DEUX FOIS TROIS ET TROIS FOIS DEUX SONT-ILS ÉGAUX ?

HISTOIRE D'UN MALENTENDU

Jeanne BOLON
Professeur de mathématiques
IUFM de Versailles

Se poser la question de l'égalité entre deux fois trois et trois fois deux paraîtra incongru à n'importe quel professeur de mathématiques "fraîchement formé". Or cette question m'est posée à presque chaque stage de formation continue, ce qui prouve que le problème sous-jacent ne doit pas être aussi simple que les spécialistes de la discipline le disent.

Plutôt que de faire un article en bonne et due forme, je vous propose le résumé de mes interventions en stage de formation continue, dialogue où tour à tour je joue des registres mathématiques, pédagogiques, historiques, etc. La conviction n'est pas forcément au bout de l'intervention...

Entrée en matière

"Madame, qu'en pensez-vous ? Nous ne sommes pas d'accord entre nous dans l'école".

Je me réjouis de cette question : enfin de quoi alimenter "pour de vrai" les réunions de cycle au sein d'une école. Je demande des précisions.

"Deux fois trois et trois fois deux, cela correspond à des situations différentes : on ne va pas confondre "deux paquets de trois objets" et "trois paquets de deux objets", ou encore "deux objets à trois francs l'un" et "trois objets à deux francs l'un".

J'acquiesce provisoirement. Dans certaines classes du département des Yvelines, on note d'ailleurs de manière différente deux fois trois et trois fois deux :

deux fois trois s'écrit 3 × 2 (et se lit aussi *trois multiplié par deux*)

trois fois deux s'écrit 2 × 3 (et se lit aussi *deux multiplié par trois*).

"C'est inutile de faire la différence", propose une des personnes présentes, "puisque les nombres sont les mêmes".

Les mathématiciens, qui s'intéressent aux nombres et à leurs propriétés, considèrent en effet que les nombres 2 × 3 et 3 × 2 sont les mêmes, et qu'il n'y a pas lieu de les distinguer.

Alors, que faut-il croire ? Que faut-il faire ? Je renvoie la question : "Qui a l'autorité en la matière : le Ministre par ses textes officiels, l'Académie des Sciences, les mouvements pédagogiques, votre inspecteur, l'école où vous exercez, d'autres institutions ?". Le public prend le vertige...

La notation "deux fois trois" : à gauche ou à droite ?

Une fois le problème posé, je propose quelques pistes d'explication.

A l'école primaire, on a eu longtemps l'habitude de noter en premier, dans la rédaction des problèmes, le "nombre qui porte l'unité de la solution". Par exemple, pour calculer le prix de 3 kg de pommes à 6 F le kg, on demandait aux enfants d'écrire le 6 F en tête.

6F × 3 = 18 F, ce qui peut s'interpréter comme trois fois six francs.[1]

En fait, le calcul sur les unités est faux. Les physiciens, qui ont l'habitude des "équations aux dimensions", auraient écrit :

6 F/kg × 3 kg = 18 F   comme 12 km/h × 2 h = 24 km

et là, peu importe que l'on ait écrit le 6 avant le 3, puisque le calcul sur les unités (F/kg × kg) donne le même résultat.

"Oui, mais à l'école primaire, les élèves ne maîtrisent pas le calcul sur les fractions". Exact. J'acquiesce et je poursuis par une référence à l'algèbre.

Dans l'enseignement secondaire, les élèves qui commencent à faire de l'algèbre écrivent :

$x + x = 2x$ et ils disent "x plus x égalent deux x" ou encore "il y a deux fois x" ou encore "deux multiplié par x ".

Ici, le nombre de fois est écrit à gauche de x, alors qu'à l'école primaire, le nombre de fois est le plus souvent écrit à droite de la quantité à répéter.

Je suggère que, pour une meilleure liaison avec le collège, on adopte la convention d'écriture qui y est pratiquée. J'insiste en disant que les conventions sont par définition arbitraires, qu'il n'y a aucune raison logique qui pousse à écrire le nombre de fois à gauche plutôt qu'à droite.

Protestations des instituteurs : pourquoi se mettre au service du collège ?

J'enchaîne en faisant observer que déjà les instituteurs sont gagnés par la notation du collège, à propos de la numération. Dans 2034, les élèves de l'école primaire sont entraînés à reconnaître deux unités de mille, trois dizaines et quatre unités. On leur demande d'écrire des décompositions sous la forme :

2034 = (2 × 1000) + (3 × 10) + (4 × 1).

J'insinue : "Dans deux unités de mille, n'y a-t-il pas en germe *deux fois une unité de mille* avec le nombre de fois écrit à gauche ?". Perplexité du public.

---

[1] Quand les textes officiels ont suggéré de retirer la mention des unités (commentaires des programmes de 1970), les enfants ont été invités à écrire : 6 x 3 = 18.

Je propose de laisser de côté ce débat sur l'écriture à gauche plutôt qu'à droite, mais de revenir à l'égalité : deux fois trois et trois fois deux désignent-ils la même chose ?

Les nombres et ce qu'ils représentent

Je pose la question : "Que désigne l'écriture 2 × 3 : un nombre ou une histoire ?" Mon propos est d'insister sur le statut de l'écriture mathématique : si elle désigne un nombre, l'égalité de deux fois trois et trois fois deux est assurée ; si elle désigne une histoire, si elle doit permettre d'imaginer les tas d'objets structurés en paquets, alors l'égalité est fausse, et il faudra apprendre aux élèves à distinguer les deux cas.

Pour soutenir l'égalité, les arguments tournent autour des calculs : le résultat est le même et, en calcul mental, cela peut être utile de recourir à la commutativité du produit (*dix fois trois* est moins facile à calculer que *trois fois dix*).

Ceux qui plaident pour la différence entre trois fois deux et deux fois trois insistent sur l'adéquation entre la situation proposée et l'écriture. J'introduis alors l'expression de mise en équation ou de modélisation. Il est certain que les mises en équation qui aboutissent à 7 × 2 et 2 × 7 peuvent correspondre à des problèmes différents. Mais une fois le problème mis en équation, le calcul s'opère sur des nombres, et alors l'égalité est à prendre en compte. Bien évidemment, au moment de l'interprétation des résultats, il faudra revenir à la relation entre le problème à résoudre et les désignations associées dans sa mise en équation. Je renvoie ainsi dos à dos les partisans de l'une et l'autre positions. Mais cette "pirouette" ne résout pas la question pédagogique.

Dans la tradition de l'école primaire, on ne fait pas de distinction entre mise en équation, calcul et interprétation des résultats : la présentation classique des "solutions des problèmes" montre qu'à chaque "pas" de raisonnement, l'élève est invité à mettre en équation, à calculer et à interpréter. D'ailleurs, l'enseignement secondaire ne rend guère lisible les problèmes théoriques que posent la modélisation ou la mise en équation : la "réalité" sert plus souvent d'artifice pour introduire une nouvelle notion que de support de réflexion concernant l'usage des mathématiques en dehors des mathématiques. Bref, il faut reconnaître que nous manquons de points de repère dans ce domaine. A mon tour à être perplexe sur ce qui peut être conseillé à l'école primaire...

La multiplication : une notion évolutive

A l'école primaire, la répétition de collections identiques et la répartition équitable d'objets ont du sens pour les enfants de très bonne heure : il est facile d'introduire l'addition répétée liée à l'expression française "nombre de fois". C'est sans doute la première "situation de référence" pour la multiplication, pour laquelle deux fois trois et trois fois deux correspondent à des problèmes différents. Mais c'est loin d'être la seule.

A l'époque des "mathématiques modernes", d'autres situations de référence avaient été introduites, liées au produit cartésien ou à la représentation en "arbres" : par exemple, on faisait dénombrer aux enfants combien de tenues différentes on pouvait faire à une poupée avec deux gilets et trois jupes, dix gilets et trente jupes, etc. Pour chaque gilet, il y a autant de tenues que de jupes ; pour chaque jupe, il y a autant de tenues que gilets. La multiplication liée à cette situation de référence ne privilégie ni deux fois trois ni trois fois deux. Elle a été oubliée, au profit de la situation des quadrillages : le produit de 3 par 4 y est lié au nombre de cases d'un quadrillage qui comporte 3 lignes et 4 colonnes (ou l'inverse). S'exprimer en nombre de fois n'a guère de sens ici, sauf à privilégier les lignes par rapport aux colonnes (ou l'inverse) : les enfants l'observent et disent qu'on peut "retourner" le rectangle.

Quand vient le moment d'introduire les décimaux, l'expression en "nombre de fois n" devient bizarre. S'il est facile de calculer le prix de 3 mètres de fil à 7,25 F le mètre (trois fois 7,25), le nombre de fois ne s'impose pas imédiatement pour calculer le prix de 7,25 m à 3 F le mètre : une décomposition linéaire est nécessaire en 7 fois 3 et *0,25 fois 3,* expression dont le sens ne découle pas des usages dans la langue courante : le nouveau sens sera à construire[2]. Sans un travail spécifique sur l'extension de l'emploi de *fois* dans le contexte des décimaux, l'expression en *tant de fois* ne risque-t-elle pas de créer un obstacle didactique pour l'enseignement de la multiplication des décimaux et plus généralement, pour les fonctions numériques "multiplier par ..." ou "diviser par..." ?

Les statistiques utilisent de manière implicite un autre sens de la multiplication. Prenons un exemple banal : dans la ville de Z, une étude faite sur 1200 personnes montre que les deux tiers des habitants prennent du café le matin, et que pour les trois quarts de ces consommateurs de café, il s'agit de café Robusta. Il y a 50 000 habitants dans la ville de Z. A combien estimer le nombre d'habitants qui utilisent du café Robusta dans cette ville ?

Une représentation en arbre facilite la structuration des données et donc la mise en œuvre de cette "multiplication"[3].

D'autres situations de multiplication pourraient être présentées (compositions de fonctions linéaires, etc.). Il ne s'agit pas d'être exhaustif mais de montrer que la multiplication recouvre tout un champ de problèmes très divers. Il est illusoire de croire que la présentation première de cette opération, quelle qu'en soit la situation de référence, pourrait être étendue sans effort à toutes les autres.

La morale de l'histoire

Peut-on enseigner en une seule fois toutes les propriétés de la multiplication ? Je ne le crois pas. Il y aura un temps - court- durant lequel *trois fois deux* sera différent de *deux fois trois,* un autre suivra pour lequel la différence sera sans objet.

---

[2] Des recherches en cours (Levain) montrent que les scores des deux problèmes sont significativement différents.

[3] Des représentations de ce type ont été introduites en pédagogie d'adultes. Voir P. Loosfel et D. Poisson (1976), *Mathématiques pour la formation d'adultes,* APMEP.
L'utilisation de représentations bi-dimensionnelles à propos de transformations additives ou multiplicatives semble améliorer les scores des élèves, en particulier lorsque la donnée d'ancrage n'est pas au début de la chaîne des transformations. Voir les travaux de R. Damm et W. Damm, publiés par l'IREM de Strasbourg.

Les mathématiques traduisent-elles tout des situations que l'on veut étudier ? Cet espoir est vain : la modélisation découpe, simplifie, etc. Nous le savons bien en géométrie : le point, la droite que nous dessinons, ne rendent compte qu'en partie des propriétés des points mathématiques et des droites mathématiques. Reste que la prise en compte des écarts de ce type est encore faible dans l'enseignement [4]. Conduire de manière cohérente et conjointe les "mathématiques pures" et les "mathématiques appliquées" pourrait être le mot d'ordre à venir.

Référence

LEVAIN J.P. (1992), La résolution de problèmes multiplicatifs à la fin du cycle primaire, *Educational Studies in Mathematics*, n°23, pp.139-161.

[4] Est-ce en lien avec le peu de cas que notre société fait des savoirs techniques et professionnels ?