette activité, deux tâches, désignées par leur nom dans le texte, peuvent être identifiées : la première consiste à « trouver la quatrième proportionnelle aux nombres 3, 5 et 7 », la seconde, à laquelle nous nous intéresserons, est la tâche *t* « construire la quatrième proportionnelle à 3, 5 et 7 » sur une figure analogue à celle de l'activité. Elle est relative au type de tâches *T* « construire **une** quatrième proportionnelle à trois longueurs ».

L'accomplissement de cette tâche *t*, par les élèves, est guidé et scandé par des injonctions telles que « construis », « trace », « place », « tu obtiens », « mesure » qui constituent autant de sous-tâches dans lesquelles il est nécessaire de s'engager pour

[5] Voir J-P Collette : « Histoire des mathématiques »T1 et A. Dahan-Dalmedico/J. Peiffer : « Une histoire des mathématiques. Routes et dédales »

[6] Il s'agit de l'ouvrage « Mathématiques 3[e] » de L. Corrieu, D. Desnoyer, D. Marchand, S. Rogemond , P. Verdier. Editions Delagrave

accomplir *t*. Le canevas, support sur lequel va s'appuyer la réalisation de cet ensemble de sous-tâches, constitue la manière de faire, la technique τ associée à *t*, et qui va permettre d'accomplir *t*.

Cette technique ayant été décrite, il faut alors un moment, dans le texte de cette activité, pour garantir que, s'engageant à suivre ce qui lui est demandé, l'élève parviendra effectivement à déterminer la quatrième proportionnelle recherchée. C'est l'évocation du théorème de Thalès, dont la charge de l'application incombe en partie à l'élève (« En appliquant le théorème de Thalès, tu obtiens : $\frac{AB}{AC} = \ldots$ ») qui, tout à la fois, justifie que la mise en œuvre de la technique décrite permet d'obtenir la quatrième proportionnelle cherchée (« Donc AE représente la valeur de la quatrième proportionnelle ») et rend compréhensible la technique engagée, notamment le fait d'avoir tracé deux demi-droites de même origine, d'y avoir placé des points définis par leurs distances à l'origine, d'avoir tracé certaines parallèles... Le théorème de Thalès joue ainsi le rôle de l'élément technologique θ à partir duquel s'organise un (petit) discours, ramassé en deux lignes à la fin de la partie B de cette activité, et qui est à la fois justificatif et explicatif.

Pour décrire complètement l'organisation mathématique bâtie autour de ce *type de tâche T* « construire une quatrième proportionnelle à trois longueurs » (car en décryptant le contrat didactique, l'élève doit comprendre que l'étude de cette tâche *t* a valeur générale pour toute autre tâche $t' \in T$), il est nécessaire de rechercher l'élément qui, à son tour, va justifier la technologie θ justifiant cette technique. Ce dernier terme du quadruplet, théorique et noté Θ, peut être évoqué sous la forme de l'ensemble des connaissances mathématiques enseignées et nécessaires pour l'établissement du théorème de Thalès dans le programme de 1985 des Collèges. On peut remarquer, à la lecture de divers manuels en usage, qu'il varie considérablement de l'un à l'autre. On peut citer par exemple le « théorème des parallèles équidistantes », le cosinus, les aires, la proportionnalité... ou parfois, hélas, aucun de ces éléments ! Le manuel étudié, quant à lui, s'appuie sur les deux premières notions évoquées à travers les activités 1 et 2 qu'il propose, pages 64 à 66.

L'étude de cette seule « activité » d'un manuel révèle ainsi l'organisation mathématique sous-jacente $[T/\tau/\theta/\Theta]$, et qui peut être explicitée. Pour cette activité, mais il peut en aller autrement pour une autre activité analysée, on remarque qu'elle s'organise autour d'un seul type de tâche *T* « construire une quatrième proportionnelle à trois longueurs ». Il s'agit alors d'une organisation mathématique *ponctuelle* (Chevallard 1999).

4. Un exemple d'organisation mathématique locale

Jusqu'à l'année scolaire 1998-1999, le programme en vigueur en classe de 3^e est le programme de 1985, entré en application en 1989. C'est à ce niveau que les élèves rencontrent officiellement, pour la première fois, le « théorème de Thalès ». Voici quelques extraits de ce programme pour la partie « travaux géométriques » :

1. Travaux géométriques 1. Enoncé de Thalès relatif au triangle. Application à des problèmes de construction (moyenne géométrique...). Pyramide et cône de révolution : volume, section par un plan parallèle à la base. Effet d'un agrandissement ou d'une réduction sur les longueurs, aires et volumes, masses. [...] 5. Distance de deux points en repère orthonormal : Equation d'un droite sous la forme : y=mx ; y=mx+p ; x=p. Coefficient directeur ; parallélisme, orthogonalité en repère orthonormal.

Une circulaire du 23/01/89, dont nous citons quelques extraits, est consacrée à l'« explicitation des connaissances, des méthodes et des capacités exigibles des élèves » relatives à ce programme :

1.a. Énoncé de Thalès relatif au triangle, application à des problèmes de construction [...] Des activités de construction sur droites graduées contribueront à éclairer la correspondance entre nombres et points (construire les $\frac{9}{7}$ d'un segment, placer sur une droite graduée le point d'abscisse $-\frac{2}{3}$,...). [...]	- Connaître et utiliser dans une situation donnée le théorème de Thalès relatif au triangle : ($\frac{AB}{AB}=\frac{AC}{AC}$, B' est sur la droite (AB), C' est sur la droite (AC)) et sa réciproque. - Connaître et utiliser dans la même situation la propriété : $\frac{AB}{AB}=\frac{AC}{AC}=\frac{BC}{BC}$ - Savoir construire une quatrième proportionnelle. [...]
b. Pyramide et cône de révolution ; volume. Section par un plan parallèle à la base [...]	[...]
L'observation et l'argumentation au cours de ces travaux font appel aux acquis de géométrie plane et à quelques énoncés courants concernant l'orthogonalité et le parallélisme. [...]	[...]
c. Effet d'un agrandissement ou d'une réduction sur les longueurs, aires et volumes [...] [...]	- Utiliser, dans l'agrandissement ou la réduction d'un objet géométrique du plan ou de l'espace, la propriété : si les longueurs sont multipliées par k, alors les aires sont multipliées par k^2, les volumes le sont par k^3, et les angles sont conservés.
Des activités expérimentales dégageront l'effet d'un agrandissement ou d'une réduction sur les aires, les volumes.	- Connaître et utiliser la propriété, pour la section d'une pyramide ou d'un cône de révolution par un plan parallèle à la base, d'être une réduction de la base.
5. Distance de deux points en repère orthonormal. Équation d'une droite sous la forme : y=mx, y=mx+p, x=p ; coefficient directeur. Parallélisme, orthogonalité en repère orthonormal. [...]	[...]
...L'équation générale d'une droite sous la forme ax+by+c=0 est hors programme.[...]	[...]

Des types de tâches apparaissent clairement dans la colonne de droite où, d'après la circulaire, « sont fixées les capacités exigibles, c'est-à-dire les connaissances et les savoir-faire qu'on demande à l'élève d'avoir assimilés et d'être capable d'exploiter avec ce que cela comporte d'utilisation d'acquis des classes antérieures », ainsi que dans la colonne de gauche où « sont fixés les contenus et les limites du programme, ainsi que l'orientation des activités », dont les commentaires précisent qu'elles « ne sauraient se limiter aux seuls points évoqués dans la colonne de droite ». À la lecture de ces extraits de programme, on peut par exemple citer, comme étant attendus à la fin de l'enseignement, les types de tâches suivants :

T_1=calculer des longueurs dans des triangles en « situation de Thalès » (colonne de droite 1.a)

T_2=construire un segment de longueur $\frac{a}{b}$ fois la longueur d'un segment donné (colonne de gauche 1.a)

T_3=déterminer un coefficient d'agrandissement ou de réduction d'aire ou de volume (colonnes de gauche et de droite 1.c)

Toutes engagent des techniques issues de l'application du théorème de Thalès. Son « omission » n'interdirait peut-être pas l'enseignement et l'apprentissage de méthodes permettant la réalisation de ces types de tâches, mais ces techniques ne seraient alors pas justifiées et, du point de vue des élèves, sans doute « n'y aurait-il rien à comprendre », mais simplement à croire sur parole (le professeur) et appliquer ce qui est dit être le vrai. On peut alors s'interroger sur « la valeur éducative » d'un tel enseignement, s'apparentant davantage à un dressage qu'au développement d'une construction raisonnée engageant les capacités de réflexion et de critique des élèves, tâche qui est officiellement dévolue aux professeurs[7].

Ainsi les trois types de tâches T_1, T_2, T_3 mentionnés auparavant, ainsi que les techniques qui leur sont associées, sont-ils étroitement dépendants, pour leur mise en œuvre, de l'élément technologique « théorème de Thalès ». L'organisation mathématique qui en découle, résultant de l'agrégation de différentes organisations mathématiques ponctuelles autour de l'élément technologique θ = « théorème de Thalès », et qui peut se noter $[T_i/\tau_i/\theta/\Theta]$ avec $i \in \{1,2,3\}$, est alors appelée une organisation mathématique *locale* autour du *thème* du théorème de Thalès[8].

Remarquons que « l'analyse » qui vient d'être exposée, ainsi que la notation d'une telle organisation mathématique à l'aide du formalisme $[T_i/\tau_i/\theta/\Theta]$, permettent de souligner quelques « spécificités » rencontrées à la lecture de nombre de manuels de 3^e relatifs à ce programme. Par exemple, il ne paraît pas d'usage dans la majorité des manuels (la totalité ?) d'utiliser le théorème de Thalès pour l'établissement des équations de droites (point 5 du programme relatif aux travaux géométriques) sous la forme y=mx+p. L'élément technologique relatif à la caractérisation d'une droite, non parallèle à l'axe des ordonnées, comme ensemble de points M(x ; y) tels que y=mx et y=mx+p, est

---

[7] La circulaire 97-123 du 23-5-97 fixe un triple objectif à « la mission du professeur, qui est d'instruire les jeunes qui lui sont confiés, de contribuer à leur éducation et de leur assurer une formation en vue de leur insertion sociale et professionnelle »

[8] Pour de plus amples développements, voir Chevallard (1999) et Bosch et Chevallard (1999)

alors *absent*. Est-ce la conséquence de l'interprétation, dans les cercles noosphériens[9] fréquentés par les auteurs de manuels, des instructions du programme qui précisent effectivement que « l'équation générale d'une droite sous la forme $ax+by+c=0$ est *hors programme* » ; mais qui, semble-t-il, ne font pas porter « l'interdit » sur la justification de l'écriture $y=mx+p$?

Avec l'absence de cet élément technologique, la justification de l'étendue de *la portée* des techniques qui, par exemple, vont permettre de déterminer les coefficients m et p pour *toute* droite, non parallèle à $(y'y)$, est alors manquante. Ce choix, relatif au premier chef à l'organisation mathématique, n'est pas sans conséquence sur les procédés *didactiques* utilisés par les auteurs de manuels. Ainsi, par exemple, le manuel de 3[e] dont nous avions précédemment extrait l'activité relative à la construction d'une quatrième proportionnelle, propose-t-il l'activité 1 suivante, dans son chapitre 9 relatif aux équations de droites :

> A Soit l'équation du premier degré à deux inconnues (1) : $4x-2y+8=0$.
> Le couple (-2 ; 0) est solution de (1) car : $4\times(-2)-2\times0+8=0$.
> Le couple (1 ; 7) n'est pas solution car : $4\times1-2\times7+8\neq0$.
> Les couples suivants sont-ils solutions de (1) ?
> (0 ; 4), (1 ; 6), (-1 ; 1), (-1 ; 2), (0,5 ; 5), (0,25 ; 4).
>
> B Complète les couples suivants de telle sorte qu'ils soient solutions de l'équation (1) :
> (-2 ; ...), (-3 ; ...), (2 ; ...), (3 ; ...), (2,5 ; ...), (... ; 12), (... ; 4), (... ; -7), (3,5 ; ...), (x ; ...).
>
> C Utilise un repère orthonormal (O ; I ; J) pour représenter par le point de coordonnées (x ; y) chaque couple obtenu au B.
> Que remarques-tu pour les points obtenus ?
> Place également les points de coordonnées (x ; y) considérés dans la partie A. Que remarques-tu pour les couples non solutions de (1) ?
>
> D Nous admettrons que :
> **L'ensemble des points dont les couples de coordonnées sont solutions de l'équation (1) est une droite (D). Tous les couples (x ; y) de coordonnées d'un point situé sur la droite (D) sont des solutions de l'équation (1).**
> On dit que l'équation $4x-2y+8=0$ est une équation associée à la droite (D), ou plus simplement une équation de (D).
> Vérifie que l'équation (1) peut s'écrire $y=2x+4$.
> En classe de Troisième, on utilisera principalement les équations de droite sous cette forme.

Le procédé didactique auquel l'ouvrage a recours, et avec lui nombre de professeurs dans des situations concrètes d'enseignement en face d'une classe, est caractérisé par Brousseau (1996) sous le terme de *« contrat d'ostension »*. Il est décrit par Brousseau de la manière suivante :

---

[9] Pour Chevallard (1985, 1991), la noosphère est le terme parodique par lequel il désigne « la sphère où l'on pense – selon des modalités parfois fort différentes – le fonctionnement didactique ». Elle est constituée des représentants du système d'enseignement (associations de professeurs, militants pédagogiques,...) et de représentants de la société (associations de parents,...)

> Le professeur « montre » un objet, ou une propriété, l'élève accepte de le « voir » comme le représentant d'une classe dont il devra reconnaître les éléments dans d'autres circonstances. La communication de connaissance, ou plutôt de reconnaissance, ne passe pas par son explicitation sous forme d'un savoir.

Ce procédé répond à la nécessité pour le professeur

> de prétendre communiquer une connaissance en faisant l'économie à la fois des situations d'action où elle transparaît, de sa formulation et de *l'organisation du savoir correspondant*[10].

Conséquence didactique :

> L'induction radicale exigée par le contrat d'ostension échoue souvent. Le professeur soutient la fiction de sa légitimité et de sa fécondité par des contrats d'analogie. La classe n'est plus suggérée par un mais par plusieurs éléments, dont les propriétés « visibles » communes et leurs variations sont supposées plus « génériques ».

Une autre remarque peut être faite concernant un autre théorème « majeur » à ce niveau du Collège : le théorème de Pythagore. De nouveau, mais pour des raisons différentes, le théorème de Thalès abordé dans les programmes de 3^{e} de 1989 ne peut servir d'élément technologique justifiant l'établissement du théorème de Pythagore : ce dernier est, quant à lui, enseigné en 4^{e} dans les programmes mis en œuvre en 1988. Pour l'enseignement de ce théorème, comme pour l'exemple des équations de droites, de nombreux ouvrages de 4^{e} ont recours au contrat d'ostension, celui-ci s'appuyant alors sur le théorème « chinois » de Pythagore permettant de « visualiser » l'aire d'un carré situé à l'intérieur d'un autre carré[11].

Ces deux remarques sont les conséquences d'un trait spécifique à la fonction assignée au théorème de Thalès dans les programmes de 1985, et dont l'année scolaire qui s'achève voit le remplacement. Comme il a été dit, le théorème de Thalès joue dans ce cas le rôle d'un élément technologique permettant de justifier certaines techniques relatives au thème qu'il engendre, thème qui peut se laisser décrire à l'aide du concept d'organisation mathématique locale. Il n'a nullement la fonction de justifier des éléments technologiques, comme d'autres théorèmes par exemple qui, à leur tour, donneront naissance à des techniques qu'ils justifieront. Cette fonction fut pourtant assurée par le théorème de Thalès, à l'intérieur d'un autre type d'organisation mathématique enseignée au Collège, avant le bouleversement curriculaire initié par « la réforme des mathématiques modernes ».

---

[10] Souligné par nous

[11] Sur les effets produits par ce type d'enseignement du théorème de Pythagore sur l'apprentissage des élèves, voir A et R Noirfalise (1996) : « Visibilité et intelligibilité de l'action du professeur », in Actes de la VIII^{e} école et université d'été de didactique des mathématiques

5. Un exemple d'organisation mathématique régionale

L'étude d'un manuel des années soixante[12] va permettre d'illustrer, toujours sur le même objet (le théorème de Thalès), la notion d'organisation mathématique régionale. Comme le laissait entendre la fin du paragraphe précédent, des résultats technologiques, des notions et des théorèmes, peuvent à leur tour servir à justifier d'autres résultats technologiques desquels vont découler diverses techniques permettant d'accomplir autant de tâches. Autour de l'élément qui vient alors occuper la quatrième place à l'intérieur du quadruplet désignant une organisation mathématique, celle de la théorie, s'agrège alors tout *un secteur* des mathématiques enseignées. L'organisation mathématique considérée porte alors le nom *d'organisation mathématique régionale* dont le formalisme se complexifie d'un nouveau système d'indice : $[T_{ij}/\tau_{ij}/\theta_j/\Theta]$, puisque l'élément théorique Θ engendre des énoncés technologiques θ_j, et que si θ_0 est l'un d'entre eux, ce dernier pourra quant à lui justifier des techniques τ_{i0} permettant d'accomplir les types de tâches T_{i0}.

Afin d'ôter ici toute ambiguïté, on peut remarquer que le terme de « théorie » n'a pas forcément la « valeur » que la culture commune lui attribue souvent : il est ici relatif à une organisation mathématique donnée, dans une institution donnée. Sous cette acception, il s'agit ainsi, pour ce qui nous occupe, de considérer l'institution des classes de mathématiques des Collèges, à l'intérieur desquelles les éléments théoriques enseignés pourront paraître bien indigents pour qui réserve le terme de « théorie » à des objets de savoir de bien plus « noble extraction ».

Nous reproduisons page suivante quelques extraits du programme de 1964, par ailleurs désigné sous le terme de programme « unifié », pour la classe de troisième (arrêté du 26/10/64), auquel se réfère l'ouvrage.

Il n'est pas possible de reproduire tous les éléments qui permettent de fonder la description de l'organisation mathématique régionale exposée ici : il faudrait mentionner trop de pages, de cours et d'exercices, de cet ouvrage[13]. Nous nous contenterons de signaler certains des éléments technologiques θ_j, pour $j \in \{1,2, \ldots,10\}$, justifiés ou rendus compréhensibles grâce à l'élément théorique Θ que représente, dans cette organisation régionale, le théorème de Thalès. Nous omettrons les types de tâches et les techniques associées engendrées par les θ_j. Le théorème de Thalès, noté ici Θ, est établi dans le chapitre II, intitulé « Le théorème de Thalès. Application au trapèze et au triangle », de géométrie plane.

---

[12] Il s'agit de l'ouvrage de M. Monge et M. Guinchan, « Mathématiques 3^e^ », Librairie Belin

[13] Une étude plus complète figure dans le *Journal de la Commission inter-IREM de didactique* n°4, édité par l'IREM de Clermont-Ferrand.

ALGÈBRE

[...] 4. Notions de variable et de fonction ; exemples. Représentation graphique d'une fonction d'une variable. Fonction ab de la variable x ; sens de variation. Représentation graphique. Mouvement rectiligne uniforme. [...]

GÉOMÉTRIE

A.-Géométrie plane.

1. Rapport de deux segments. Rapport de deux segments orientés portés par une même droite. Division d'un segment dans un rapport donné (arithmétique et algébrique).

Théorème de Thalès. Application au triangle et au trapèze ; étude de la réciproque dans le cas du triangle et du trapèze.

2. Triangles semblables. Cas de similitude.

3. Projections orthogonales.

Relations métriques dans le triangle rectangle.

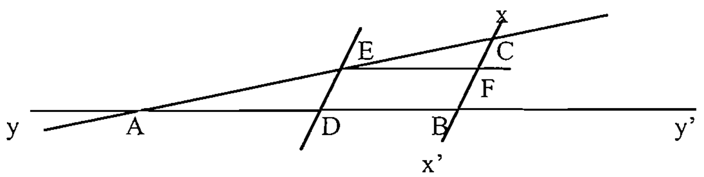
Rapports trigonométriques (sinus, cosinus, tangente et cotangente) d'un angle aigu. Relations trigonométriques dans le triangle rectangle. Valeurs numériques des rapports trigonométriques des angles de 30°, 45°, 60°. Usage des tables de rapports trigonométriques.

4. Relation entre les longueurs des segments joignant un point donné aux points d'intersection d'un cercle avec deux sécantes passant par ce point. Puissance d'un point par rapport à un cercle.

5. Révision des notions sur les polygones réguliers étudiés en Quatrième. Relations entre le côté, le rayon du cercle circonscrit et l'apothème du carré, de l'hexagone régulier, du triangle équilatéral. Formules (sans démonstration) donnant la longueur (le périmètre) du cercle en fonction du rayon, et la longueur d'un arc de cercle. Définition du radian.

6. Révision des formules relatives aux aires de polygones plans (rectangle, triangle, trapèze, parallélogramme). Formules (sans démonstration) donnant l'aire d'un cercle en fonction du rayon et l'aire d'un secteur circulaire.

Le chapitre III, « Divisions semblables sur deux droites parallèles », ouvre sur les « triangles homothétiques par rapport à un sommet ». Après avoir défini le terme et établi l'égalité des angles de deux tels triangles, le cours aborde la définition du rapport d'homothétie. Elle se fonde sur l'établissement de l'égalité des rapports de mesures algébriques des côtés homologues de deux triangles homothétiques :



Cette figure est accompagnée de deux autres, similaires, mais illustrant des cas où le rapport de l'homothétie est négatif. L'ensemble forme la figure 69 et l'ouvrage note, en son paragraphe 161 :

161. Dans tous les cas de figure (fig. 69), l'application du théorème de Thalès aux triangles ABC et ADE permet d'écrire (n°123) l'égalité :

$$\frac{\overline{AD}}{\overline{AB}}=\frac{\overline{AE}}{\overline{AC}} \qquad (1)$$

Menons par le point E la parallèle à la droite $y'y$; cette parallèle rencontre $x'x$ au point F. L'application du théorème de Thalès aux triangles ABC et EFC permet d'écrire l'égalité : $\frac{\overline{AE}}{\overline{AC}}=\frac{\overline{BF}}{\overline{BC}}$ (2)

Dans le quadrilatère BDEF, les côtés opposés sont deux à deux parallèles ; ce quadrilatère est un parallélogramme, ce qui implique l'équipollence des vecteurs $\overrightarrow{BF}$ et $\overrightarrow{DE}$.

Entre les mesures algébriques de ces vecteurs, nous avons donc l'égalité : $\overline{BF}=\overline{DE}$ (3)

Les égalités (1), (2) et (3) impliquent l'égalité : $\frac{\overline{AD}}{\overline{AB}}=\frac{\overline{AE}}{\overline{AC}}=\frac{\overline{DE}}{\overline{BC}}$ (4)

[...]

Désignons par k le coefficient de proportionnalité ; nous avons donc : $\frac{\overline{AD}}{\overline{AB}}=\frac{\overline{AE}}{\overline{AC}}=\frac{\overline{DE}}{\overline{BC}}=k$

DÉFINITION : **Le nombre réel k est le rapport d'homothétie du triangle ADE au triangle ABC.**

Ainsi Θ justifie les deux égalités (1) et (2) qui permettent d'établir le rapport d'homothétie de deux triangles, que nous désignons θ_1.

Le chapitre suivant, intitulé « Chapitre IV. Les triangles semblables », est inauguré par la définition de deux triangles semblables illustrée d'une figure. L'énoncé relatif à la définition de deux triangles homothétiques par le sommet, conjugué à la notion d'égalité de triangles, permet de définir la similitude[14] de deux triangles. Cette dernière définition, associée à l'élément technologique θ_1, permet d'établir :

179. THÉORÈME : Si deux triangles sont semblables, les trois angles de l'un sont respectivement égaux aux trois angles homologues de l'autre ; les côtés de l'un sont proportionnels aux côtés homologues de l'autre. [...]

Rapport de similitude.

182. DÉFINITION :On appelle rapport de similitude du triangle A'B'C' au triangle ABC la valeur commune du rapport de deux côtés homologues.

En désignant par θ_2 le résultat technologique relatif aux côtés proportionnels contenu dans le théorème 179 et la définition 182, on peut alors représenter l'organisation mathématique partiellement décrite jusqu'ici par le petit formalisme : $\Theta \Rightarrow \theta_1 \Rightarrow \theta_2$.

Le chapitre V de l'ouvrage est intitulé « Relations métriques dans les triangles rectangles ». Nous en extrayons les parties suivantes :

---

14 Similitude *directe* si on ne se réfère qu'à une homothétie de rapport positif, comme cela semble être le cas dans l'ouvrage, et comme l'indique la figure 74. Bien que la définition donnée pour deux triangles semblables vaille aussi pour les similitudes inverses, la définition du rapport de similitude comme rapport des longueurs des côtés homologues laisse entendre que l'ouvrage ne traite que des similitudes directes

213. [...]

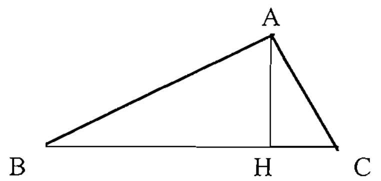


Fig. 88

215. Soit un triangle ABC dont l'angle A est droit.

Traçons la hauteur AH, et comparons les triangles HAC et ABC, puis les triangles ABC et HAB.

Les deux triangles HAC et ABC sont rectangles, respectivement en H et en A ; l'angle aigu C est commun à ces deux triangles ; donc ces triangles sont semblables.

Nous en déduisons les égalités :

H A C

A B C

$$\frac{AC}{BC} = \frac{CH}{CA} = \frac{HA}{AB} \qquad (1)$$

Les deux triangles ABC et HBA sont rectangles, respectivement en A et en H ; l'angle aigu B est commun à ces deux triangles ; donc ces triangles sont semblables.

Nous en déduisons les égalités :

A B C

H B A

$$\frac{BC}{BA} = \frac{CA}{AH} = \frac{AB}{HB} \qquad (2)$$

[...]

223. Des égalités (1) et (2) nous extrayons les deux proportions :

$$\frac{AC}{BC} = \frac{CH}{CA} \quad \text{et} \quad \frac{BC}{BA} = \frac{AB}{HB}$$

Ces deux égalités impliquent respectivement les égalités :

$AC^2=CB\times CH$ et $AB^2=BC\times BH$ [...]

224.THÉORÈME : Dans un triangle rectangle, la longueur d'un côté de l'angle droit est moyenne proportionnelle entre la longueur de l'hypoténuse et sa projection orthogonale sur l'hypoténuse.

En désignant par θ_3 le résultat technologique que constitue le théorème 224, le schéma devient donc : $\Theta \Rightarrow \theta_1 \Rightarrow \theta_2 \Rightarrow \theta_3$. Le chapitre V se poursuit par l'établissement du théorème de Pythagore :

En désignant par θ_4 le théorème de Pythagore noté théorème 228, le schéma devient donc : $\Theta \Rightarrow \theta_1 \Rightarrow \theta_2 \Rightarrow \theta_3 \Rightarrow \theta_4$. On peut ainsi noter que dans l'organisation mathématique de la géométrie exposée par cet ouvrage, le théorème de Pythagore découle du théorème de Thalès. Cette exposition coïncide avec l'ordre que suit le texte du programme officiel, puisque Θ=théorème de Thalès est mentionné dans la partie 1 de la « géométrie plane », les triangles semblables d'où provient θ_2 dans la partie 2 et les relations métriques, notamment θ_3 et θ_4, dans la partie 3. Dans cette partie 3, le programme mentionne aussi « Rapports trigonométriques (sinus, cosinus, tangente et cotangente) d'un angle aigu. Relations trigonométriques dans le triangle rectangle ». Logiquement, l'ouvrage étudié consacre son chapitre VI aux « Notions de trigonométrie ». Nous notons θ_5 les rapports trigonométriques d'un angle aigu, et θ_6 la relation fondamentale de la trigonométrie. θ_5 est établi à partir de θ_2 (triangles semblables), comme le montre l'extrait suivant de l'ouvrage :

225. [...]

L'angle xOz est commun aux deux triangles rectangles MOP et M'OP'. Ces deux triangles sont donc semblables (n°199). Nous écrivons que les côtés homologues sont proportionnels :

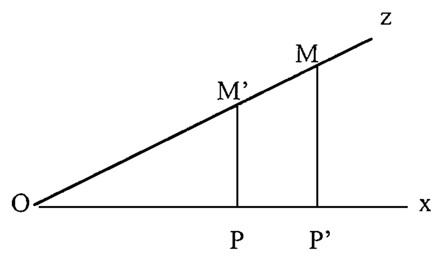


Fig. 96

$$\frac{OM}{OM} = \frac{OP}{OP} = \frac{MP}{MP}$$

Des égalités : $\frac{OM}{OM} = \frac{OP}{OP}$ et $\frac{OM}{OM} = \frac{MP}{MP}$, nous déduisons les deux égalités :

$$\frac{OP}{OM} = \frac{OP}{OM} \text{ et } \frac{MP}{OM} = \frac{MP}{OM} \qquad (1)$$

De l'égalité : $\frac{OP}{OP} = \frac{MP}{MP}$, nous déduisons les deux égalités :

$$\frac{MP}{OP} = \frac{MP}{OP} \text{ et } \frac{OP}{MP} = \frac{OP}{MP} \qquad (2)$$

Les égalités (1) et (2) montrent que chacun des quatre rapports $\frac{OP}{OM}, \frac{MP}{OM}, \frac{MP}{OP}$ et $\frac{OP}{MP}$ est indépendant de la position du point mobile M sur la demi-droite Oz. Chacun de ces rapports est déterminé dès que l'angle xOz est connu ; nous disons que chacun d'eux est un rapport trigonométrique de l'angle aigu α. Ces rapports ont reçu des noms particuliers ; nous donnons les définitions suivantes :

256. [...]

θ_6 (relation fondamentale de la trigonométrie) énoncé sous la forme suivante :

273. THÉORÈME : La somme des carrés du sinus et du cosinus d'un angle aigu α est égale à 1.

est classiquement démontré, grâce aux relations trigonométriques donnant le sinus et le cosinus d'un angle aigu dans le triangle rectangle associées à θ_4 (théorème de Pythagore).

Le thème θ_2 des triangles semblables justifie encore deux autres résultats technologiques : la puissance d'un point par rapport à un cercle, noté ici θ_7, et le rapport des aires de deux triangles semblables θ_8. θ_7 est établi de la manière suivante dans le chapitre VII « Puissance d'un point par rapport à un cercle » :

290.
[...]

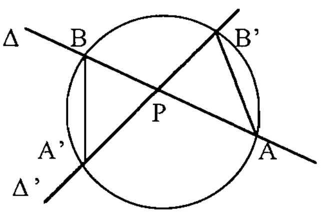


Fig.106.

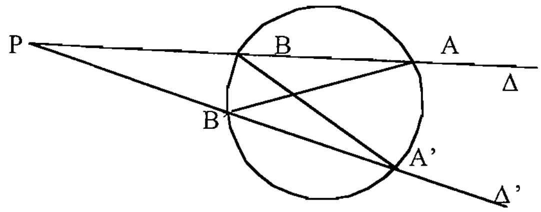


Fig. 107.

Dans les deux cas de figures, comparons les triangles PAB' et PA'B. Les angles PB'A et PBA' sont deux angles inscrits qui interceptent le même arc AA' ; donc ils sont égaux.
Les angles APB' et BPA' sont deux angles opposés par le sommet si P est intérieur au cercle ; ce sont deux angles confondus si P est extérieur au cercle ; dans les deux cas, ces deux angles sont égaux.
Les triangles PAB' et PA'B satisfont aux conditions du premier cas de similitude ; donc ils sont semblables.
Nous écrivons que leurs côtés homologues sont proportionnels :

P	A	B'
P	A'	B

$$\frac{PA}{PA} = \frac{PB}{PB} = \frac{AB}{AB}.$$

Nous avons l'implication : $\left\{\frac{PA}{PA} = \frac{PB}{PB}\right\} \Rightarrow \{PA.PB = PA.PB\}$

291. Comparons les produits $\overline{PA}.\overline{PB}$ et $\overline{PA}.\overline{PB}$.
Nous venons d'établir que leurs valeurs absolues sont égales. D'autre part, nous savons qu'ils sont tous deux positifs si P est extérieur au cercle O, et qu'ils sont tous deux négatifs si P est intérieur au cercle O. Nous concluons que les produits $\overline{PA}.\overline{PB}$ et $\overline{PA}.\overline{PB}$ sont des nombres relatifs égaux.
292. [...]
293. THÉORÈME : Si par un point P on trace deux droites qui coupent un cercle l'une aux points A et B, l'autre aux points A' et B', on a l'égalité :

$$\overline{PA}.\overline{PB} = \overline{PA}.\overline{PB} \quad [...]$$

298. DÉFINITION : On dit que la valeur constante du produit $\overline{PA}.\overline{PB}$ est la puissance du point P par rapport au cercle O.

θ_8 (rapport des aires de deux triangles semblables) est quant à lui établi dans le chapitre IX « Notions sur les aires ».

Enfin, Θ vient justifier et rendre compréhensibles les deux résultats technologiques θ_9 et θ_{10}, relatifs aux équations de droites. Ce sont dans les chapitres XIV « la fonction linéaire : $x \rightarrow y=ax$ » et XV « La fonction affine : $x \rightarrow y=ax+b$ », de la première partie intitulée « Algèbre », que θ_9 et θ_{10} sont respectivement établis.

La démonstration de θ_9 *« Le graphe de la fonction : $x \rightarrow y=ax$ est la droite OA qui joint l'origine au point A (+1 ; a) »* est établie, pour la partie directe, en utilisant un résultat technologique θ', établi à partir de Θ dans le chapitre III de géométrie, et qui s'énonce sous la forme « Si deux droites qui joignent des points homologues sont sécantes, toute droite qui joint deux points homologues contient le point d'intersection des deux premières », et pour la partie réciproque, par le fait que les triangles homothétiques formés avec un point sur la droite qui « passe par le graphe » sont dans un rapport égal à a (d'après θ_1), ce qui assure que ce point est sur le graphe.

θ_{10} « *Le graphe de la fonction affine : x→y=ax+b est la droite menée par le point B(0 ; b) parallèle à la droite D graphe de la fonction linéaire : x→y=ax*» est démontrée à partir de θ_9 en faisant agir la translation de vecteur $\overrightarrow{OB}$ qui, n'étant pas enseignée à l'intérieur de ce programme, est remplacée par l'étude d'un parallélogramme de côté [OB].

L'organisation mathématique régionale, ainsi décrite autour du secteur du théorème de Thalès, peut se laisser schématiser[15] de la manière suivante :

$$\Theta \Rightarrow \theta_1 \Rightarrow \begin{cases} \left.\begin{array}{l} \theta_2 \Rightarrow \theta_3 \Rightarrow \theta_4 \\ \theta_2 \Rightarrow \theta_5 \end{array}\right\} \Rightarrow \theta_6 \\ \\ \theta_2 \Rightarrow \theta_7 \\ \theta_2 \Rightarrow \theta_8 \end{cases}$$

$$\Theta \Rightarrow \theta' \Rightarrow \theta_9 \Rightarrow \theta_{10}$$

avec Θ : « théorème de Thalès », θ_1 : « triangles homothétiques par le sommet », θ_2 : « triangles semblables », θ_3 : « AB^2=BC.BH dans ABC rectangle en A », θ_4 : « théorème de Pythagore», θ_5 : « rapports trigonométriques d'un angle aigu », θ_6 : « $\cos^2 a+\sin^2 a=1$ », θ_7 : « puissance d'un point par rapport à un cercle », θ_8 : « rapports des aires de deux triangles semblables », θ' : « points homologues sur deux sécantes », θ_9 : « *y*=a*x* est une droite », θ_{10} : « *y*=a*x*+b est une droite »

On pourra aussi remarquer, si l'on se réfère au programme officiel, que Θ, établi dans la partie 1 de la géométrie plane, organise les parties 2 (triangles semblables), 3 (relations métriques, trigonométrie), 4 (puissance d'un point), et intervient dans 6 (aires) de ce même paragraphe « géométrie plane ». Il détermine, dans la partie 4 du paragraphe « algèbre », la nature des représentations graphiques de fonctions affines. Il apparaît enfin dans des exercices relatifs au parallélisme de droites et de plans du paragraphe « géométrie dans l'espace », que nous n'avons pas évoqué ici.

6. Un exemple d'organisation mathématique globale

Le manuel de 3^e étudié précédemment contraste fortement avec les manuels en usage dans les actuelles classes de ce niveau, tant au plan didactique (place inexistante pour l'élève dans le cours) qu'au plan de la rigoureuse organisation du savoir qui y est exposée. Cependant, l'examen de la démonstration du théorème de Thalès montre qu'après avoir établi le théorème pour des rapports rationnels, les auteurs concèdent :

[15] Ce schéma ne prétend pas être exhaustif : il est à noter, par exemple, que la démonstration de la réciproque de Θ utilise Θ, et qu'ayant négligé de nous lancer dans une étude approfondie qui aurait nécessité encore plus de place, certaines propriétés énoncées dans cet ouvrage et issues de Θ ont peut-être été omises

107. On démontre et nous admettons que ces égalités restent vraies si le rapport des vecteurs colinéaires $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{BC}$ est irrationnel, c'est-à-dire si les segments AB et BC n'ont pas de partie aliquote commune.

On aurait tort de penser que le « saut » permettant de passer de **Q** à **R** est considéré par les auteurs de manuels, de tout temps et en tout lieu, comme relevant d'un double obstacle à la fois didactique et épistémologique à ce niveau de l'enseignement (élève de 14-15 ans). Nous avons découvert un manuel russe de 1991, pour les élèves de la 7^e à la 11^e classe (entre 13 et 17 ans) dont l'auteur, un certain A.B. Pogorelov, propose une démonstration par l'absurde du théorème dans le cas irrationnel, celui-ci ayant préalablement été établi dans le cas rationnel[16].

Nous sommes donc conduits à nous élever « d'un niveau supplémentaire » pour découvrir une organisation mathématique à l'intérieur de laquelle existent des éléments théoriques dont découlera le théorème de Thalès. Ce faisant, nous sommes amenés à considérer des complexes praxéologiques qui ne sont plus organisés autour d'un seul élément théorique, mais de plusieurs. Un système d'indices supplémentaires est alors nécessaire pour formaliser ces nouveaux types d'organisations résultant de l'agrégation de plusieurs organisations régionales, toutes bâties autour d'un élément théorique différent. Ces nouvelles organisations mathématiques sont appelées *globales* et représentées par le formalisme $[T_{ijk}/\tau_{ijk}/\theta_{jk}/\Theta_k]$[17].

L'ouvrage *Les fondements de la géométrie* de Hilbert, dont le titre rentre ici parfaitement en adéquation avec le qualificatif d'organisations mathématiques *générales* comme plus « haut » degré d'organisation mathématique, nous servira d'exemple pour illustrer de tels types d'organisations.

Il est impossible, dans le cadre de cet article, de citer complètement les passages de l'ouvrage qui rendraient compte, dans le détail, de l'organisation mathématique à laquelle nous nous intéressons pour « suivre » le théorème de Thalès : la tâche en est trop ardue et volumineuse. Nous adoptons le choix d'en donner les grandes lignes. Le premier élément est constitué de la table des matières de l'ouvrage, dont nous reproduisons quelques extraits jusqu'au chapitre III :

Chapitre I. Les cinq groupes d'axiomes

---

[16] Cependant, cette démonstration n'est pas exigible pour l'examen final dans le cas irrationnel. Seule l'est la démonstration du cas rationnel !

[17] Précisons de nouveau que les qualificatifs de tâches, techniques et donc, par conséquent, de technologies et de théories, sont à référer à *l'institution* à l'intérieur de laquelle sont activées les organisations praxéologiques évoquées. Il serait donc vain de vouloir, en se prévalant du point de vue d'une pseudo-neutralité externe, par ailleurs introuvable, décerner ou refuser des brevets de « théoricité », certains le méritant et d'autres pas, aux « objets » mathématiques rencontrés dans cet article.

Le projet de Hilbert est mentionné, dès l'introduction : « Le présent travail est un nouvel essai de constituer, pour la géométrie, un système complet d'axiomes aussi simple que possible et d'en déduire les théorèmes les plus importants, de façon à mettre en évidence le rôle des divers groupes d'axiomes et la portée de chacun ». La conclusion de l'ouvrage reprend ce point de vue : « Notre travail a consisté en une *recherche des axiomes*, des conventions ou moyens auxiliaires nécessaires à la *démonstration d'une vérité du domaine de la géométrie élémentaire*[18] ; dès lors, il ne reste plus qu'à choisir quelle méthode doit être préférée. »

Les cinq groupes d'axiomes établis dans le chapitre I[19] constituent les éléments théoriques Θ_k desquels vont découler les résultats de géométrie élémentaire mentionnés dans l'ouvrage. Ainsi, suivant la philosophie générale de l'ouvrage, le théorème de Thalès est établi à partir du calcul segmentaire basé sur le théorème de Pascal. Il fait partie du chapitre III consacré à la théorie des proportions qui est exposée dans les paragraphes 2, 3 et 4.

Dans un supplément à la huitième édition (1956), P. Bernays en propose une théorie simplifiée et note au passage qu'« elle est indépendante de l'axiome d'Archimède ». Cette remarque est explicitement mentionnée par Hilbert lui-même (chap. III ; 4 ; 1 et chap. III ; 5 ; 9 &12) : « le calcul segmentaire permet d'établir rigoureusement la théorie euclidienne des proportions et cela sans recours à l'axiome d'Archimède ». Le théorème qui, en France essentiellement, a reçu le nom de Thalès, est désigné comme étant le « théorème fondamental de la similitude ». Nous citons quelques extraits de sa démonstration :

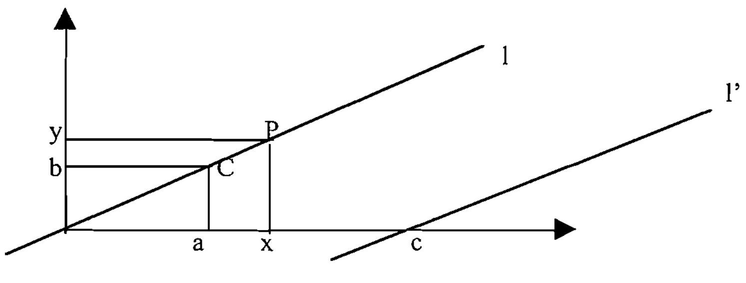
[18] Souligné par nous

[19] Ces axiomes, au nombre de 20, ont varié au cours des différentes éditions de l'ouvrage. Ils ont été, ainsi que le corps du texte, enrichis de compléments, de variantes, d'appendices…

4. Proportions et similitude
1 [...]
2. **Définition.** Soient a, b, a', b' quatre segments quelconques ; on les dit liés par la proportion a:b=a':b' si l'équation ab'=ba' est satisfaite.
3. **Définition.** Deux triangles sont dits *semblables* si leurs angles homologues sont congruents.
4. **Théorème 41.** Si a, b et a', b' sont des côtés homologues de deux triangles semblables, la proportion a:b=a':b' est satisfaite.
5. *Démonstration*
[...]
10. Le théorème 41 conduit au théorème fondamental de la similitude :
11. **Théorème 42.** Si deux parallèles coupent sur les côtés d'un angle quelconque les segments a, b et a', b', la proportion a:b=a':b' est satisfaite. Réciproquement, si quatre segments a, b, a', b' satisfont à la proportion ci-dessus et sont reportés sur les côtés d'un angle, les droites qui joignent les extrémités de a et de b à celles de a' et de b' sont parallèles.

Le théorème 42 permet de déboucher sur la géométrie analytique :

5. Équations de la droite et du plan.
[...]
7. Dans le plan, soit l une droite qui passe par l'origine et le point C de coordonnées a et b. Si x et y sont les coordonnées d'un point quelconque de l, le théorème 42 montre que l'équation de la droite est a:b=x:y ou bx-ay=0.



8. Soit l' la parallèle à l qui coupe sur l'axe des x le segment c ; son équation est obtenue en remplaçant x dans l'équation de l par le segment x-c ; l'équation cherchée est donc bx-ay-bc=0.
9. [...]
10. Les résultats analogues de l'espace sont tout aussi simples à établir.
11. Dès lors, l'élaboration de la géométrie peut être réalisée par les méthodes classiques de la géométrie analytique.

Le théorème de Thalès est alors un élément technologique qui justifiera par exemple la « notion » d'équation cartésienne d'une droite, l'extension de cette notion à l'espace et débouchera sur la géométrie analytique.

7. Une Dernière Activité, Pour Conclure

Un des buts assignés à cet article consistait, comme il était précisé dès l'introduction, en une étude relative aux « activités ». Arrivé en ce point, le lecteur pourra peut-être estimer que l'objectif n'est pas atteint car il en a été peu question. Il faut alors se reporter au titre, et considérer qu'au travers de la mention de *l'analyse d'un savoir à enseigner*, ce qui voulait être montré est l'importance de l'analyse de l'organisation mathématique à l'intérieur de laquelle est prise la notion à enseigner. Cette analyse nous paraît être un préalable, tant pour l'évaluation d'un enseignement dispensé, que pour sa conception (il s'agira dans ce dernier cas d'une analyse *a priori*). Indépendamment du « style » didactique adopté, et loin ici l'idée de laisser supposer que tous se valent, des questions peuvent être posées, avant toute chose, sur les savoirs et savoir-faire qui sont à enseigner.

Car, à l'évidence, étudier les « activités », le « cours magistral », les « travaux dirigés », les « modules » ou tout autre dispositif didactique, ne peut faire l'économie de l'étude de l'organisation du savoir dont le dispositif choisi est le moyen du projet d'enseignement. Avant de se demander comment enseigner le théorème de Thalès dans les 4^{e} (où il n'en porte pas officiellement le nom) et les 3^{e} des collèges du XXI^{e} siècle, et de répondre sans doute différemment que pour les CEG-CES et lycées de 1964, encore faut-il savoir s'il s'agit du même objet, des mêmes organisations mathématiques, bâties pour quels types de tâches, instrumentées par quelles techniques associées. Telle notion à enseigner, à l'intérieur des actuels programmes du secondaire, participe-t-elle d'une organisation ponctuelle, locale, régionale, globale[20] ? Relève-t-elle d'un type de tâche, d'une technique, d'une technologie ou d'une théorie ?

C'est à partir d'un questionnement de ce type que peuvent, lors d'une première approche nécessaire mais pas suffisante, être analysées les « activités ». Même sommaire, cette analyse indispensable révèle bien souvent que des « activités », qui mettent effectivement des élèves au travail, manquent le savoir qu'elles voulaient faire apprendre : on voulait enseigner les aires et les élèves ont « appris » le découpage et le collage, ou bien telle séquence, consacrée à la « démonstration » du théorème de Pythagore, se réduit-elle à un apprentissage de quelques calculs d'aires.

À l'intérieur de cette analyse des organisations mathématiques, peut se développer une certaine forme d'évaluation. Elle n'est plus alors basée sur le subjectivisme, c'est-à-dire sur les « traits », les croyances, l'idéologie privée et l'histoire du sujet, relative aux mathématiques et à leur enseignement, mais sur des critères objectivés, issus de ce type d'analyse. Ainsi, certains critères peuvent-ils être cités concernant les types de tâches (critères d'identification, des raisons d'être, de pertinence), les techniques (fiabilité, portée, intelligibilité, avenir,...), les technologies[21].

---

[20] Bien que l'étude n'ait pas été menée, il est peu vraisemblable que l'on rencontre ce dernier cas. Quant aux deuxième et troisième cas, ils correspondent, comme il a été dit, à des thèmes et des secteurs des mathématiques du secondaire.

[21] Le lecteur curieux pourra se reporter, pour la définition et l'utilisation de ces critères, aux actes de l'Université d'été consacrée à « l'analyse des pratiques enseignantes et didactique des mathématiques », pp. 114-117 et aux ateliers associés pp. 119-249.

L'analyse en terme d'organisation mathématique permet par ailleurs d'identifier des conséquences immédiates portant sur l'organisation didactique[22]. On a vu en effet que, lorsque le savoir relatif à un objet est manquant, c'est alors le recours au contrat didactique d'ostension qui permet la reconnaissance de l'objet. Or, nous dit Brousseau (1996), si « ce procédé fonctionne assez bien dans la vie courante, pour identifier une personne, une espèce d'animal ou un type d'objet [...], il est insuffisant pour « définir » un objet mathématique ».

Dans l'enseignement « traditionnel », sous forme du cours magistral, le professeur a sans doute recours à l'ostension. Il montre le savoir à travers l'exposition de son organisation, par la restitution d'un texte mathématique-standard préalablement rédigé. Si la place réservée à l'élève[23], qui consiste à « regarder » cette exposition y est très réduite, par contre, le topos beaucoup plus large du professeur lui donne la possibilité d'exercer un contrôle beaucoup plus grand sur le savoir. Il n'en est pas de même au travers la réalisation d'un enseignement par « activités » : l'élève (et les élèves) doivent construire des connaissances qui deviendront ensuite un savoir[24]. Le contrôle sur le savoir, qu'exerçait le professeur dans un cours magistral, s'estompe au profit du pari qu'il fonde sur une activité, dont l'interaction avec le travail qu'y amèneront les élèves, est censée faire émerger le savoir visé. Si l'activité ne permet pas, en ce qui concerne l'organisation du savoir visé dont elle est réputée être porteuse, de le faire émerger en tant que savoir mathématique, c'est alors le recours au procédé d'ostension, à travers lequel le professeur va montrer le savoir absent qui va être utilisé. C'est, en effet, un procédé commode que de désigner par une représentation, par exemple langagière, quelque chose qui n'existe pas pour les personnes qui sont censées le rencontrer, et avec qui « elles vont avoir affaire ». On en arrive à un niveau supérieur de subtilité lorsque, le savoir étant absent, cette ostension est masquée à l'aide d'un procédé que Berthelot et Salin désignent sous le terme d'ostension déguisée[25]..

Nous donnons, pour conclure, une activité extraite d'un manuel en usage dans les classes de 5e[26], qui joue le rôle d'une première rencontre des élèves avec la symétrie centrale. Deux activités, consacrées à des révisions sur la symétrie axiale, ont inauguré le chapitre. L'activité suivante est la première sur le thème, et s'appelle d'ailleurs « symétrie centrale ».

---

[22] Comme il a été indiqué dès l'introduction, l'approche anthropologique comporte par ailleurs une théorie des organisations praxéologiques de l'étude, appelées organisations didactiques, et décrites notamment en terme de « moments de l'étude ». Ces concepts théoriques ne peuvent être développés ici.

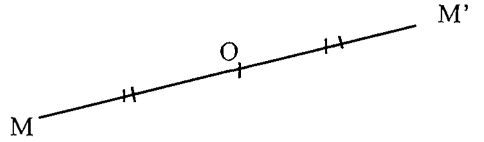
[23] Dans l'approche anthropologique, la « place » réservée à chacun des sujets de l'institution didactique est désignée sous le nom de *topos*. Il est constitué de l'ensemble des tâches dévolues aux sujets dans une position donnée.

[24] Sur la distinction entre connaissance et savoir dans la théorie des situations, on peut se reporter à Brousseau p. 82 des actes de l'Université d'été précédemment cités.

[25] Voir Berthelot R. et Salin M.H. (1992), *L'enseignement de l'espace et de la géométrie dans la scolarité obligatoire*, Thèse de l'Université Bordeaux I, LADIST.

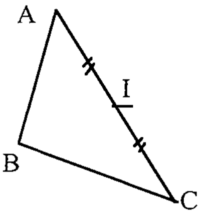
[26] Il s'agit de l'ouvrage de la collection Pythagore, Hatier, 1997.

Le symétrique **du point M par rapport au** point O **est le point M' tel que O soit le milieu de [MM'].**
On dit aussi que M et M' sont symétriques par rapport à O.



A. Constructions

1. Reproduire ce dessin



2. Quel est le symétrique du point A par rapport au point I ?
Et celui de C ? Et celui de I ?

3. Construire le symétrique D de B par rapport à I.

B. Observations

1. Compléter.

Le symétrique du segment [AB] par rapport à I est le ...
Le symétrique du segment [BC] par rapport à I est le ...
Le symétrique du segment [BD] par rapport à I est le ...

2. En observant le dessin, que peut-on dire des longueurs de deux segments symétriques par rapport à I ?

3. En observant le dessin, que peut-on dire de deux droites symétriques par rapport à I ?.
En déduire la nature du quadrilatère ABCD

En listant les questions posées aux élèves, on peut définir les tâches et types de tâches dans lesquels ils doivent s'engager ; dans le A tout d'abord :

2. 1. T_1 : « Reproduire une figure »
2. 2. T_2 : « Déterminer le symétrique d'un point par rapport à un autre »
3. T_3 : « Construire le symétrique d'un point par rapport à un autre »

T_1 : La tâche t_1 est désignée par la question « Reproduire ce dessin ». La technique n'est pas mentionnée, la tâche étant sans doute supposée routinière. Un flou existe cependant quant à l'identification de la tâche, et donc de la technique permettant de l'accomplir : qu'entend-on par « reproduire ce dessin » ? S'agit-il de dessiner « un » triangle quelconque ABC en plaçant le milieu I de [AC], de reproduire un triangle de mêmes dimensions que ABC, ou un triangle à l'échelle ? Parce que des éléments technologiques différents seront engagés selon ce que recouvre la tâche consistant à dessiner un triangle ABC (isométrie, similitude ou rien de cela), les techniques associées seront différentes : utilisation du compas et de la règle ou du calque dans le cas « triangle isométrique », utilisation de la règle graduée et d'un petit calcul ou du rapporteur et de la règle dans le cas « triangle semblable », utilisation de la règle seulement dans le cas

« triangle quelconque ». Les mêmes questions peuvent être posées pour le placement du milieu I de [AC], et pour l'orientation du triangle (est-il ou non image par rotation du triangle du livre ?).

T_2 : La tâche t_2 est désignée par « Quel est le symétrique de A,C et I par rapport à I ? ». La technique pour A et C fait appel à l'observation de la figure et à la lecture du codage qui indique que I est le milieu de [AC], ainsi qu'à sa mise en rapport avec l'énoncé technologique (une définition) que constitue « l'information » qui ouvre l'activité, et qui permettra de valider ou non la réponse fournie. Il n'en va pas de même pour le symétrique de I pour lequel la technologie est absente (l' « information » ne donne aucune "information" sur le symétrique d'un point par rapport à lui-même). La charge de combler ce manque est laissée à l'élève ou à son professeur (le livre mentionne en remarque le cas particulier du centre de symétrie dans sa rubrique d'après « activités » appelée « l'essentiel »). L'énoncé technologique (« l'information ») est seulement énoncé. À la lecture des activités qui précèdent, rien n'est préparé pour le justifier à son tour ; il y a uniquement continuité du mot « symétrie » dans les titres des trois activités (symétries axiales et quadrillages, symétrie axiale : constructions, symétrie centrale). Pourquoi s'intéresse-t-on aux points obtenus par symétrie centrale ? À quelle(s) question(s) la symétrie centrale permet-elle de répondre en 5^e ? La question n'étant pas posée, aucune réponse n'y est évidemment apportée.

T_3 : La tâche est désignée par un verbe à l'infinitif « construire ». Qu'entend-on par cela, quelle technique doit-on mettre en œuvre ? L'énoncé technologique « information » ne montre pas la technique : il montre le résultat de son application à travers la figure qui l'illustre. La technique relève de la construction du milieu d'un segment, tâche sans doute routinisée pour des élèves de 5^e. L'observation du chapitre montre que toutes les techniques semblent être considérées comme valables : dans cette activité aucune n'est mentionnée, celle qui suit indique l'utilisation possible du trace-parallèle et met au défi de trouver une construction au compas seulement, la définition donnée dans « l'essentiel » est illustrée d'une figure sur laquelle on trouve en pointillés deux arcs de cercle de centre le centre de symétrie, puis des exercices proposent l'utilisation du quadrillage...

Dans la partie B maintenant, on peut relever les types de tâches suivants :

1 : T_4 : « Compléter une phrase »
2 : T_5 : « Répondre à une question après avoir observé une figure »
3 : T_5 : « Répondre à une question après avoir observé une figure »
3 : T_6 : « Déterminer la nature d'un quadrilatère »

Les tâches : T_4 et T_5 ne sont instrumentées d'aucune technique justifiée par un élément de savoir mathématique. Elles ne relèvent donc pas d'un savoir mathématique. On peut rétorquer qu'étant engagés dans une activité mathématique, les élèves savent qu'ils doivent « donner une réponse » mathématique. Il s'agit donc alors de compter sur l'adhésion supposée des élèves au contrat didactique, sur leur capacité de reconnaissance de ce qui est mathématique et de ce qui ne l'est pas. C'est donc bien, effectivement, ailleurs que dans le savoir mathématique, que va se trouver la technique permettant de répondre à la question posée, puisqu'il s'agit de miser ici sur un habitus que sont supposés avoir acquis les élèves, par leur pratique de l'institution scolaire, et qui consiste à compléter, avec ce qu'ils perçoivent être des mathématiques, une phrase inachevée d'un livre de mathématiques.

De fait, l'intention des auteurs du manuel est de faire en sorte, pour B.1, que les élèves écrivent que le symétrique d'un segment est un segment, en renonçant à engager des éléments technologiques qui permettraient de le justifier. On peut montrer que ceux-ci existent pourtant en 5^e, en utilisant par exemple la symétrie orthogonale, mais ce choix n'est pas celui du manuel. La solution trouvée consiste à utiliser un procédé qui montre l'élément technologique dont l'enseignement est visé, en donnant l'impression que ce sont les élèves qui le découvrent par eux-mêmes, ce que l'on a appelé l'ostension déguisée. Ce faisant, c'est aussi la question à laquelle répond l'énoncé technologique « le symétrique d'un segment est un segment », et pas autre chose pourrait-on rajouter, qui est perdue… et, avec elle, son enseignement.

La même technique « didactique » est utilisée par les auteurs du manuel pour B. 2&3 qui relèvent du même type de tâche T_5. Ce n'est pas un hasard s'il s'agit, ici encore, de parler de deux énoncés technologiques relatifs à la conservation des distances et l'image d'une droite par symétrie centrale. L'observation, associée à l'ostension déguisée, est le recours naturel lorsque manquent des éléments technologico-théoriques, ou lorsqu'on refuse de les engager pour justifier des techniques mathématiques permettant d'établir de nouveaux résultats technologiques.

Dans ce brouillard mathématique, l'arrivée de la tâche t_6 « déduire la nature du quadrilatère ABCD » n'apporte, contrairement à ce que laisse supposer ce verbe qui sollicite la capacité de raisonnement de l'élève, aucune lumière mathématique supplémentaire. En effet, après avoir sans doute tracé, pour pouvoir répondre à B. 1, les segments [CD], [AD] et [BD], respectivement symétriques de [AB], [BC] et [BD], « l'observation », méthode attendue des élèves jusqu'à l'avant-dernière question du B, les a peut-être conduits à observer qu'on leur a fait dessiner un parallélogramme et ses deux diagonales. Cette observation est en effet nécessaire, ne serait-ce que pour pouvoir constater le parallélisme d'une droite et de sa symétrique (remarquons que le tracé d'une droite n'est jamais demandé ni réalisé dans cette activité), et répondre ainsi à la première question de B. 3. Ainsi l'observation du parallélogramme permet de constater le parallélisme des droites qui, converti en élément technologique (un théorème), permet d'engager une technique qui permet de déduire ce que l'on a en premier observé ! Est-ce le bon moyen d'initier progressivement les élèves de 5^e au raisonnement déductif ?…

En consultant les autres activités du manuel, d'autres tâches peuvent être rencontrées, mais aucune ne s'engage vers la justification ou l'intelligibilité des propriétés des symétries établies dans l'activité décrite ci-dessus. Elles sont consignées dans « l'essentiel » où l'on trouve aussi la propriété de conservation du milieu.

Arrivés à ce stade, on peut s'interroger sur le type d'organisation mathématique ainsi présentée. Quelques tâches ont pu être identifiées, certaines mathématiques et d'autres pas, et on peut se demander si l'enseignement, s'il devait s'arrêter en ce point, pourrait être qualifié d'enseignement mathématique au sens des organisations mathématiques telles qu'elles ont été définies dans cet article.

Mais, comme on le sait, le « cours », s'il est précédé d'activités, est aussi suivi d'exercices. Il faudrait alors examiner, à travers chacun d'eux, quel type de tâche est demandé aux élèves, quelles techniques sont mises en œuvre, justifiées par quelle technologie, s'appuyant sur quelle théorie. Les résultats consignés dans « l'essentiel » constituent des éléments technologiques. La « théorie », ce mot n'étant simplement pris que dans le sens d'un discours sur la technologie, est ici absente, comme on l'a vu. Le topos de l'enseignant, qui a dévolu aux élèves une partie de la tâche consistant à montrer le savoir, ne contient donc pas, sur cet exemple, la tâche de justifier les énoncés technologiques établis, que ce soit des définitions (d'où viennent ces définitions ? à quoi servent-elles ?) ou des théorèmes (pourquoi est-il vrai ? à quelle question répond-il ?). Par contre, il semble bien que le topos de l'élève à travers les exercices proposés, et non le topos de la classe à travers les activités autour desquelles elle se rassemble, contienne la tâche consistant à justifier des résultats en s'appuyant sur des technologies non justifiées, comme en témoigne l'exercice suivant trouvé dans ce même manuel :

> Construire un triangle isocèle ISO et marquer un point A. Construire le symétrique I'S'O' du triangle ISO par rapport au point A. Le triangle I'S'O' est-il isocèle ? Pourquoi ?

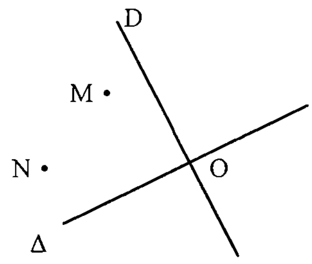
Curieuse inversion des rôles !

L'analyse pourrait se poursuivre en étudiant l'organisation mathématique bâtie autour de la symétrie centrale en 5^{e}, et les mathématiques proposées aux élèves au travers des « activités » dans lesquelles ils s'engagent. À notre connaissance, ces études n'ont jamais vraiment été menées et c'est tout un champ de recherche qui peut s'ouvrir, dont les retombées pour l'évaluation de l'enseignement des mathématiques dans le système éducatif français peuvent être, chacun en conviendra, d'une certaine importance.

On pourrait peut-être voir comme caricaturale l'activité que nous venons d'analyser. Il n'en est, hélas, rien ; ce qu'un lecteur scrupuleux pourra facilement vérifier en consultant nombre de manuels relatifs au programme des actuelles 5^{e}[27]. Aussi, pour finir sur une note optimiste et volontariste, le lecteur courageux de petit*x* qui est parvenu jusqu'en ce point, pourra-t-il, au prix d'un petit effort supplémentaire, tenter de construire une organisation *mathématique*[28] du programme de 5^{e}, à partir de l'activité suivante que nous extrayons, en la modifiant à grands traits, de l'ouvrage de Cousin-Fauconnet (1995). Il pourra s'interroger sur son éventuelle viabilité, sur son absence dans les manuels consultés, etc. S'il décide d'en adopter l'orientation, il faudra qu'il identifie les types de tâches, les techniques et technologies que devront rencontrer les élèves, et qu'il pense et évalue les dispositifs didactiques qui les conduiront à ces rencontres et à l'étude des mathématiques sur lesquelles elles débouchent. Travail sans doute coûteux, mais qui ouvre sur un terrain fructueux pour une pratique professionnelle riche de l'enseignement des mathématiques.

27 C'est précisément parce que nous voulions montré, à des stagiaires en situation de l'IUFM d'Aix-Marseille, durant l'année 1998-1999, qu'une grande partie de la géométrie plane des actuels programmes de 5^{e} pouvait s'organiser à partir de la symétrie centrale, que nous avons, nous-mêmes, mené cette rapide enquête bibliographique.

28 L'organisation didactique reste à discuter, et à construire !



1. D et Δ étant deux droites perpendiculaires en O, construire le symétrique P de M par rapport à D et le symétrique R de P par rapport à Δ. De même, construire le symétrique S de N par rapport à D et le symétrique T de S par rapport à Δ.
2. Conjectures possibles sur [NM] et [RT], sur la position de O ?
3. Démonstration de O milieu de [MR] en utilisant les médiatrices du triangle rectangle MPR.
4. Une fois établie que la symétrie de centre O est la composée de deux symétries axiales particulières, déduction des propriétés des symétries centrales à partir de celles des symétries axiales étudiées en 6^e.

Bibliographie

BOSCH M. (1994), *La dimensión ostensiva en la actividad matemática. El caso de la proporcionalidad*, Thèse de doctorat, Universitat Autònoma de Barcelona.

BOSCH M., CHEVALLARD Y. (1999), *La sensibilité de l'activité mathématique aux ostensifs. Objet d'étude et problématique*, Recherches en didactique des mathématiques, 19/1, pp.77-124.

BROUSSEAU G. (1996), L'enseignant dans la théorie des situations didactiques, in Noirfalise & Perrin-Glorian (éd.) *Actes VIII^e école de didactique des mathématiques*, 3-46, IREM de Clermont-Ferrand.

CHEVALLARD Y. (1985), *La transposition didactique. Du savoir savant au savoir enseigné*, La Pensée Sauvage, Grenoble, 2^e édition 1991.

CHEVALLARD Y. (1992), *Concepts fondamentaux de la didactique : perspectives apportées par une approche anthropologique,* Recherches en didactiques des mathématiques, 12/1, pp. 73-112.

CHEVALLARD Y. (1996), La fonction professorale : esquisse d'un modèle didactique, in Noirfalise & Perrin-Glorian (éd.) *Actes VIII^e école de didactique des mathématiques*, 83-122, IREM de Clermont-Ferrand.

CHEVALLARD Y. (1999), Analyse des pratiques enseignantes et didactique des mathématiques : l'approche anthropologique, 91-118, in Noirfalise (coordonné par) *Analyse des pratiques enseignantes et didactique des mathématiques*, IREM de Clermont-Ferrand.

COUSIN-FAUCONNET A. (1995), *Enseigner la géométrie au Collège*, Armand Colin, Paris.

HILBERT D. (1899), *Les fondements de la géométrie*, édition critique préfacée par Rossier P. avec le concours du CNRS, Dunod, Paris, 1971.

NOIRFALISE A. & R. (1996), Visibilité et intelligibilité de l'action du professeur, in Noirfalise & Perrin-Glorian (éd.) *Actes VIII^e école de didactique des mathématiques*, 146-155, IREM de Clermont-Ferrand.