QUELLE GÉOMÉTRIE POUR L'ENSEIGNEMENT EN COLLÈGE ?

Anne WALTER
Maîtrise de mathématiques
et IREM de Franche-Comté

Résumé. Cet article pose le problème de l'enseignement de la géométrie au collège du point de vue épistémologique, en mettant l'accent sur les notions de point, de figure, d'espace et de déplacement. Puis, il considère plus précisément l'enseignement des transformations, leur lien avec la géométrie d'Euclide, les problèmes qu'elles soulèvent.

Dans la tradition française de l'enseignement des mathématiques qui remonte à la fin du dix-neuvième siècle, la géométrie a joué un rôle important, s'appuyant sur les deux grands traités de Legendre et de Lacroix publiés et réédités à maintes reprises. Ils sont construits sur le modèle euclidien. Cette importance accordée alors à la géométrie faisait de son enseignement le lieu privilégié de l'éducation au raisonnement et à la rationalité, comme cela fut souvent dit et écrit. Cette place de la géométrie sera remise en cause dans les années soixante-dix par la réforme des *mathématiques modernes*. Ce courant, qui s'appuyait sur l'approche axiomatique d'Hilbert et le point de vue des structures développées dans le traité de Bourbaki, proposait de faire le lien entre les mathématiques enseignées et celles de la recherche (la science déjà faite et la science qui se fait, comme on le disait à l'époque). Dans la réforme des *mathématiques modernes*, la géométrie était conçue comme la représentation des espaces et de leurs propriétés euclidiennes, lorsqu'ils sont munis d'un produit scalaire.

Aujourd'hui, après l'abandon de cette réforme, apparaît une volonté d'accorder une place plus importante à la géométrie élémentaire dans l'enseignement des mathématiques, en partie inspirée par les Éléments d'Euclide. Cependant les avis divergent à propos des objectifs, des contenus et des méthodes d'apprentissage ; c'est la sempiternelle question : que faut-il enseigner, pourquoi et comment ? (Bkouche, 1995).

«petit x» n° 54, pp. 31 à 49, 2000 - 2001

Cet article n'a pas la prétention de mettre un terme à ces interrogations, il consiste seulement, d'une part à essayer de comprendre les choix didactiques faits dans l'enseignement actuel de la géométrie au collège, d'autre part à relancer le débat sur les principales difficultés relatives à cet enseignement. De nombreux travaux de didacticiens permettent de clarifier cette problématique. Citons notamment un de ceux qui ont inspiré de nombreuses recherches ultérieures (Chevallard, Jullien, 1991).

Nous commencerons donc par une modeste approche épistémologique, en mettant notamment l'accent sur les notions de point, de figure, d'espace et de déplacement, pour poser la question des savoirs géométriques visés en collège. Puis, nous nous pencherons sur l'enseignement des transformations au collège : leur lien avec la géométrie d'Euclide, les problèmes qu'elles soulèvent. A ce propos, nous examinerons la place des *cas d'égalité des triangles* aux côtés d'un enseignement des transformations. Nous terminerons par quelques remarques sur l'apprentissage de la démonstration et le statut de la figure dans le raisonnement.

1. Les objets de la géométrie depuis Euclide : une perspective épistémologique

Avant de traiter de l'enseignement de la géométrie, il est peut-être bon de préciser ce que l'on entend par *géométrie.*

La géométrie est une des branches les plus anciennes des mathématiques. Par son étymologie (*géo* vient du grec *gaia* qui veut dire *terre* et *métrie* du grec *métron* signifiant *mesure*), géométrie signifie *mesure de la terre*, celle notamment des arpenteurs babyloniens et égyptiens depuis 3000 avant J.C., mais encore ?

Aujourd'hui, qui dit géométrie dit science de l'espace, des modèles de l'espace et de leurs structures. Mais qu'en est-il de la géométrie enseignée dans les collèges, quels sont les objets de cette géométrie et quels sont leurs rapports avec l'espace ? Pour nous éclairer sur ce sujet, nous posons cette double question, reprenant les termes d'Yves Chevallard : sur quel *savoir savant* s'appuie-t-on ? Et à quel *savoir enseigné* est-on parvenu ? (Chevallard, 1991).

1.1. Figures, espaces et transformations

La géométrie en tant que science s'est développée dans l'histoire progressivement autour de trois grandes problématiques, à savoir :

- la mesure des grandeurs géométriques avec Euclide,
- la représentation plane des situations spatiales avec les constructions perspectivistes du Quattrocento italien,
- la méthode des transformations dont l'intérêt et l'importance ont été mis en avant par Félix Klein dans son programme d'Erlangen en 1872, source de la troisième problématique : les espaces géométriques structurés par les groupes de transformation.

a) Figures

Si la géométrie d'Euclide est centrée pour une part sur l'étude des grandeurs géométriques, c'est à travers les figures que l'on accède à ces grandeurs. Mais qu'appelons nous figure ?

La figure est l'objet abstrait sur lequel porte le raisonnement du géomètre. Nous distinguerons donc la figure du dessin qui en est la représentation concrète imparfaite que l'on trace sur une feuille ou sur un écran d'ordinateur. Par exemple, pour reprendre une conception platonicienne, on s'intéressera aux propriétés du cercle idéal et non pas à la nature fugitive des ronds dans l'eau. Platon distinguait ainsi le monde des Idées du monde réel et proposait de chercher la *vraie* connaissance dans le monde des Idées, car ses objets sont immuables et éternels. La distinction explicite figure-dessin est un des apports majeurs des travaux en didactique de la géométrie, dont le présent article s'est largement inspiré. Citons notamment (Arsac, 1992), (Laborde, 1994) et (Duval, 1988 et 1994).

La figure est donc un objet idéal, abstrait, construit intellectuellement comme modèle d'objets concrets de la réalité, accessibles à notre perception. Et la figure est là (dans la géométrie d'Euclide) parce qu'elle est objet d'étude et c'est l'étude de cet objet qui conduit à de nouveaux objets, représentés par d'autres figures. La figure est la base quasi initiatique de la pensée géométrique.

La géométrie élémentaire est donc d'abord une science des figures situées dans un plan ou dans l'espace. Mais ce n'est pas à l'origine une science de l'espace. En effet, il n'y a pas d'espace en tant qu'objet d'étude en soi dans la géométrie grecque, il y a seulement des situations spatiales que le géomètre étudie à travers les représentations ou les descriptions qu'il en donne, mais leurs objets sont étudiés chacun isolément.

b) Espaces et transformations

À partir de la Renaissance, on s'engagera dans une nouvelle conception de l'espace : les artistes de cette époque sont animés d'une volonté de reproduire fidèlement le réel, d'imiter la nature et tentent de représenter dans un plan des objets de l'espace physique à partir du point de vue que constitue l'œil. Dans ce but, ils vont mettre au point des règles de nature géométrique : les règles de la perspective, qui s'appliqueront aux figures issues de cette représentation. Mais ce n'est qu'à partir des travaux de Desargues et notamment de son *Brouillon project d'une atteinte aux événements des rencontres du cône avec un plan* (1639), que les méthodes projectives (qui sont au centre des méthodes de la perspective) vont commencer à s'intégrer à la géométrie.

Les dix-sept et dix-huitième siècles verront ainsi la naissance et le développement de la géométrie projective, qui étudie les figures de l'espace et certaines de leurs relations spatiales (au sens où la géométrie projective étudie les propriétés qui *relient* une figure à sa figure image par projection).

Parallèlement à la géométrie projective, le dix-septième siècle s'intéressera à la méthode des coordonnées introduite par Descartes (publiée dans sa *Géométrie* en 1637), dans laquelle il nous fait part de sa volonté de traduire l'objet de la géométrie en calculs algébriques bénéficiant de la puissance de la symbolique. L'espace a alors un rôle prépondérant, il est nécessairement conçu comme un ensemble continu de points et les objets deviennent des ensembles de points.

Cette conception diffère fondamentalement de la conception euclidienne, dans laquelle l'objet géométrique ne se réduit pas à un ensemble de points. Un objet géométrique est pour Euclide une portion d'espace enfermé par des lignes limitées par des points. La géométrie analytique ponctualise l'espace, en affectant à chacun de ses points des coordonnées.

Ainsi, la géométrie projective et la géométrie des coordonnées de Descartes vont contribuer à relier les diverses configurations spatiales, qui chez Euclide étaient conçues et étudiées chacune pour elle-même, et c'est de cette coordination et de cette structuration que naîtra progressivement la notion d'espace comme objet d'étude de la géométrie.

Il faudra tout de même attendre les transformations (qui étudient les figures de l'espace mais aussi et surtout les relations entre ces figures), pour que la notion d'espace apparaisse comme objet de la géométrie et non plus comme simple réceptacle où sont plongés les corps, ou comme une *paroi de verre* à travers laquelle on regarde les objets (Léonard de Vinci). Félix Klein soulignera en 1872 l'importance de classer les transformations par familles et de comprendre le rôle fondamental joué par le concept de groupe.

1.2. Objets, espaces et modèles géométriques

Qui dit objet géométrique dit construction de l'esprit humain, et même si elle tire son origine de la confrontation de l'homme avec le monde, elle n'en reste pas moins une construction rationnelle, où l'espace de la géométrie s'élabore à travers des concepts mathématiques. Ou, pour reprendre les termes de Léon Brunschvicg dans les *Étapes de la Philosophie Mathématique* (1912) :

> Ce que nous voyons est dans l'espace, mais nous ne voyons pas l'espace[...] l'espace a sa racine dans l'expérience, il a son achèvement dans la raison.

Mais qu'en est-il de la nature de cet espace ?
C'est une question qui sera soulevée dès le dix-neuvième siècle, suite à l'introduction de nouvelles géométries (et donc de nouveaux espaces) par les mathématiciens fondateurs des géométries non euclidiennes, comme Gauss, Bolyai, Lobatchevski et Riemann. Ces géométries sont construites indépendamment de l'expérience sensible, contrairement à la géométrie d'Euclide, et vont donc remettre en question le lien entre le monde réel et les objets mathématiques : le problème se pose du lien entre mathématiques et réalité physique, du rapport entre espace mathématique et espace empirique.

Toutes ces interrogations autour de la nature de l'espace et de la variété des géométries soulèvent deux autres questions, à savoir :
- quel est le lien, ou plutôt, y a-t-il un lien entre ces différentes géométries ?
- Et parmi celles-ci, quelle est la *bonne* géométrie pour l'enseignement ?

Autrement dit, sur quel *savoir savant*, parmi cette multitude de notions géométriques développées depuis des siècles, doit-on plus spécialement s'appuyer afin d'offrir aux élèves le meilleur *savoir enseigné* possible ?

La réponse à cette question est moins évidente qu'il n'y paraît. En effet l'histoire de la géométrie ne s'arrête pas à l'invention des géométries non-euclidiennes et l'introduction des groupes de transformations a pour effet d'avoir changé notre vision de l'espace. On peut constater qu'à partir de l'idée de déplacement, l'étude des relations entre les figures de l'espace a conduit progressivement à la notion de transformation. Et, suite au programme de Klein, ces transformations ont été classées par leurs actions sur l'espace[1].

Face à ces diverses géométries constituées en modèles, Hilbert éprouvera le besoin de préciser ce que sont ces modèles, quels sont leurs objets. Il introduit alors la géométrie euclidienne par une axiomatique formelle : il part d'objets déterminés mais non définis et dont la nature n'importe pas, il les caractérise par certaines relations entre eux puis spécifie ces relations par des axiomes. Il définit ainsi des espaces abstraits dont les éléments sont appelés *points,* sans qu'on sache si ce sont des nombres, des courbes, des surfaces, ou des fonctions....

Le mathématicien se retrouve donc devant différents modèles (ou géométries) qui correspondent à différents systèmes d'axiomes, et le physicien ou le mécanicien n'a plus alors qu'à choisir parmi ces modèles celui qui représente au mieux le donné empirique ou les phénomènes expérimentaux auxquels il s'intéresse, ou autrement dit :

> Mathematics reveals the possible space ; physics decides which among them corresponds to physical space. (Reichenbach, 1927, p.6)

1.3. Les déplacements incontournables

La question des transformations nous amène à la dualité des notions de déplacement et de modification des objets dans l'espace. Il convient avant tout de distinguer la notion de déplacement qui désigne le *transport* d'objets géométriques indépendamment du temps, de la notion de mouvement dans le temps, objet d'étude de la cinématique.

L'usage du mouvement est refusé et considéré comme étranger à la géométrie par les mathématiciens grecs de l'Antiquité, notamment par Euclide, et ce pour des raisons essentiellement métaphysiques :

> Si la géométrie oblige à contempler l'essence, elle nous convient ; si elle s'arrête au devenir, elle ne nous convient pas. (Platon, La République, Livre II).

Mais, même si le déplacement n'intervient dans les raisonnements géométriques que d'une manière implicite ou « *plus ou moins déguisée* » (pour reprendre les termes de Jules Houël, 1867), son rôle dans la constitution de la géométrie élémentaire ne peut être ignoré, car il est nécessaire pour toute comparaison d'une figure à l'autre. En effet, la notion commune d'Euclide énonçant le principe d'égalité par superposition (notion commune 8 du Livre 1, dans la traduction de Peyrard des Éléments) : « *Les grandeurs,*

---

[1] Ainsi, à chaque groupe de transformations conservant un ou des caractères des objets géométriques, on associe une géométrie. Par exemple, la géométrie affine conserve le parallélisme, la géométrie euclidienne correspond au groupe des déplacements qui conservent les distances et les formes. Ces groupes sont des sous-groupes du groupe projectif conservant l'alignement, auquel on associe la géométrie projective.

qui s'adaptent entre elles, sont égales entre elles », s'appuie par essence sur un déplacement. Euclide conclut donc à l'égalité de deux objets géométriques quand, ayant *transporté* l'un sur l'autre, ils coïncident, c'est-à-dire, ils se superposent.

Après avoir décrit intuitivement, empiriquement, ce qu'est l'égalité de deux corps, Euclide définit précisément les conditions d'égalité de deux figures géométriques par les cas d'égalité des triangles. Bien que leurs *démonstrations* s'appuient sur l'utilisation effective de la superposition, et par là même du déplacement, leur intervention ultérieure dans les raisonnements permet de contourner le recours à tout déplacement.

Ainsi, Euclide s'appuie sur un donné empirique, le déplacement, pour fabriquer de la connaissance rationnelle, c'est-à-dire construite sur le seul raisonnement. C'est alors grâce à la notion de déplacement que se constitue le lien entre les aspects expérimentaux et les aspects théoriques de la géométrie euclidienne. Et c'est ce lien qui fait des fondements de la géométrie élémentaire à la fois une science mathématique et une science physique. Cette distinction entre science mathématique et science physique prend encore plus pleinement son sens après la découverte des géométries non-euclidiennes.

1.4. Points mobiles et transformations

Dans l'espace euclidien, on peut donc *transporter* n'importe quel objet géométrique sans que cela influe sur sa forme. C'est ce qu'exprime implicitement la demande 3 (du Livre I des Éléments ; traduction de Peyrard) :

> D'un point quelconque, et avec un intervalle quelconque, décrire une circonférence de cercle.

Euclide demande ici d'accepter comme vrai le fait que l'on puisse construire en n'importe quel point du plan un segment quelconque, puis un cercle de rayon égal à la longueur de ce segment. Il est donc possible de *transporter* n'importe quel segment et par là même n'importe quelle figure géométrique dans l'espace euclidien. Le déplacement ne correspond alors qu'à un *changement de lieu* d'une figure, sans modification de la forme de cette figure ; autrement dit, l'espace euclidien est homogène.

Mais, dès le dix-septième siècle, une nouvelle conception des mathématiques comme langage exprimant les réalités physiques de la nature apparaît. Dans ce contexte, l'espace géométrique apparaît comme le cadre naturel pour faire l'étude du mouvement et notamment du mouvement d'un point sur une trajectoire.

Ainsi, apparaît une étude plus théorique de la mécanique et par là même une nouvelle appréhension du point et de la figure géométrique. Pour Newton par exemple, les courbes sont conçues comme des trajectoires, donc données par le mouvement d'un point, c'est-à-dire données par ce qu'on pourrait considérer comme les *positions successives* d'un point mobile décrivant cette trajectoire. Ainsi, le mécanicien considère un point qui *bouge* et l'*ensemble des positions* de ce point constitue la figure ; la figure devient donc en fait le support d'un point mobile.

Cependant, la nécessité pour les géomètres de libérer leurs raisonnements du mouvement, le développement de l'analyse et la ponctualisation de l'espace rendue incontournable par la géométrie analytique de Descartes, vont progressivement conduire à une autre appréhension du point et de la figure. L'espace ou, plus particulièrement la figure, sont alors constitués par des ensembles de points, et une transformation agit sur les points de l'espace de la même manière qu'une fonction opère sur les nombres d'un ensemble numérique.

On est bien loin ici de l'appréhension euclidienne du point qui, porté par une figure, est *localisé* ou *fixé* : il n'appartient pas à la figure au sens ensembliste en tant qu'élément variable constitutif.

2. Sur quels savoirs s'appuyer pour enseignement la géométrie en collège ?

2.1. Du perceptif au théorique

Revenons à notre objet d'étude : l'enseignement de base de la géométrie comme première étape de l'accès à la connaissance géométrique.

Il revient aux élèves de dégager la signification des objets de la géométrie et leurs premières propriétés, à partir de leur perception sensible, que les méthodes de la géométrie *supérieure* (notamment la géométrie des transformations) vont permettre d'approfondir.

La géométrie d'Euclide, dont les premières définitions sont des descriptions d'objets perceptibles par le biais des sens, est sans doute celle qui se rapproche le plus de l'appréhension de l'espace qu'ont les enfants. Mais sa construction passe rapidement d'une perception pragmatique à un développement théorique. Le premier cas d'égalité des triangles (quatrième proposition) illustre fort bien ce passage. C'est une des raisons pour lesquelles on retrouve les bases de la géométrie d'Euclide dans l'enseignement, car elles correspondent à l'évolution de l'acquisition des connaissances géométriques chez les enfants : l'évolution du descriptif sensible au théorique.

C'est donc sur l'étude des figures et des configurations que s'appuie l'enseignement de la géométrie à l'école et au collège, avec la construction d'objets simples, l'étude des relations entre ces objets, leurs propriétés communes puis progressivement l'accession de celles-ci au statut de théorèmes obtenus par de petits raisonnements déductifs, accompagnant l'apprentissage de la démonstration.

Il faut souligner ici que la connaissance théorique ne peut être atteinte que par le fonctionnement de raisonnements logiques (le raisonnement déductif fait partie de ces différents modes de raisonnements logiques), ce sont eux en effet qui permettent de dégager de nouvelles connaissances sur les objets idéaux, abstraits, construits à partir d'objets sensibles. Quant à la théorie, elle s'occupe de faire fonctionner ces objets idéaux.

L'un des objectifs de l'enseignement n'est-il pas d'apprendre aux élèves à mieux utiliser des concepts abstraits pour communiquer ? Et, si oui, l'apprentissage de la démonstration ne se trouve-t-il pas à ce niveau pleinement justifié, dans le sens où la démonstration est un moyen d'expression nécessaire pour la communication, pour expliquer un raisonnement, valider une preuve, socialiser un résultat ?

L'étude des configurations et des transformations constitue donc l'essentiel des contenus des programmes de géométrie du collège. Mais, comment des éléments de géométrie élémentaire peuvent-ils être associés aux transformations dans une progression cohérente ?

2.2 . L'enseignement des transformations au collège

a) Transformations et géométrie euclidienne

Les programmes de géométrie de collège accordent une place importante à l'étude des transformations qui comprennent la symétrie axiale en Sixième, la symétrie centrale en Cinquième, la rotation et la translation en Quatrième, puis en Troisième, la notion d'agrandissement et quelques compositions de transformations dans des cas particuliers simples.

En ce qui concerne les objectifs, il s'agit de construire les transformés de figures par les transformations du programme, la transformation

> n'a, à aucun moment, à être présentée comme application du plan dans lui-même (Nouveaux programmes de collège, 1996, Ministère de l'Éducation Nationale),

et l'accent doit être mis sur l'invariance de propriétés des figures dans une transformation.

Par ailleurs, les programmes doivent promouvoir un rapport à la connaissance scientifique qui ne se limite pas à un simple empilement de connaissances, mais est à la fois organisation rationnelle de l'acquis et synthèse des activités intellectuelles dont le développement doit permettre de découvrir l'encore inconnu.

Mais comment peut-on faire le lien, au collège, entre la notion de transformation et des éléments de géométrie euclidienne, géométrie dans laquelle les transformations n'ont pas de place explicite, afin que leur enseignement ne se réduise justement pas à une simple juxtaposition de connaissances ?

Comme nous l'avons souligné à propos des déplacements, la notion de transformation est exclue du champ des études euclidiennes. Mais cette notion intervient tout de même implicitement pour permettre en théorie la comparaison de deux figures. Les transformations étudiées au collège ont alors pour effet de rendre les déplacements plus explicites, lisibles et intuitifs. N'obtient-on pas de ce fait une progression cohérente au collège entre la géométrie élémentaire et la géométrie des transformations ?

Dans ce contexte naissent des questions didactiques : qu'est-ce qu'une transformation géométrique pour un enfant ? Comment la perçoit-il ?

Il apparaît, après lecture des contenus et objectifs des programmes, que l'on cherche à créer chez les élèves une conception de la notion de transformation qui entre de manière cohérente dans le cadre euclidien : on ne considère les transformations que par leur action sur les figures et non pas sur l'espace tout entier. En particulier, une transformation agit sur les points situés sur des lignes ou définis par leur intersection, mais pas sur des lignes en tant qu'ensembles de points. De plus, puisque de la Sixième à la Troisième, l'élève n'étudie que des isométries, il se retrouve en définitive face à l'homogénéité de l'espace euclidien.

Certes, il est important que la notion de transformation ait une signification dans le contexte géométrique dans lequel elle est introduite, enseignée. Il est important qu'elle soit reliée aux éléments de géométrie euclidienne (au niveau du collège) d'une manière tout à fait cohérente. Mais il importe avant tout que la notion de transformation ait un sens pour les élèves. Qu'en est-il ? Quel sens a-t-elle, ou a-t-elle seulement un sens ?

C'est une question fondamentale dont les réponses sont loin d'être évidentes, d'autant plus que la notion de transformation est une notion récente (dégagée en tant qu'objet d'étude au dix-neuvième siècle), et présente encore de nombreuses difficultés pour son enseignement.

b) L'apport des transformations dans l'enseignement de la géométrie

L'une des principales raisons pour lesquelles beaucoup d'élèves *décrochent* en mathématiques est qu'on leur assène trop tôt des discours descriptifs d'objets abstraits, statiques et préexistant de toute éternité. Par contre, il semble que les transformations peuvent représenter un outil performant pour rendre la géométrie plus dynamique et motivante et pour faire en sorte que les élèves donnent du sens à ce qu'ils font. Il est vrai que la notion de transformation géométrique et le vocabulaire qui l'accompagne peuvent être très utiles comme supports et motivations pour d'autres acquisitions telles que : réaliser des programmes de constructions géométriques, des pavages..., se perfectionner dans l'usage des instruments de mesure et de dessin, découvrir ou redécouvrir certaines propriétés géométriques, toutes activités qui contribuent à développer la psychomotricité. De plus, la connaissance des propriétés des transformations permet d'aider à la résolution de problèmes de la vie quotidienne (architecture, optique...). De ce fait, les transformations participent de la culture de chaque individu.

L'enseignement élémentaire de la géométrie peut bénéficier de ce caractère dynamique et motivant des transformations. En multipliant les activités géométriques autour des transformations, on peut espérer favoriser la prise de sens par les élèves de notions géométriques.

En particulier l'utilisation de propriétés invariantes par transformation peut être riche de résultats concrets. Les programmes insistent sur le fait que la notion de transformation ne prend sens qu'à travers cette notion d'invariant. C'est pourquoi les isométries constituent l'essentiel de l'étude des transformations de la Sixième à la Troisième. Mais ne faut-il pas, pour que la notion de transformation soit consistante, que les invariants apparaissent d'une façon non triviale ? Autrement dit, comment peut-on attirer l'attention des élèves sur les isométries, si on ne leur enseigne justement que des isométries ? Car le fait est, qu'au collège, les transformations ne déforment pas, elles ne font que déplacer les objets sur lesquels elles agissent. Or une isométrie est concevable autant par ce qu'elle est que par ce qu'elle refuse d'être. Pour rendre compte à l'élève de ce que sont les isométries, et par là même leurs invariants, ne faudrait-il pas lui présenter des transformations qui soient des transformations *déformantes*, qui *transforment vraiment*, telles que la symétrie oblique par exemple ?

c) Difficultés dans l'apprentissage des transformations

Cependant, d'un point de vue didactique, les transformations ont leurs limites, notamment dans la mesure où leur utilisation comme outil de résolution de problèmes et de démonstration semble difficilement maîtrisée, voire rejetée par les élèves du collège et parfois par leurs enseignants.

En particulier, en Sixième, Cinquième, la grande majorité des enfants se positionne spontanément au niveau d'opérations concrètes, aussi l'utilisation de transformations dans la mise en œuvre de certaines séquences déductives s'avère-t-elle d'un niveau cognitif trop élevé pour des enfants de cet âge. Car même si ces derniers se sont appropriés les propriétés de certaines figures ou configurations au cours de constructions, ils ne les maîtrisent pas formellement et sont donc dans l'impossibilité de les réinvestir dans une démonstration. Cette remarque prend d'autant plus de force dans les cas où la résolution d'un problème est beaucoup plus simple élémentairement qu'avec les transformations.

En effet, le processus mental qui permet, à partir de la lecture d'un énoncé et/ou d'une figure, de réinvestir les connaissances adéquates en vue de la résolution d'un problème ou de l'élaboration d'une démonstration, constitue une réelle difficulté pour les élèves, pour lesquels la traduction d'une compréhension perceptive de propriétés géométriques en une connaissance théorique est un enjeu cognitif très fort :

> il ne suffit pas qu'une propriété soit démontrée pour devenir mobilisable, il faut aussi et surtout que se soit construite une image mentale, représentation figurée de cette propriété, qui vient s'inscrire dans un lexique personnel explicite ou non, au même titre qu'un théorème énoncé et justifié. (Daniel, 1995, p.76)

d) Transformations globales et transformations ponctuelles

Mais, comment parler de transformations déformantes sans ponctualiser les figures ?

A ce propos, il nous paraît intéressant de faire quelques remarques sur l'évolution du statut de l'objet transformation du collège à la classe de Seconde.

> Dans l'esprit des programmes de collège, on fera d'abord agir les transformations sur des figures, puis on dégagera l'idée essentielle qu'une transformation associe à tout point du plan un point du plan bien déterminé. (Programme de Seconde, éd. 1996).

Ainsi, en Seconde, l'élève aura à passer d'une transformation opérant sur des figures à une application du plan sur lui-même, qui opère sur des points puis plus globalement sur des figures, que l'élève devra désormais considérer comme constituées d'ensembles de points. Le programme de Seconde introduit donc les transformations sous leur aspect ponctuel et fonctionnel (Jahn, 1998, p.66).

Or, tout au long du collège, les transformations n'agissent que sur des figures globales, et même si elles s'appliquent parfois à des points, ceux-ci sont considérés comme des objets géométriques faisant éventuellement partie de figures (comme extrémités de lignes), et non comme constituants élémentaires des figures. Par ailleurs, l'étude des fonctions au collège reste très limitée. La notion de fonction n'apparaît explicitement qu'en Quatrième et Troisième sous la forme des applications linéaires et affines, et les élèves ne perçoivent pas encore son caractère fonctionnel abstrait.

Autrement dit, la géométrie ponctuelle et le cadre fonctionnel nécessaires à la compréhension de la transformation telle qu'elle apparaîtra en Seconde, ne sont pas introduits au collège (Ibid., p.61 à 65).

Dès lors, le nouveau statut des transformations ne semble pas évident à mettre en place en Seconde, d'autant plus que l'enseignement des transformations à ce niveau passe par des théorèmes de conservation donnant directement la nature de l'image d'une figure. Une conception dynamique de la transformation qui consiste à considérer une figure comme le support d'un point mobile M (l'image de cette figure étant la figure décrite par le point M' image de M), prépare l'appréhension de la nature ponctuelle et fonctionnelle de la transformation. (Ibid., p.67)

La relation liant un point variable M et son image M' induit la notion de lieu géométrique. Cette notion s'inscrit naturellement dans le cadre ponctuel et fonctionnel, mais elle ne constitue pas vraiment une aide à l'évolution du statut des transformations. Car, rechercher un lieu conduit le plus souvent à reconnaître l'effet d'une construction puis à conclure que le lieu cherché est l'image globale d'une figure par la transformation qui en découle, et ce, en raisonnant généralement et uniquement sur un point générique et son image.

Dans ces conditions, le passage de la notion de transformation agissant sur des figures à celle de transformation comme application ponctuelle représente une rupture épistémologique certaine. On est alors en droit de se demander si la transition collège-lycée est suffisamment assurée dans l'enseignement des transformations, autrement dit si un élève de Seconde a réellement les moyens de comprendre, d'appréhender d'emblée une transformation sous ses aspects ponctuel et fonctionnel. Délaissant la géométrie élémentaire, les outils vectoriels et analytiques prendront ensuite le relais pour la résolution de problèmes.

Dans cette progression, dans le cadre analytique notamment, la signification de la notion de transformation ne risque-t-elle pas d'être occultée par des activités qui ne s'appuieraient pas suffisamment sur les propriétés des configurations ? Un travail trop centré sur l'objet transformation ne risque-t-il pas de nous faire oublier que l'enseignement de la géométrie, du collège au lycée, devrait d'abord s'appuyer sur l'étude des figures et des effets des transformations sur leurs propriétés ? La figure ne serait plus alors le premier objet d'étude, elle pourrait n'apparaître que comme cadre de problèmes de transformations.

L'étude des configurations doit donc garder toute sa place initiatique. Nous sommes donc amenés à nous reposer aujourd'hui la question des *cas d'égalité des triangles*.

3. A propos des cas d'égalité des triangles…

3.1. Intérêt des cas d'égalité

Un regard sur l'enseignement de la géométrie au collège au cours des trente dernières années nous amène à la question suivante : pourquoi les *cas d'égalité des triangles* ne font-ils plus officiellement partie des programmes de Cinquième ?

Certes, les programmes introduisent *implicitement* des conditions d'isométrie des triangles, notamment à travers l'une des compétences demandées aujourd'hui à un élève de Cinquième, à savoir :

> construire un triangle connaissant : la longueur d'un côté et les deux angles qui lui sont adjacents ; les longueurs de deux côtés et l'angle compris entre ces deux côtés ; les longueurs des trois côtés.

ainsi qu'à travers le commentaire qui accompagne cette compétence, à savoir :

> on remarquera, dans chaque cas où la construction est possible, que lorsqu'un côté est placé, on peut construire plusieurs triangles, deux à deux symétriques par rapport à ce côté, à sa médiatrice ou à son milieu (Nouveaux programmes des collèges, 1996, Ministère de l'Éducation Nationale),

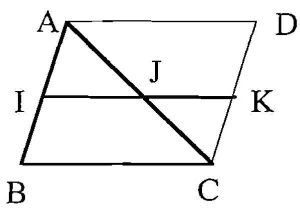
autrement dit, on remarquera que tous les triangles construits sont *superposables*, avec ou sans retournements.

Ainsi le programme de Cinquième actuel introduit subrepticement les trois *cas d'égalité des triangles*, sans les appeler ainsi, et les donne uniquement sous forme de constructions.

Or, il s'avère que les cas d'égalité des triangles peuvent être, d'un point de vue didactique, des outils très intéressants.

En effet, leur utilisation simplifierait parfois des démonstrations où l'outil *transformation* n'est pas le plus efficace et intervient, dans certains exercices, comme distracteur didactique si ce n'est comme véritable obstacle. Ils permettraient une économie de moyens, dans le sens où, pour connaître un triangle, c'est-à-dire six éléments constitutifs : trois côtés et trois angles, il suffit d'en connaître trois correctement choisis (avec au moins un côté). Ces éléments sont des objets géométriques perceptifs enseignés aux enfants dès l'école primaire, ils ne font donc pas appel à des notions d'un niveau cognitif trop élevé pour des collégiens...

C'est par exemple le cas pour établir les propriétés de la droite des milieux dans un triangle qui, plutôt que d'impliquer la symétrie centrale dans un parallélogramme artificiellement construit, découlent directement des propriétés des angles déterminés par des parallèles et des sécantes pour dégager simplement l'*égalité* de deux triangles : Voici la démarche suggérée par le programme de Quatrième :

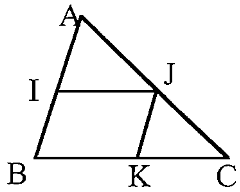


Dans le triangle ABC, soit I le milieu de [AB] et J le milieu de [AC]. Soit ABCD le parallélogramme construit à partir de ABC.

Dans la symétrie de centre J, K image de I est milieu de [CD] (conservation du milieu), AI = KC (conservation des longueurs) donc [KC] et [IB] sont de même longueur. Comme [KC] est parallèle à [IB], IBCK est un parallélogramme et (IJ) est l'unique parallèle à (BC) passant par I. Cette unicité entraîne la réciproque.

Et la démarche passant par un *cas d'égalité* :

Soit I le milieu de [AB] et J sur [AC] tel que (IJ) soit parallèle à (BC). Soit (JK) la parallèle à (AB) passant par J. IJKB est un parallélogramme, d'où AI = IB = JK. Le parallélisme donne des égalités d'angles correspondants qui entraînent que les deux triangles AIJ et JKC sont *égaux*. Donc AJ = JC, J est milieu de [AC]. La réciproque découle de l'unicité de la parallèle à (BC) passant par I.



3.2. Les cas d'égalité et l'enseignement de la géométrie

Alors, pourquoi les *cas d'égalité* n'apparaissent-ils pas comme théorèmes pouvant servir dans des démonstrations ?

A cette question, on s'entendra répondre que, du point de vue de la transposition didactique, il n'est pas cohérent d'utiliser les cas d'égalité des triangles en tant que théorèmes car, ce faisant, on réintroduirait un outil archaïque alors que les transformations constituent un outil moderne et performant.

De plus, la définition de *l'égalité* de deux triangles n'est pas évidente à formuler à ce niveau : le terme *d'égalité* au sens qu'on lui donne aujourd'hui (deux représentations du même objet) est impropre. Le remplacer par le terme de *superposable* ne fait que déplacer le problème (en même temps que le triangle en jeu !).

Une raison plus profonde tient à l'aspect épistémologique de ce problème : le rôle du premier cas d'égalité des triangles dans la géométrie d'Euclide (placé en Proposition 4 du Livre I des Éléments) est d'opérer la transition d'un exposé se référant à une appréhension perceptive des objets en jeu vers une compréhension théorique de leurs propriétés.

Ainsi les cas d'égalité des triangles contribuent à la compréhension de la géométrie d'Euclide comme science rationnelle. Autrement dit, la démarche analytique que l'élève apprend à faire pour reconnaître s'il a suffisamment d'éléments pour affirmer que tel ou tel triangle est *égal* à tel autre devrait constituer une étape fondamentale pour sa prise de conscience du passage d'une géométrie pratique vers une reconnaissance théorique des propriétés.

On voit bien dans ce contexte qu'il ne peut y avoir de *démonstration rigoureuse* des *cas d'égalité* des triangles, mais seulement une *explication*, telle qu'on la trouve dans les Éléments. Ce type d'*explication* par superposition peut donner une fausse idée des attentes en Cinquième concernant l'apprentissage de la démonstration et peut contribuer de ce fait à l'établissement d'un contrat didactique non souhaité.

Mais, cet argument n'est-il qu'une forme de « *modernolâtrie* », selon les termes de Rudolf Bkouche (1992, p.9), et ne pose-t-il pas un problème de cohérence didactique ?

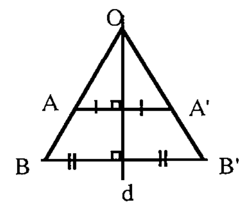
Ne faut-il pas en effet, pour comprendre la notion de transformation, passer par l'explicitation des problèmes et des diverses notions géométriques qui ont progressivement conduit au concept de transformation ? En ce sens, les cas d'égalité des triangles ne participent-ils pas de la compréhension globale de la géométrie ?

Ainsi, les cas d'égalité des triangles pourraient faire le lien, au collège, entre la géométrie d'Euclide et les transformations. Car, reconnaître l'existence de déplacements dans les cas d'égalité des triangles, c'est légitimer le fait que l'on puisse transporter, dans le plan, un segment tout en conservant sa longueur, puis une figure en conservant sa forme et ses dimensions, c'est donc légitimer la notion de transformation.

De ce point de vue aussi, on comprend l'incohérence à la fois épistémologique et didactique qu'il y aurait, selon certaines propositions, à réintroduire les *cas d'égalité des triangles* dans les programmes des lycées, alors que les fondements de la géométrie théorique sont installés depuis le collège, théâtre de la transition du perceptif au théorique.

On peut remarquer que cette transition apparaît aussi lors de l'introduction des transformations dès le début du collège : par exemple, pour introduire la propriété de conservation de l'alignement par symétrie axiale, on peut s'en faire une représentation avec des pliages, puis l'admettre comme propriété théorique de cette transformation.

Cette propriété s'insère sans difficulté dans la démarche euclidienne : il suffit de remarquer que les droites passant par deux points A et B d'une part et leurs images A' et B' d'autre part, se coupent sur l'axe de symétrie.
Pour le montrer, on considère l'intersection O de la doite (AB) avec l'axe de symétrie (d) et les droites (OA') et (OB').



On obtient alors l'égalité des angles dOA' et dOB' (ce qui prouve l'alignement de O, A' et B'), en faisant appel à la propriété caractéristique du triangle isocèle dans lequel médiane, hauteur et bissectrice relatives au sommet sont confondues, propriété découlant immédiatement des cas d'égalité.

Mais en classe de Sixième ce changement de perception reste très implicite et, à cet âge, l'identification de ce changement de statut d'une propriété de la symétrie axiale est sans doute moins aisé à mettre en évidence que pour un *cas d'égalité des triangles*.

Sans trancher complètement cette question des rapports entre *cas d'égalité* et *transformations*, nous penchons vers une réhabilitation des cas d'égalité dans leur rôle de légitimation perceptive des déplacements d'objets géométriques dans l'espace, et par là, vers la validation de la notion même de transformation. Dans cet esprit, la déclaration qui suit de Bkouche prend un certain relief :

> il s'agit de décider s'il faut maintenir, dans l'enseignement du collège et du lycée, ce caractère d'accès à la rationalité scientifique que constitue l'étude de la géométrie élémentaire, autrement dit, si la construction de l'intelligibilité du monde participe encore de l'enseignement aujourd'hui. Nous avons dit au début de cet article en quoi cela nous semblait archaïque, mais c'est peut-être cet **archaïque** qui est fondateur d'avenir. (Bkouche, 1997, p.71).

4. Apprentissage de la démonstration, le sens en géométrie

4.1. Dessin, figure et démonstration

> La démarche suivie dans l'enseignement des mathématiques renforce la formation intellectuelle des élèves et concourt à celle de citoyen, en développant leur aptitude à chercher, leur capacité à critiquer, justifier ou

> infirmer une affirmation, en les habituant à s'exprimer clairement aussi bien à l'oral qu'à l'écrit. (Nouveaux programmes de collège, 1996, Ministère de l'Éducation Nationale).

Ainsi, l'un des objectifs explicites de l'apprentissage des mathématiques au collège est d'apprendre aux élèves à démontrer. Pour ce faire, on associe très souvent l'apprentissage de la démonstration à l'enseignement de la géométrie. Aussitôt se pose la question du statut et du rôle de la figure dans la démonstration : comment un élève du collège appréhende-t-il une figure ? Et d'un point de vue didactique, la figure représente-t-elle une aide ou au contraire un obstacle à la compréhension et à l'élaboration d'une démonstration ?

L'initiation au raisonnement déductif, avec comme perspective l'apprentissage de la démonstration, nécessite une évolution du statut des objets géométriques.

En Sixième, Cinquième, l'élève doit commencer par observer, construire, mesurer et l'accent est mis sur l'exactitude, la précision des tracés et des mesures car eux seuls suffisent pour résoudre un problème, valider un résultat. A ce niveau, raisonner consiste donc à faire quelques déductions pratiques basées sur un rapport perceptif aux objets dessinés, l'élève raisonne sur le dessin et non pas sur la figure en tant qu'objet abstrait, idéal, telle que nous l'avons caractérisée au début de cet article.

Puis progressivement en Cinquième et surtout en Quatrième, Troisième, l'élève doit faire évoluer la perception qu'il a des objets sur lesquels il est amené à raisonner, il ne s'agit plus de mesurer, de constater, il faut désormais raisonner, déduire puis démontrer et ce, non plus sur des objets concrets, les dessins, mais sur des objets abstraits, les figures, porteurs de propriétés théoriques.

Ce changement du statut du dessin vers celui de la figure, que l'on peut aussi qualifier de rupture épistémologique, constitue une réelle difficulté dans l'enseignement et l'apprentissage de la démonstration. Non seulement les élèves ne sont pas tous prêts à réorganiser leur pensée sur la base de notions abstraites quand ils ont encore un rapport direct à l'objet, mais de plus les enseignants ne peuvent rendre explicite ce nouveau statut de la figure par un discours accessible à l'élève, ni situer précisément dans le temps ce processus d'abstraction. Finalement, les enseignants procèdent le plus souvent par effets de contrat, sollicitant ou interdisant, élevant progressivement le niveau de leurs attentes dans des tâches de plus en plus complexes.

Sans compter les difficultés relatives au statut de la figure, on constate également que le fait de relier l'enseignement de la géométrie à l'apprentissage de la démonstration, et par là même d'utiliser la figure dans l'élaboration d'un raisonnement, pose en particulier deux problèmes importants auxquels se heurtent de nombreux élèves du collège.

D'une part, la prégnance de la figure peut rendre inutile ou vaine, aux yeux de l'élève, la recherche d'une démonstration. En effet, la simple observation d'une figure, ou les énoncés du type « *démontrez que la figure est un* ... », ou encore, la méthode de construction d'une figure, peuvent porter en eux la réponse à la question qui sera posée ensuite, et peuvent donc rendre les propriétés à démontrer, évidentes pour l'élève. Ce dernier ne peut alors donner un sens ni à la question, ni à la démonstration qui :

> risque d'apparaître comme une simple nécessité réglementaire du cours de mathématiques, renforcée par des assertions autoritaires du type : « en

> mathématique, on ne s'appuie pas sur l'évidence, il faut démontrer » ; la conséquence en est que les mathématiques apparaissent sous un angle purement juridique où la démonstration tient lieu de règle, moins pour des raisons de savoir que pour des raisons d'autorité institutionnelle, le professeur devenant le garant de cette autorité. (Bkouche, 1997, p.65 et 66)

Ainsi, quand l'incertitude et l'enjeu nécessaires pour donner du sens à la démonstration disparaissent derrière l'évidence portée par la figure, et quand cette démonstration est seulement assujettie au contrat didactique, l'élève contemporain n'a plus de raison suffisante pour considérer la démonstration comme un outil de communication d'une preuve, soit pour se convaincre lui-même, soit pour convaincre les autres. Ayant perdu de vue la nécessité d'une construction logique de la théorie géométrique, cet élève ne peut plus percevoir dans la démonstration sa fonction première : un outil qui permet d'insérer un résultat démontré dans un ensemble ordonné de savoirs rigoureusement établis.

Cette remarque prend d'autant plus de poids aujourd'hui dans un environnement informatique où les logiciels de géométrie dynamique permettent d'obtenir visuellement la plupart des propriétés rencontrées en collège, comme par exemple celles de Pythagore et de Thalès pour ne citer que les plus célèbres.

D'autre part, dans la mise en place de son raisonnement, l'élève peut être gêné par la figure elle-même, par la difficulté qu'il a à l'appréhender, la décrypter, l'analyser. Précisons : devant un problème de géométrie, c'est-à-dire devant une figure et un énoncé s'y rattachant, l'élève doit être capable de discerner les propriétés qu'il peut *voir* sur le dessin et celles qui font effectivement partie des hypothèses théoriques présentes dans la situation ou qui peuvent s'en déduire. Autrement dit, l'élève doit être capable, par un aller et retour constant entre le dessin et l'énoncé, de sélectionner parmi les indications du dessin celles qu'il sera légitime d'utiliser pour un raisonnement géométrique (par exemple des propriétés d'alignement, d'intersection de droites, ...).

Cette emprise de la figure constitue une réelle difficulté pour les élèves, d'autant plus importante pour ceux qui construisent des figures particulières et qui utilisent ainsi, après simple lecture de leurs dessins, des hypothèses qui ne sont pas présentes dans l'énoncé, et introduisent donc des données non pertinentes dans leur raisonnement.

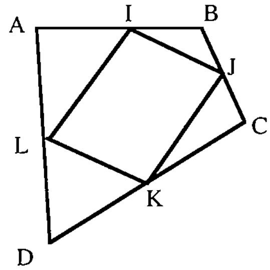
De plus, la complexité d'une figure peut occulter l'idée centrale d'une démonstration. Par exemple, l'élève qui a une vision trop globale de la figure ne perçoit pas séparément telle partie éventuelle qui mettrait en évidence la solution.

Inversement un élève ne conçoit pas toujours spontanément une figure comme faisant partie d'une figure plus complexe, mettant en jeu des points et des lignes absents jusque là de son dessin. Il n'est alors pas en mesure de déceler les clés pour résoudre un problème donné.

Illustrons ces propos avec l'exemple très classique du parallélogramme ayant pour sommets les quatre milieux des côtés d'un quadrilatère. Le tracé des diagonales du quadrilatère fait apparaître la propriété de la droite des milieux dans un triangle et la transitivité du parallélisme permet de conclure.

Sans ce tracé, de nombreux élèves restent en échec, sauf à considérer des quadrilatères particuliers, parallélogrammes au moins, pour lesquels la propriété cherchée découle de la symétrie centrale présente dans cette configuration particulière.

Si ABCD est un quadrilatère, si I, J, K, L sont milieux de [AB], [BC], [CD], [DA], alors IJKL est un parallélogramme.



Les remarques précédentes semblent présenter la figure comme une source de difficultés dans l'apprentissage de la démonstration.
Or, la figure n'est-elle pas en même temps une aide pour asseoir un raisonnement ?
Ne permet-elle pas d'appréhender plus facilement un problème de géométrie, de faire ressortir les grandes lignes d'un raisonnement, ou encore de susciter l'envie de chercher, de découvrir, d'émettre des hypothèses et finalement de démontrer ?

Pourtant, combien d'élèves du collège ont une telle perception de la figure ?
On mesure bien toute la difficulté didactique de ce travail incontournable sur la figure en géométrie.

On est alors en droit de se demander si le principal écueil à l'usage coordonné de la figure et de la démonstration ne proviendrait pas du fait que l'apprentissage de la démonstration, en mettant trop l'accent sur les procédures, risquerait de la réduire à des chaînes d'inférences formelles soumises au bon usage des connecteurs logiques, ce qui aurait pour effet d'occulter les véritables enjeux et le sens même de la démonstration en géométrie.

4.2. La quête du sens en géométrie

> La géométrie explosant hors de ses limites traditionnelles (...) a révélé ses pouvoirs cachés, son extraordinaire souplesse et sa faculté d'adaptation, devenant ainsi l'un des outils les plus universels et les plus utiles de toutes les mathématiques. (Dieudonné, 1980, p.5 à 7)

Il est vrai que l'importance de la géométrie n'est maintenant plus à prouver ; par de multiples aspects, elle participe de la culture de base. Et certains de ses visages, à savoir : la géométrie comme science de l'espace et de ses déformations, la géométrie comme point de rencontre entre différents domaines scientifiques (astronomie, physique, ...), la géométrie comme outil pour penser et comprendre, ou encore, la géométrie comme support pour enseigner le raisonnement déductif puis la démonstration, sont très significatifs des rôles multiples de son enseignement qui se heurte à de nombreuses difficultés.

Par exemple, le fait d'associer l'apprentissage de la démonstration à l'enseignement de la géométrie soulève aussitôt la question des obstacles liés au statut de la figure. Comme nous l'avons souligné, l'apprentissage de la démonstration au collège nécessite un changement de rapport à la figure : l'élève doit prendre conscience que son dessin est *hors jeu* pour prouver, et doit raisonner en considérant la figure géométrique comme un objet idéal, caractérisé seulement par ses hypothèses de construction. Seule cette prise de conscience lui permettra d'élaborer des démonstrations. Cette démarche pose un véritable problème aux élèves ainsi qu'aux enseignants, d'autant plus que la figure n'apparaît pas toujours, aux yeux des élèves, comme l'aide heuristique et didactique qu'elle devrait pourtant constituer.

De même, nous avons vu la difficulté didactique dans la transition collège-lycée pour faire passer les élèves d'une appréhension globale de la notion de transformation à son caractère ponctuel.

Parmi toutes ces difficultés apparaît une seule et même question, celle du sens :
- quel sens un élève de collège donne-t-il à la figure, à la démonstration ou à la transformation ?
- Comment amener un élève à donner du sens à ce qu'il étudie ?

Sans chercher à répondre à ces interrogations, mais pour suggérer des pistes de réflexion, nous reprendrons pour conclure ces quelques questions posées par Stella Baruk (1973, p.52 et 53) :

> Pourquoi s'attache-t-on, à ce point, à débarrasser les mathématiques de toute trace humaine ?
> Pourquoi n'apparaît-il jamais aux élèves qu'avant de se figer dans la sauce du jour des idées ont été émises, proposées, discutées, parfois rejetées ?
> Pourquoi ne savent-ils jamais que ce sur quoi ils s'acharnent, ils peinent, ils s'irritent, a coûté de l'acharnement, de la peine ou de l'irritation à son inventeur ?

Puis Stella Baruk nous propose de partager son point de vue :

> (...) Partout le fait de savoir que c'est difficile, que ça l'a été, que des gens ont trouvé des problèmes à poser, que d'autres ont trouvé des solutions à ces problèmes, que parfois ces problèmes étaient en relation avec des besoins pratiques, et que parfois ils n'étaient que spéculation pure, et que de toute façon tout finit toujours par revenir à cette pure spéculation et qu'il y a à cela des raisons; partout et toujours, de parler de ces choses a canalisé l'angoisse, la rage, l'agressivité, le désespoir vers un déversoir.

Dès lors, placer l'enseignement des mathématiques dans une perspective historique, le rapporter aux besoins économiques sociaux et culturels d'une époque, ne permettrait-il pas aux élèves de mieux comprendre ce que sont les mathématiques, de donner plus de sens aux notions qu'il devront assimiler, voire même de susciter chez eux l'envie et le plaisir de faire des mathématiques ?

BIBLIOGRAPHIE

ARSAC G., CHAPIRON G., COLONNA A., GERMAIN G., GUICHARD Y., MANTE M. (1992) *L'initiation au raisonnement déductif au collège,* IREM de Lyon et PUL,.

BARUK, S. (1973) *Echec et maths*, éd. Du Seuil, collection Points Sciences.

BKOUCHE, R. (1995) Préface de *Géométrie* de Michel Carral, éd. Marketing (Paris), collection ellipses.

BKOUCHE, R. (1992) *L'enseignement scientifique entre l'illusion langagière et l'activisme pédagogique*, Repères-IREM n° 9.

BKOUCHE, R. (1997) *Quelques remarques à propos de l'enseignement de la géométrie*, Repères-IREM n° 26.

BRUNSCHVICG, L. , (1912) *Les étapes de la Philosophie Mathématique.*

CHEVALLARD, Y. & JOHSUA, M-A. (1991) *La transposition didactique*, éd. La Pensée Sauvage (Grenoble).

CHEVALLARD Y., JULLIEN P. (1991). *Autour de l'enseignement de la géométrie,* Petit x n°27, 41-76.

DANIEL, J-C. (1995) *Géométrie en mouvement,* Repères-IREM n° 18.

DIEUDONNE, J. (1980) *La Domination Universelle de la Géométrie*, Congrès International sur l'Enseignement des Mathématiques, Berkeley.

DUVAL R. (1988) *Pour une approche cognitive des problèmes de géométrie en termes de congruence.* Annales de didactique et de sciences cognitives 1, 57-74.

DUVAL R. (1994) *Les différents fonctionnements d'une figure dans une démarche géométrique,* Repères-IREM n°17, 121-138.

HOUEL, J. (1867) *Essai critique sur les principes fondamentaux de la géométrie élémentaire*, éd. Gauthier-Villars, Paris.

JAHN, A-P. (1998) *Des transformations des figures aux transformations ponctuelles : étude d'une séquence d'enseignement avec Cabri-géomètre*, thèse d'université Joseph Fourier Grenoble I.

LABORDE C., CAPPONI B. (1994) *Cabri-Géomètre constituant d'un milieu pour l'apprentissage de la notion de figure géométrique,* Recherches en Didactique des Mathématiques, vol 14, n°1.2, 43-66, Grenoble, La Pensée Sauvage éditions.

REICHENBACH, H. (1957) *La Philosophie de l'Espace et du Temps*, (1927), traduit par Maria Reichenbach et John Freund, avec une préface de Rudolph Carnap, Dover, New York.