

LA NOTION DE MESURE EXACTE

DE L'IMPOSSIBILITE PHYSIQUE A LA NECESSITE MATHEMATIQUE,

LES CONDITIONS D'UNE RUPTURE INEVITABLE

Francis REYNES

Collège Grand Air et Irem d'Aquitaine

Résumé. La notion de « *mesure exacte* » est propre aux mathématiques. Elle est étrangement absente de tous les programmes de l'enseignement secondaire. Nous montrons que les activités pratiquées à l'Ecole et au début du Collège génèrent un *obstacle didactique* sans doute inévitable... Au travers d'une expérience menée en classe de 4^e, nous proposons une réflexion sur les possibilités de *dépassement de cet obstacle*, afin qu'il puisse être effectif à la sortie du Collège.

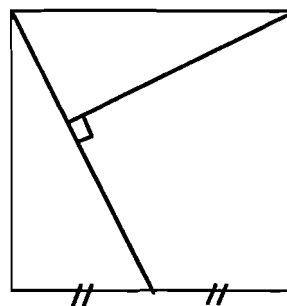
Introduction

La notion de « mesure exacte » est propre aux mathématiques et en rupture non seulement avec l'idée usuelle, « naïve », mais aussi avec la mesure utilisée dans les sciences dites « exactes »... Elle est étrangement absente de tous les programmes de l'enseignement secondaire, ce qui n'empêche évidemment pas qu'elle pose un problème spécifique dont la résolution ne va pas de soi. Elle est pourtant incontournable en classe de 3^e : comment, en effet, faire accéder $\sqrt{2}$ au statut de nombre si l'on n'a pas intégré le fait que la mesure d'un segment — en l'occurrence la diagonale d'un carré de côté 1 — s'exprime par UN nombre ? Elle est même indispensable bien avant, dès qu'un exercice de géométrie (démonstration ou construction) intègre des mesures d'angles ou de segments, pour éviter le recours aux procédures de mesurage sur la figure liées à une confusion des domaines image physique / modèle idéal (procédures que l'on rencontre encore en seconde ...). Or les activités pratiquées à l'Ecole et au début du Collège génèrent un obstacle didactique sans doute inévitable ... Au travers d'une expérience menée en classe de 4^e, nous proposons une réflexion sur les possibilités de dépassement de cet obstacle, afin qu'il puisse être effectif à la sortie du Collège.

A l'école, les objets géométriques sont présentés comme des « formes matérielles » (voici un triangle, voici un carré, etc.) et non par une définition conceptuelle. Et il n'y a évidemment pas moyen de faire autrement ! On est en plein « stade opératoire concret », et la familiarisation avec ces objets passe par des manipulations physiques (découpages, puzzles ...) et des activités de dessin.

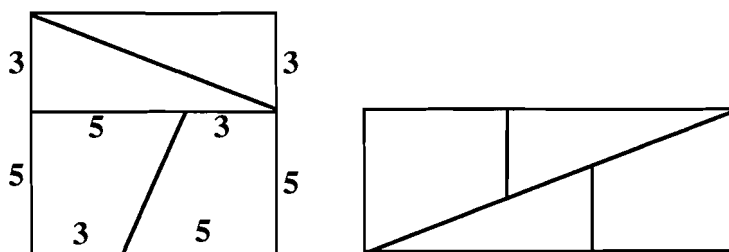
Par exemple le découpage d'un carré comme indiqué ci-contre est une source d'activités très riches puisqu'il permet de reconstituer six autres « figures géométriques ».

Mais se pose alors de façon cruciale la question de la validation : comment être certain que l'on a, par exemple, « fabriqué » un trapèze isocèle ?



Des « règles du jeu » sont indispensables à propos des angles et des longueurs pour que, lorsqu'on « recolle les morceaux », on soit sûr qu'il n'y ait pas de « trou ».

La question « à partir de quel moment, de quelles normes, un dessin, une figure peuvent-ils être considérés comme 'justes' ou 'faux' ? » doit donc être soulevée ... car on a des « contre-exemples ». En voici un bien connu :



qui conduit à l'aberration $64 = 65$ si l'on ne réalise pas qu'il y a un « trou » dans la diagonale du rectangle.

La question : « la mesure fait-elle partie des mathématiques ? » nous conduit à faire une distinction entre *l'action de mesurer* (le mesurage) et *le résultat* de cette action qui serait à proprement parler la mesure, ainsi qu'entre mesure effectuée (par mesurage) et mesure calculée. Le mesurage est une activité concrète effectuée sur des objets matériels à l'aide d'instruments tout aussi matériels, et c'est donc à ce niveau que se pose le problème de l'imprécision — et donc de la fiabilité — des résultats de mesure obtenus, résultats qui, logiquement, devraient donc s'exprimer par un « intervalle de confiance ».

Lorsque, au Collège aussi bien qu'à l'École, on découpe un morceau de carton aux dimensions indiquées ou que l'on partage une longueur en deux moitiés, on *fait comme si* les résultats de ces manipulations étaient parfaits, ce qui permet de valider des coïncidences. Mais fait-on prendre conscience du fait que c'est précisément ce « faire comme si » qui est la source et le garant de notre confiance dans la validation qui suivra ?

Plus largement, c'est la question « quel rapport à la géométrie veut-on (peut-on ?) instaurer au Collège ? » qui se pose ... avec un certain nombre de corollaires : Qui prend en charge les questions de mesure ? Il semble que le mesurage soit du domaine de la physique et que la détermination de mesures par le calcul soit de celui des mathématiques. Est-il possible de prendre ces deux aspects en compte ? Dans le « micro-espace » de la feuille de papier sur laquelle on travaille, tout semble évidemment mesurable. Pourrait-on introduire des situations-problèmes où interviendrait un mesurage inaccessible ? Mais inaccessible en quel sens ? La mesure (exacte) de la diagonale d'un carré de côté 1 dm semble un nombre inaccessible à des élèves de 3^e ! Et l'on retombe fatalement sur le problème du statut du nombre, de la représentation d'un nombre sur une droite graduée, de la « nature » d'un point d'une droite ... et l'on se heurte inmanquablement, d'une façon ou d'une autre, au problème de l'infini ... et à celui de la démonstration en géométrie, par exemple à propos de l'existence d'un triangle dont les côtés mesurent 7, 5 et 12. Dans le même ordre d'idée, mentionnons l'activité que l'on peut mener à propos du format A4. Ces problèmes marquent bien la rupture nécessaire entre le monde physique de l'« à peu près » ou de l'indiscernable et celui de la cohérence interne des mathématiques : un « alignement physique » n'est pas un alignement de points géométriques ...

Un certain nombre de documents que j'utilise au début de l'année en classe de 4^e ont pour but d'essayer de faire réfléchir à la nature des objets géométriques et de faire la distinction d'une part entre objet et représentation de cet objet, d'autre part entre objet physique et « objet idéal ». Si tous les élèves sont vite d'accord pour convenir qu'une image d'un objet *n'est pas* cet objet (cf. le tableau de Magritte « Ceci n'est pas une pipe »), en revanche certains maintiennent encore, après cette réflexion, que l'image d'un cercle *est* le cercle ! La primauté de la perception et la prégnance du « dessin géométrique » ne se remettent pas facilement en cause, et il ne faut pas s'en étonner !

La mesure exacte : utopie géométrique ou nécessité numérique ?

• En 6^e et 5^e, les activités de mesurage sont monnaie courante puisqu'il faut « faire du concret ». Mais on est censé faire des Mathématiques, pas de la Physique : le problème de la précision des mesures est donc purement et simplement évacué ; on s'arrange pour que les situations proposées éludent la question et on fait comme si la mesure était exacte, sans savoir ce que cela veut dire, sous-entend et implique. Bien entendu, cet implicite, ce « non dit », est générateur de confusions dont les effets néfastes resurgissent violemment en 4^e lorsqu'on commence à essayer de pratiquer la géométrie avec une certaine rigueur (cf. le fameux « *on voit sur la figure* »). L'utilisation, comme données aussi bien que comme résultats, de mesures comportant, au pire, un chiffre après la virgule, ne fait que renforcer ce malaise. D'où l'intérêt de jouer sur cette *variable didactique*. En voici deux exemples :

- 1) a) Représenter ci-dessous un segment [E C] tel que $EC = 10,7$ cm.

Les élèves s'exécutent sans problème.

b) Représenter ci-dessous un segment [K L] tel que $KL = 13,216$ cm

Réaction de nombreux élèves : « *C'est impossible !* »

2) a) Ci-dessous est représenté un segment [S T] tel que $ST = 13,6$ cm :

S _____ T

Pas de commentaire, encore moins de protestation.

b) Ci-dessous est représenté un segment [A B] tel que $AB = 12,4978$ cm :

A _____ B

Réaction de plusieurs élèves : ils prennent leur double décimètre, mesurent et protestent : « *Non, le segment fait douze centimètres et demi !* »...

Alors questions :

Qu'est-ce qu'un segment ?

Que signifie « représenter » ?

La représentation d'un segment est-elle ce segment ?

Que mesure-t-on avec un double décimètre, un segment ou une représentation d'un segment ?

Effectuer une mesure avec un double décimètre, est-ce faire des Mathématiques ?

- En 5^e le nombre π est introduit pour la mesure de la circonférence d'un cercle et la question « *π , ça fait combien ?* » est inévitable.

- En 4^e, l'arrivée du théorème de Pythagore repose le problème historique de $\sqrt{2}$. L'interrogation récurrente « *$\sqrt{2}$ ça fait combien ?* » est l'exemple typique de la question mal posée à laquelle il est impossible de répondre d'emblée puisqu'il faut d'abord la reformuler en : « quel est le nombre qui donne la mesure de la diagonale d'un carré dont les côtés ont pour mesure 1 ? », problème qui, pour être résoluble, suppose que : **1)** tout segment soit mesurable, **2)** la mesure soit exacte, c'est-à-dire s'exprime par UN nombre unique. Car on ne peut pas se poser la question de la « nature » de $\sqrt{2}$ si l'on n'a pas accepté la nécessité de son « existence ». Et l'on ne peut accepter, pour le désigner, ce nouveau graphisme incommode et dérangeant que si l'on a compris qu'il n'y a pas moyen de faire autrement, parce que le nombre positif qui a pour carré 2 n'est, hélas, égal à aucun nombre rationnel. (Notons au passage que la compréhension du concept d'égalité, en rupture totale avec toute idée de précision ou d'approximation, est un autre préalable tout aussi indispensable.)

Nous voyons donc ici trois problèmes.

I) Le statut des « objets géométriques » et de leurs représentations matérielles.

II) La question de la mesure « abstraite » d'« objets abstraits », en liaison ou plutôt en rupture avec la mesure physique d'objets matériels.

III) Le lien concret–abstrait, on pourrait dire le lien Physique – Mathématique, plus précisément la relation « monde matériel » – « modèle conceptuel ».

Et un danger constant : l'amalgame implicite des domaines.

L'objet géométrique est un objet idéalisé, quasiment onirique, idéal, conceptuel, et qui résulte non seulement d'un « passage à la limite » (trait de plus en plus fin, alignement de plus en plus précis, etc.), mais encore d'un saut dans l'imaginaire qui consacre définitivement la rupture avec le « monde réel » (ligne d'épaisseur nulle, ligne « droite », etc.) et qui fait de cet objet idéal un objet idéal, parfait. Conceptuellement épuré pour ne conserver que le minimum de propriétés garantissant son caractère opératoire, cet objet géométrique va alors pouvoir servir de modèle abstrait, théorique, à des objets matériels.

C'est dans l'adéquation du modèle (idéal, donc idéal) au problème concret que se pose la question de la précision.

Pour savoir combien il me faut de moquette pour le salon, je mesure (physiquement) le plancher du dit salon et je choisis à partir de là le modèle géométrique qui me semble le plus adéquat (rectangle, trapèze, ...), je prends par précaution une « marge d'erreur » et je fais fonctionner le modèle pour calculer (rigoureusement) une aire théorique qui couvrira mes besoins réels.

C'est bien parce qu'un segment est un objet idéal et non matériel qu'on ne mesure pas un segment avec un double décimètre. Et c'est bien pour cette même raison que sa mesure pourra être admise comme parfaite (« la perfection n'est pas de ce monde »). Ce qu'on peut mesurer avec un double décimètre c'est, forcément et toujours, un objet tout aussi matériel que ce double décimètre !

En fait, le problème du *mesurage* d'un segment (ou d'un angle) ne se pose jamais : ou bien sa mesure est donnée, connue ; ou bien sa mesure peut se déduire d'autres mesures déjà connues en utilisant des propriétés *ad hoc*.

Si l'on travaille sur des représentations, il faut que soit au préalable posé et partagé un système de normes qui fixe sous quelles conditions on pourra considérer une représentation comme fiable, fidèle. Par exemple on demandera la précision du millimètre pour les longueurs mesurables avec un triple décimètre, du degré pour les angles mesurables au rapporteur. Et l'on s'accordera pour reconnaître l'autorité d'un « expert » (en principe le professeur ...) pour apprécier si ces normes sont respectées. Et il est essentiel de comprendre qu'il n'y a pas de différence de nature entre mesurer le plancher du salon et mesurer un dessin de quadrilatère sur son cahier : dans les deux cas on ne fait pas de Mathématique !

L'acceptation de la nécessité de la démonstration géométrique passe obligatoirement par la reconnaissance du caractère abstrait, de l'essence idéale des objets géométriques et par le découplage entre objets conceptuels et représentations matérielles.

Le doute ne doit donc pas être permis : il n'y a pas de *mesure exacte* d'un objet matériel : on pourrait même dire que la question ne se pose pas : elle est hors sujet ... Elle est même vide de sens : on ne peut pas mesurer la longueur d'une tige de fer avec une précision inférieure à la dimension d'un atome de fer ! Le langage utilisé n'est pas monosémique et entraîne des dérapages sémantiques : lorsqu'on demande, par exemple : « découper dans du carton un carré de 8 cm de côté », ou « dessiner un carré de 8 cm de côté » on fait deux glissements du domaine conceptuel au domaine matériel : 1) ce n'est pas le carré que l'on découpe ou dessine, mais une image de carré, et 2) cet objet physique n'aura évidemment pas *exactement* 8 cm de côté *mais on fera comme si c'était le cas parce qu'il en est ainsi pour le modèle qu'il représente et que c'est précisément sur ce modèle que l'on veut travailler.*

Ce n'est certes pas « couper les cheveux en quatre » que d'insister sur ces distinctions. Car la question qui se pose au collègue est : de quoi parle-t-on lorsqu'on fait une démonstration ? L'objectif est-il de travailler sur des objets matériels ou sur des informations ? L'initiation à la déduction peut-elle se faire sans que soit clarifié le niveau auquel elle se situe : celui des idées et de leur cohérence ? D'où la nécessité, à notre avis, de réfléchir sur des notions aussi élémentaires que celles de point et de droite pour pouvoir comprendre à quel jeu on va jouer : l'observation de « deux traits rectilignes qui se croisent » ne permettra jamais de savoir combien ils ont de points communs !

Pour les élèves, un objet physique est avant tout une « chose manipulable » et c'est peut-être pour cela que la « figure géométrique » a beaucoup de mal à être assimilée à un objet matériel : elle n'est pas considérée comme un dessin d'un « objet imaginaire ». D'ailleurs la « figure géométrique » peut être considérée comme une sorte d'objet intermédiaire, représentant générique d'une classe d'objets géométriques.

Pour tenter de ... faire approcher la notion de *mesure exacte*, j'utilise depuis cinq ans en 4^e les fiches « Question de mesure » ci-après. *Il va de soi que l'utilisation de ces fiches suppose réalisé tout le travail de « mise en place » du statut des objets géométriques précédemment mentionné.*

Toutes ces activités prennent du temps, bien évidemment. Mais il faut savoir ce que l'on cherche à obtenir : un montage de mécanismes procéduraux qui seront forcément fragiles, ou bien une familiarisation avec certaines *méthodes de réflexion*. Pour notre part, après tout ce travail, nous avons pu constater qu'il devient exceptionnel qu'un élève de 4^e prenne son double décimètre pour faire une démonstration et lorsque cela se produit, il suffit la plupart de temps de lui montrer la reproduction du tableau de Magritte « La trahison des images » qui est affichée dans la classe et de lui rappeler que l'on fait des mathématiques.

Une dernière remarque à propos de validation : s'il est clair qu'une « vérification matérielle » ne peut qu'amener à proposer une conjecture, en revanche il est parfaitement recevable qu'une non-vérification puisse servir de contre exemple, à condition que soit connue la « fourchette de confiance » que l'on peut accorder à la manipulation d'une représentation du modèle : si mon intervalle de mesure m'assure que $12,3 < m < 12,8$ et si une démonstration me conduit à $m = 14$, alors je peux être quasiment certain que j'ai commis une erreur dans ma démonstration. C'est un résultat qui n'est pas à négliger !

Fiches élèves

Questions de mesure

1. Introduction

Dans les « Sciences exactes » (Physique, Chimie, Biologie, etc) on mesure certaines *caractéristiques d'objets matériels* en utilisant des *instruments de mesure* (qui sont d'autres objets matériels). Par exemple on peut mesurer une masse avec une balance, une température avec un thermomètre, etc.

En Mathématique, la situation est tout autre : en effet, les « *objets mathématiques* » étant abstraits, imaginaires, il n'est pas possible de les « *mesurer* » au sens habituel, concret de ce mot ! La question de la mesure doit donc être posée autrement : puisque les « *objets* » à mesurer sont imaginaires, abstraits, alors les « *procédés de mesure* » doivent l'être aussi.

Nous allons essayer de comprendre cette distinction.

2. Activité : un peu de Physique

2.A Mesurons un trait rectiligne

Voici un objet matériel :



C'est un « trait rectiligne », fabriqué avec de l'encre. Il a une *longueur* et une *épaisseur*.

1°) Mesure de sa longueur

Prends une règle graduée et mesure sa longueur.

Ecris le résultat de ta mesure en prenant pour unité le millimètre :

Peux-tu être *absolument certain* que tu as trouvé la « vraie » mesure, la mesure « exacte » ? Pourquoi ?

A ton avis, entre quelles valeurs voisines peux-tu être certain que se trouve la « mesure exacte » ? Entre mm et mm.

Quel est l'écart entre les deux nombres ci-dessus ?

Cet écart est l'*imprécision* de la mesure.

Si on désigne par « w » la mesure exacte de cet objet on a : $\leq w \leq$

On obtient un *encadrement* à près.

..... s'appelle la *valeur approchée par défaut*.

..... s'appelle la *valeur approchée par excès*.

2°) Mesure de son épaisseur

Essaye maintenant de mesurer, avec ton double décimètre, l'épaisseur « e » du trait rectiligne de la page précédente et d'en trouver un encadrement. $\leq e \leq$

Est-ce facile ? Pourquoi ?

Penses-tu que l'on puisse mesurer l'épaisseur d'un cheveu avec un double décimètre ? Pourquoi ?

Penses-tu que l'on puisse mesurer la distance de la Terre à la Lune avec un triple décimètre ? Pourquoi ?

Conclusion :

2.B Mesurons les côtés d'un dessin de quadrilatère

1°) Première étape

Voici un autre objet matériel :



On appelle k_1 , k_2 , L_1 , L_2 la « valeur exacte » de la mesure de chaque côté. Effectue la mesure avec ton triple décimètre, puis écris un encadrement de la « valeur exacte » en prenant comme unité le millimètre :

$$\begin{array}{ll} \leq L_1 \leq & \leq L_2 \leq \\ \leq k_1 \leq & \leq k_2 \leq \end{array}$$

Pour chaque dimension tu as obtenu un *encadrement* à près.

Les *valeurs approchées par défaut* sont :

pour L_1 : ; pour L_2 : ; pour k_1 : ; pour k_2 :

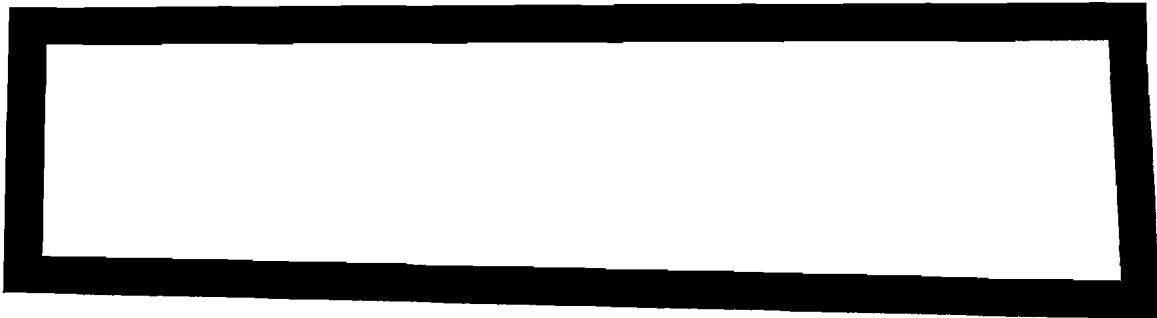
Les *valeurs approchées par excès* sont :

pour L_1 : ; pour L_2 : ; pour k_1 : ; pour k_2 :

2°) Deuxième étape

Dans l'espoir d'améliorer la précision des mesures, on fait un agrandissement de l'objet précédent. On a choisi un coefficient d'agrandissement de 10, *ce qui a pour effet de multiplier chaque dimension par 10*.

Voici le résultat de cet agrandissement :



Mesure chaque côté puis, en reprenant les noms que tu as donnés aux «valeurs exactes», écris les encadrements pour l'agrandissement :

$$\begin{array}{ll} \leq 10 \times L_1 \leq & \leq 10 \times L_2 \leq \\ \leq 10 \times k_1 \leq & \leq 10 \times k_2 \leq \end{array}$$

Enfin, en divisant tous les nombres par 10, écris les nouveaux encadrements de l'objet original :

$$\begin{array}{ll} \leq L_1 \leq & \leq L_2 \leq \\ \leq k_1 \leq & \leq k_2 \leq \end{array}$$

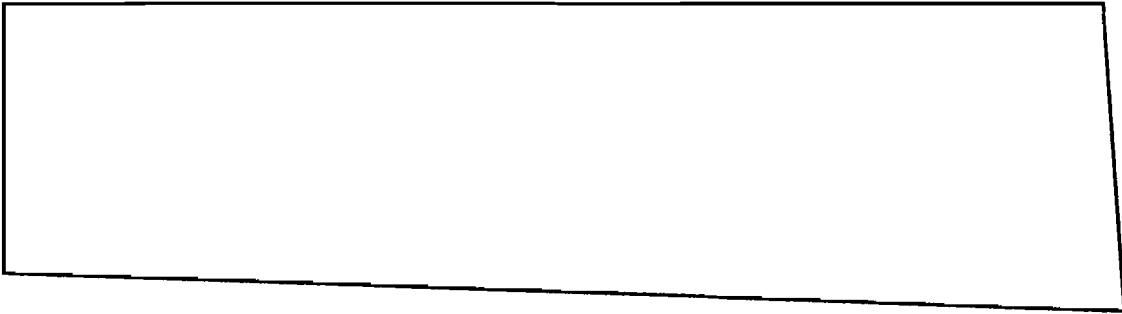
L'encadrement de L1 est à près. L'encadrement de L2 est àprès.

L'encadrement de k1 est à près. L'encadrement de k2 est à près.

Faire un agrandissement a-t-il permis d'améliorer la précision des mesures ? Pourquoi ?

3°) Troisième étape

ALORS, IMAGINONS L'IMPOSSIBLE : imaginons que l'on agrandisse le dessin sans augmenter l'épaisseur des traits, ce qui est, évidemment, matériellement impossible ! On obtiendrait alors ceci :



Mesure puis donne les quatre encadrements des côtés :

$$\leq 10 \times L1 \leq$$

$$\leq 10 \times L2 \leq$$

$$\leq 10 \times k1 \leq$$

$$\leq 10 \times k2 \leq$$

En divisant par 10 tous les nombres, écris les nouveaux encadrements des mesures de l'objet original :

$$\leq L1 \leq$$

$$\leq L2 \leq$$

$$\leq k1 \leq$$

$$\leq k2 \leq$$

Tu as obtenu des encadrements à près. La précision est-elle meilleure ? Pourquoi ?

4°) Quatrième étape :

Imagine que l'on agrandisse encore 10 fois le dernier dessin, toujours sans augmenter l'épaisseur des traits, et que les mesures donnent les résultats suivants :

$$1453 \leq 100 \times L1 \leq 1454$$

$$324 \leq 100 \times k1 \leq 325$$

$$1477 \leq 100 \times L2 \leq 1478$$

$$368 \leq 100 \times k2 \leq 369$$

En divisant par 100 (10 fois 10) tous les nombres, donne les nouveaux encadrements :

$$\leq L1 \leq$$

$$\leq L2 \leq$$

$$\leq k1 \leq$$

$$\leq k2 \leq$$

Tu as obtenu des encadrements à près. Que penses-tu de la précision obtenue ?

5°) Imagine maintenant que l'on répète *indéfiniment* les agrandissements : que deviendrait l'écart des encadrements ?

3. Conclusions

1. Lorsqu'on effectue un mesurage d'un objet matériel avec un instrument, on ne fait pas de Mathématique !

2. Toute mesure physique d'un objet matériel est *imprécise* et ne peut s'exprimer que par un *encadrement entre deux valeurs*.

3. En Mathématique, *on imagine* que l'on peut atteindre une précision absolue, car les « *objets mathématiques* » sont imaginaires et on peut donc les imaginer parfaits. On peut alors aussi concevoir une mesure parfaite, une « *mesure exacte* » s'exprimant donc par *un nombre unique* et non plus par un encadrement.