LES VECTEURS A L'ISSUE DE LA SECONDE

UNE ANALYSE DES MANUELS

ET DE QUELQUES DIFFICULTES D'ELEVES

Marilena BITTAR[1]
Laboratoire Leibniz, Grenoble
Université Federal de Mato Grosso do Sul (Brésil)

Résumé. Dans cet article nous discutons de la présentation des *vecteurs* dans les *manuels* du secondaire, et plus particulièrement de la *classe de Seconde*, des *difficultés* que cette présentation peut engendrer chez les *élèves* et de quelques difficultés effectivement rencontrées par eux.

Nous présentons d'abord des résultats d'une analyse du savoir à enseigner sur les vecteurs dans les manuels de Quatrième, Troisième et Seconde. Puis nous donnons des résultats d'une expérimentation menée auprès des élèves visant à identifier des difficultés dans l'utilisation des vecteurs pour résoudre un problème de géométrie.

1. Les vecteurs dans les manuels

Dans les dernières années les vecteurs étaient introduits en classe de Quatrième par des notions géométriques (direction – sens - longueur). Un nouveau programme est mis en place pour la rentrée 1998-99. La translation est alors définie en Quatrième indépendamment des vecteurs et elle est liée au parallélogramme. En classe de Troisième,

---

[1] Résultats d'une recherche menée au sein de l'équipe EIAH, laboratoire Leibniz, Grenoble et appuyée par le CNPq (Conselho Nacional de Pesquisa). L'auteur est enseignante à l'Université « Federal de Mato Grosso do Sul », Brasil.

le lien entre les translations et les vecteurs est fait par l'intermédiaire du parallélogramme. Le contenu de Troisième concernant les vecteurs est : vecteurs et translation, écriture vectorielle, coordonnées d'un vecteur dans le plan muni d'un repère, composition de deux translations, somme de deux vecteurs. La différence entre le contenu vu au collège avant l'année 1997-98 et celui qui rentre en vigueur l'année 1998-99 est que la notation $\vec{u}$ doit être présentée dès le début du cours sur les vecteurs. Autrement dit, on parlera de représentant d'un vecteur dès la classe de Troisième, tandis qu'avant cette notion n'apparaissait qu'en classe de Seconde. De plus il est explicitement dit qu'on fera remarquer aux élèves l'indépendance des coordonnées d'un vecteur par rapport au représentant choisi. Du point de vue de l'utilisation des vecteurs pour résoudre des problèmes de géométrie, il n'y a pas de changements importants. La recherche dont nous rendons compte ici, a été menée entre les années 1994 et 1998. Ainsi les programmes sur les lesquels nous parlons dans la suite sont ceux en vigueur pendant cette période.

Nous présentons quelques points principaux autour des premières notions vectorielles vues dans le secondaire, à savoir, la définition d'un vecteur, l'égalité vectorielle, l'addition vectorielle, le produit par un nombre, les exercices résolus ainsi que les exercices proposés. Concernant les exercices nous centrerons attention sur ceux proposés au niveau de la classe de Seconde, mettant en évidence les propriétés à utilisées pour les résoudre.

Parmi les manuels les plus répandus dans l'enseignement, nous avons choisi pour la Quatrième et la Troisième les collections Terracher (1989), IREM de Strasbourg (1993) et Pythagore (1993). Pour la classe de Seconde nous avons pris la collection Terracher (1994) et la collection Dimathème (1990).

1.1. La classe de Quatrième

a) Définition d'un vecteur

Selon le texte du programme de Quatrième[2], « Les vecteurs sont introduits 'naïvement' par direction, sens et longueur. A toute translation on associe son vecteur. Si, dans une translation, A' est l'image de A et B' celle de B, on écrit : $\overrightarrow{AA'} = \overrightarrow{BB'}$. » Ainsi les définitions données par les auteurs des manuels suivent ces instructions et diffèrent quelque peu entre elles, comme nous le voyons ci-dessous :

« Deux points A et A' définissent un vecteur $\overrightarrow{AA'}$. » (IREM de Strasbourg, 4ème, 1992)

« La donnée d'une direction de droites, d'un sens sur cette direction et d'une longueur définit un vecteur. » (Terracher, 4ème, 1992)

« Deux points A et A' pris dans cet ordre, représentent un vecteur qu'on note $\overrightarrow{AA'}$. » (Pythagore, 4ème, 1992)

Mis à part le manuel Terracher, les deux autres manuels prennent les notions de direction et de sens comme allant de soi pour les élèves. Ces notions doivent alors prendre le sens qui leur est attribué dans le langage courant, ce qui peut provoquer des

[2] Programme de Quatrième, 1994, réimprèssion 1997.

confusions chez les élèves car dans une situation de la vie courante les mots « direction » et « sens » sont utilisés ayant même signification.[3] De plus, cette façon d'introduire la notion de vecteur ne permet pas à l'élève d'approcher l'idée du vecteur comme représentant d'une classe d'équivalence. En effet, l'élève est confronté à une égalité entre un nombre fini d'éléments (2 ou 3 vecteurs égaux sur une configuration donnée) tandis que l'idée de représentant d'une classe fait appel à un nombre infini d'éléments égaux. Certes, les auteurs des manuels ne font que respecter les instructions du programme mais il est important, du moins pour les enseignants, d'avoir conscience de la distance entre ce vecteur géométrique et celui élément d'un espace vectoriel. Ceci doit avoir des conséquences lorsque les élèves ont à faire le passage entre le géométrique et le vectoriel[4].

b) Egalité vectorielle

L'égalité vectorielle est présentée dans les manuels essentiellement par l'intermédiaire du parallélogramme : « ABCD est un parallélogramme si et seulement si $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$. » Cette présentation rend plus difficile le passage à une classe d'équivalence. En effet, le parallélogramme ne permet d'envisager que l'égalité de deux représentants, et non l'ensemble des représentants. Ainsi il n'y a pas de vue globale de la classe d'équivalence avec le parallélogramme.

c) Les exercices en Quatrième

Au niveau de la classe de Quatrième, nous pouvons classer deux types de situations pour lesquelles on entraîne les élèves à utiliser les vecteurs :
• *Egalité vectorielle* : il faut identifier des vecteurs égaux, sur des configurations données, par la reconnaissance de parallélogrammes. Les exercices demandant de construire des vecteurs égaux sont en moins grand nombre, de plus ils n'exigent pas de construction en utilisant la règle et le compas.
• *Transformations* : on demande la construction d'une image par la translation de vecteur donné. Le vecteur est utilisé dans la définition de la translation et dans la résolution même en utilisant les propriétés géométriques du vecteur (direction-sens-longueur).

Des différences significatives sont rencontrées dans le manuels concernant le nombre d'exercices proposés où l'objet d'étude est la notion de vecteur. En effet, le manuel Terracher (1989) propose 18 exercices sur les vecteurs contre 4 proposés par Pythagore (1993) et un seul proposé par l'IREM de Strasbourg (1993).

Au niveau de la résolution des exercices, il s'agit essentiellement de faire des allers-retours entre les propriétés géométriques d'une configuration et les notations vectorielles associées, comme par exemple « ABCD est un parallélogramme si et seulement si $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$. »

---

[3] Lors d'une expérimentation en classe de Seconde, nous avons mis en évidence des difficultés des élèves á faire la distinction entre direction et sens d'un vecteur. Au lecteur intéressé nous renvoyons à Bittar (1998)

[4] Dans Bittar (1998) nous avons mis en évidence des difficultés d'élèves concernant ce passage.

1.2. La classe de Troisième

En classe de Troisième sont introduits l'addition vectorielle et les coordonnées d'un vecteur. Relativement au dernier point, aucun des trois manuels analysés ne montre que les coordonnées d'un vecteur, contrairement à celles d'un point, ne dépendent pas de sa position dans le plan. Dans Terracher, la remarque suivante est faite sur la façon de calculer les coordonnées d'un vecteur sur du papier quadrillé : « En partant de 'l'origine' du vecteur, on compte les carreaux horizontalement, puis verticalement ». Cette remarque vise à fournir une technique pour calculer les coordonnées d'un vecteur qui sert aussi à représenter un vecteur connaissant ses coordonnées. De plus elle pourrait aussi servir à illustrer le fait que les coordonnées d'un vecteur ne dépendent pas de sa position dans le plan. En effet, en déplaçant le vecteur selon une translation, la quantité de carreaux horizontaux et verticaux ne change pas ! Il semble exister ici une différence par rapport au programme de 98/99, où il est explicité qu'on fera remarquer aux élèves la différence entre les coordonnées d'un vecteur et celles d'un point.

Pour l'addition vectorielle on utilise soit la règle du parallélogramme soit la relation de Chasles. Cette dernière constitue l'élément clé pour la résolution des exercices, tant pour ceux proposés en classe de Troisième comme pour ceux de la classe de Seconde, comme nous le verrons par la suite.

Les exercices

En classe de Troisième les auteurs des manuels présentent les vecteurs comme un outil supplémentaire pour la résolution des problèmes de géométrie, mais il s'agit plutôt d'un outil au niveau de l'écriture de la résolution et non au niveau de la résolution elle-même. Donnons comme exemple l'exercice résolu proposé dans le manuel IREM de Strasbourg[5], énoncé sous le titre « Une autre démonstration du théorème des milieux ».

Tracer un triangle ABC et marquer les points I et J milieux respectifs des côtés AB et AC. Construire le point E symétrique du point I par rapport à J.
Quelle est la nature du quadrilatère AICE ?
Ecrire deux vecteurs égaux à $\overrightarrow{AI}$. En déduire la nature du quadrilatère IECB.
Retrouver la conclusion du théorème des milieux.

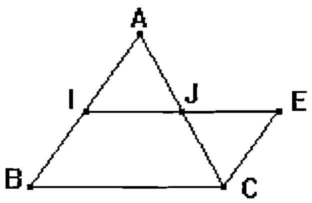


Figure 1

Résolution proposée par les auteurs du manuel :

AICE parallélogramme ? $\overrightarrow{AI} = \overrightarrow{EC}$ *et I milieu de AB* ! $\overrightarrow{AI} = \overrightarrow{IB}$*?*

Par la transitivité de l'égalité vectorielle on a $\overrightarrow{EC} = \overrightarrow{IB}$, *alors IECB est un*

[5] Exercice H, p. 28.

parallélogramme et $\overrightarrow{IE} = \overrightarrow{BC}$. *Ce qui donne (IE)//(BC).*
Comme E est le symétrique de I par rapport à J, on conclut que $\overrightarrow{IJ} = \overrightarrow{JE}$.
Alors on a IJ=JE ce qui signifie que IJ=1/2IE=1/2BC.
De (i) et (ii) nous concluons que (IJ)//(BC) et IJ=1/2BC.

L'exercice tel qu'il a été énoncé rend cette résolution facilement accessible aux élèves car ils sont guidés dans les pas à suivre pour aboutir à une solution.

Si nous comparons cette solution à une solution géométrique, nous pouvons conclure que les deux résolutions font appel aux mêmes propriétés géométriques, la différence se situant au niveau de l'écriture : une écriture vectorielle contracte plus d'informations qu'une écriture géométrique. Cet exercice sert donc comme exemple pour illustrer le type d'exercices proposés aux élèves dans le but de les familiariser avec le nouvel outil.

Si d'un côté l'usage du vecteur en tant qu'outil de résolution des problèmes de géométrie est artificiel, d'un autre côté les exercices concernant cet usage permettent l'entraînement, les mises en oeuvre des procédés, et demandent un type bien défini de compétences. Les exercices portent sur l'addition vectorielle et les coordonnées d'un vecteur. Nous pouvons distinguer quatre types de tâches :

• *Identifier sur une configuration donnée une addition vectorielle* : il faut identifier par exemple que sur le parallélogramme ABCD, on a $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AC}$.
• *Construire des points qui obéissent à une relation vectorielle.* Par exemple, un parallélogramme ABCD est donné, il faut construire un point M tel que $\overrightarrow{DM} = \overrightarrow{AC}$;
• *Simplifier une expression vectorielle en utilisant la relation de Chasles*, (exercice qui peut être purement algébrique) ;
• *Calculer les coordonnées d'un vecteur à partir de ses extrémités.*

1.3. La classe de Seconde

En classe de Seconde on introduit la notation $\vec{u}$ et le produit par un nombre réel. La notation $\vec{u}$ est introduite comme une façon plus commode de représenter l'égalité entre vecteurs, mais la notation bipoints continue d'être utilisée. Le changement important par rapport au collège arrive avec la nouvelle opération, produit par un nombre, qui permet la définition de colinéarité. D'après le programme « La *mise en oeuvre des vecteurs sur les configurations et les transformations* joue un rôle essentiel, aussi bien pour la compréhension de la notion de vecteurs que pour résolution de problèmes de géométrie. » (Programme Seconde, 1996). Le calcul vectoriel y figure comme constituant un nouvel outil pour résoudre des problèmes concernant les configurations, alignement, concours, parallélisme... Ce rôle d'outil des vecteurs est aussi mis explicitement en évidence dans les manuels comme on le voit dans l'extrait du manuel Terracher transcrit ci-dessous :

« Dégager le rôle d'outil joué par le calcul vectoriel dans la résolution de problèmes de géométrie. Cela nous amènera à traduire par des relations vectorielles des propriétés telles que : alignement, parallélisme, milieu, centre de gravité, ... » (Terracher 1994, p.278)

Pour vanter l'efficacité du calcul vectoriel les auteurs du manuel reprennent le théorème des milieux, un théorème connu des élèves avec une 'peau' géométrique :

« Théorème 2 (Théorème des milieux)

Soit ABC un triangle, I et J les milieux respectifs de [AB] et [AC], alors $\overrightarrow{BC} = 2\overrightarrow{IJ}$.

En effet, $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB} = 2(\overrightarrow{AJ} - \overrightarrow{AI}) = 2\overrightarrow{IJ}$.

Simple et élégant, tel peut être le calcul vectoriel. » (Terracher 1994, p. 286)

L'intention des auteurs, qui est d'inculquer aux élèves l'idée que le vecteur constitue un outil efficace et économique, est tout à fait explicite dans cet exemple. Seulement il n'existe pas d'explication sur le procédé qui permet l'écriture des relations vectorielles et leurs transformations (mise en œuvre de propriétés vectorielles et de traduction par les vecteurs de propriétés géométriques). La solution est présentée ici d'une façon presque miraculeuse. Mais elle apporte une économie du moins au niveau de l'écriture : trois lignes suffisent pour en finir, tandis que la solution présentée dans le manuel de Troisième, plus haut, ne représente aucune économie même pas au niveau de l'écriture. L'objectif en classe de Seconde est de montrer l'économie apportée par les vecteurs et en Troisième est de faire pratiquer les définitions d'un vecteur et de l'égalité vectorielle. L'opération produit par un scalaire, introduite en Seconde, semble donc apporter une économie lorsqu'on doit résoudre un problème de géométrie.

Une analyse des exercices résolus et proposés se fait alors essentielle pour en extraire les propriétés à mettre en oeuvre pour leurs résolutions ainsi que la « méthode » attendue par les auteurs à être utilisée par les élèves pour aboutir à une solution.

Les exercices[6]

Pour mieux comprendre le type de démarche proposée dans les manuels, voyons l'exemple d'un exercice déjà connu des élèves dans des chapitres antérieurs aux vecteurs. Ce même exercice peut être rencontré dans plusieurs manuels et il semble être un exemple fiable pour montrer l'efficacité de l'outil « vecteur » pour résoudre un problème de géométrie (du point de vue des auteurs des manuels). Voici son énoncé et la résolution fournie dans le manuel :

[6] Pour la classe de Seconde nous avons analysés les manuels Dimathème (1990) et Terracher (1994). Dans cet article nous présentons seulement quelques résultats obtenues à partir de l'analyse du manuel Terracher relativement au chapitre sur les vecteurs. Pour une analyse détaillée des manuels nous renvoyons à Bittar (1998).

Exercice résolu 1 *Un problème d'alignement*[1]

Soit un parallélogramme ABCD, I le milieu de $[AB]$ *et E le point du segment* $[ID]$ *tel que* $IE = \frac{1}{3} ID$.

Établir que les points A, E et C sont alignés et préciser la position de E sur $[AC]$.

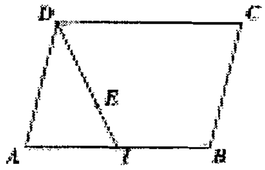


Fig. 20

1. Recherche

■ Nous voulons A, E et C alignés. Vectoriellement, cela revient à établir que $\overrightarrow{AE}$ et $\overrightarrow{AC}$ *sont colinéaires*. Il s'agit donc « d'épingler » une *relation entre* $\overrightarrow{AE}$ *et* $\overrightarrow{AC}$.

■ Nous savons que $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD}$ (puisque $ABCD$ est un parallélogramme). Nous pouvons exprimer $\overrightarrow{AB}$ en fonction de $\overrightarrow{AI}$ (I milieu de $[AB]$) et $\overrightarrow{AD}$ en fonction de $\overrightarrow{AI}$ et $\overrightarrow{ID}$ (relation de Chasles). Ainsi nous sommes sûrs de pouvoir exprimer $\overrightarrow{AC}$ en fonction de $\overrightarrow{AI}$ et $\overrightarrow{ID}$.

D'où la question : « *En est-il de même pour* $\overrightarrow{AE}$ *?* »

Toujours d'après Chasles, $\overrightarrow{AE} = \overrightarrow{AI} + \overrightarrow{IE}$ et nous pouvons exprimer $\overrightarrow{IE}$ en fonction de $\overrightarrow{ID}$ (d'après l'énoncé).

D'où la réponse : nous pouvons *aussi* exprimer $\overrightarrow{AE}$ **en fonction de** $\overrightarrow{AI}$ et $\overrightarrow{ID}$.

■ Les deux expressions (de $\overrightarrow{AC}$ et $\overrightarrow{AE}$) en fonction de $\overrightarrow{AI}$ et $\overrightarrow{ID}$ vont permettre sûrement d'*obtenir une relation entre* $\overrightarrow{AC}$ *et* $\overrightarrow{AE}$...

2. Une solution rédigée

■ Nous avons $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD}$ ($ABCD$ est un parallélogramme).

Or $\overrightarrow{AB} = 2\overrightarrow{AI}$ (I est le milieu de $[AB]$) et $\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AI} + \overrightarrow{ID}$ (Chasles).

Ainsi $\overrightarrow{AC} = 2\overrightarrow{AI} + (\overrightarrow{AI} + \overrightarrow{ID})$, soit $\overrightarrow{AC} = 3\overrightarrow{AI} + \overrightarrow{ID}$ (1).

■ D'autre part, $\overrightarrow{AE} = \overrightarrow{AI} + \overrightarrow{IE}$ (Chasles) et $\overrightarrow{IE} = \frac{1}{3}\overrightarrow{ID}$ (par hypothèse).

Donc $\overrightarrow{AE} = \overrightarrow{AI} + \frac{1}{3}\overrightarrow{ID}$ (2).

■ Les relations (1) et (2) rendent visible que $\overrightarrow{AC} = 3\overrightarrow{AE}$, ce qui prouve **l'alignement** de A, E et C et précise la position de E : E **est le point de** $[AC]$ **tel que** $AC = 3AE$.

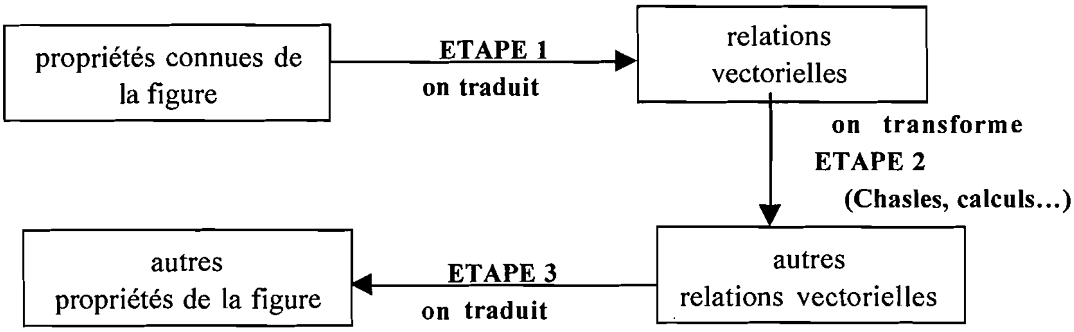
Notons que la résolution proposée ne représente pas une « méthode » permettant à l'élève d'aboutir à une solution. L'idée qu'on peut toujours décomposer un vecteur dans une base ou dans deux vecteurs non-colinéaires est absente, elle ne fait pas partie des objets à enseigner. En effet, les auteurs affirment qu'on est sûr de pouvoir exprimer

$\overrightarrow{AC}$ en fonction de $\overrightarrow{AI}$ *et* $\overrightarrow{ID}$ par des relations sur le parallélogramme et la propriété du milieu d'un segment et non parce que ces deux vecteurs sont non-colinéaires et par conséquent $\overrightarrow{AC}$ peut être écrit comme une combinaison linéaire des vecteurs $\overrightarrow{AI}$ *et* $\overrightarrow{ID}$. Ceci est encore plus frappant quand les auteurs posent la question de savoir si de la même manière on peut exprimer $\overrightarrow{AE}$ en fonction de ces mêmes deux vecteurs. Il faut alors utiliser la relation de Chasles, puis remplacer une donnée du problème dans la relation ainsi obtenue pour finalement pouvoir répondre affirmativement à la question posée.

Ainsi cet exemple de l'utilisation des vecteurs ne fournit pas une méthode de résolution pour ce type d'exercice. En fait la seule méthode apparemment mise à disposition des élèves est le point méthode proposé dans Terracher 1994 (p. 293), transcrite ci-dessous in extenso :

1. La démarche générale

Pour étudier les propriétés d'une figure géométrique à l'aide des vecteurs, on procède en général en trois étapes, selon le schéma suivant :



2. Les étapes de « traduction »

Les *théorèmes « passerelles » entre les figures et les vecteurs* constituent le bagage indispensable (*cf.* la planche VECTEURS, page 373, pour un tableau récapitulatif des résultats essentiels), sans oublier *« un brin de technique... »* (cf. Cours, p. 285 et T.P.A).

3. L'étape de transformation des relations vectorielles

C'est la partie la plus délicate à conduire... ne le cachons pas, avec l'assistance technique des *règles de calcul* et de la *relation de Chasles* (somme toute, quelque chose de simple).

Justement, il ne faut pas se laisser abuser par cette apparente simplicité.

Pour éviter de passer quelques veillées studieuses à « tournes en rond » dans les calculs (« en veux-tu, en voilà », avec pour maigre consolations de devenir un virtuose de la relation de Chasles !), il convient de *ne pas perdre de vue* :

• **ce que l'on sait :** les relations vectorielles dont on dispose au départ ;

• **ce que l'on veut**, d'où les interrogations légitimes, les voyages à tâtons et les petits pas : « Quelle propriété dois-je prouver ? Comment la traduire par une relation entre vecteurs ? Je saurais faire si j'avais... »

cette démarche d'**analyses** et de **recherche** est mise en évidence dans les deux exercices précédents : rubriques « Recherche ».

L'étape 1 consiste à pratiquer un changement de registre, entre le registre graphique (et/ou géométrique) et le registre vectoriel. Une fois la traduction faite, on est dans la géométrie vectorielle et on vise à montrer une relation vectorielle. Il s'agit alors de travailler à l'intérieur du cadre de la géométrie vectorielle : l'étape 2. Puis on interprète la relation vectorielle obtenue en termes de propriétés sur la figure, c'est l'étape 3.

La démarche générale de ce manuel propose donc un changement de registres (Duval, 1986 et 1993), du registre symbolique géométrique au registre symbolique vectoriel. Ce changement de registre est accompagné d'un changement de cadres (Douady, 1986), du cadre géométrique (propriétés d'une figure) au cadre géométrique vectoriel (relations vectorielles). Seulement ces changements ne semblent pas représenter une méthode sûre de résolution, comme nous le montrerons plus loin.

Passons maintenant à l'analyse des exercices proposés dans le manuel Terracher (1994).

Registres de représentation sémiotique et fonction des vecteurs dans la résolution des exercices

Cherchant à identifier les différents registres et propriétés à mettre en oeuvre par les élèves, nous avons analysé 73 exercices proposés dans le chapitre sur les vecteurs du manuel Terracher (1994). Cette analyse est faite à partir des résolutions fournies dans le livre du maître, ce qui correspond donc aux attentes des auteurs du manuel.

Relativement aux *registres de représentation sémiotique* présents dans l'énoncé de llexercice et dans la résolution proposée, nous avons pu distinguer les quatre catégories suivantes :
(i) du registre vectoriel vers le registre vectoriel (46 exercices sur 73) ;
(ii) du registre vectoriel vers le registre « non-vectoriel » (15 sur 73) ;
(iii) du registre « non-vectoriel » vers le registre vectoriel (9 sur 73) ;
(iv) du registre non-vectoriel vers le registre “ non-vectoriel ” (3 sur 73).

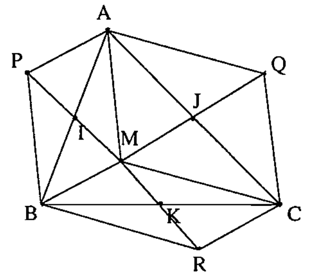
Les exercices des catégories (i) et (ii), ont pour objectif de faire pratiquer les notions vues dans le cours pour les rendre mobilisable. La différence entre ces deux catégories est que pour (ii) on se base sur des propriétés données vectoriellement mais au moment de rédiger la solution on utilise des propriétés géométriques sans nécessité d'utilisation des notations vectorielles. Dans ces deux catégories nous avons rencontré 5 exercices pour lesquels nos pouvons dire que les vecteurs représentent un outil[7] de résolution. Les 9 exercices des la catégorie (iii) ont été classés comme « outil non-nécessaire ». En effet, il s'agit d'utiliser les vecteurs pour résoudre un problème de géométrie mais les vecteurs ne constituent pas le seul outil possible de résolution. Ces 9 exercices font passer du cadre de la géométrie synthétique au cadre de la géométrie vectorielle. Pour mieux comprendre nos remarques, donnons d'abord un exemple d'un exercice pour lequel l'usage des vecteurs est peu ou pas économique, puis un exercice pour lequel cet usage n'est pas « obligatoire » mais fournit une résolution du moins

[7] Nous disons qu'un concept est outil dès qu'il est utilisé pour résoudre un problème, même s'il n'est pas le seul outil possible de résolution.

économique.

Exemple 1. Exercice 62, p. 298 (Terracher 1994)

Un triangle ABC, I, J et K les milieux des côtés, un point M quelconque et se symétriques P, Q et R par rapport à I, J et K : telles sont les données de l'exercice. Il s'agit alors de montrer que les segments [AR], [BQ] et [PC] ont le même milieu.
Suggestion des auteurs : Étudier les quadrilatères mis en évidence dans la figure.

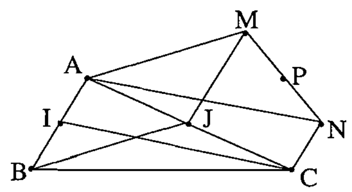


Les auteurs du manuel proposent de montrer que les quadrilatères APBM, MBRC et AMCQ sont des parallélogrammes (les diagonales se coupent en leur milieu), et d'écrire ensuite des égalités vectorielles obtenues à partir des propriétés de chaque parallélogramme. Par la propriété de transitivité on aboutit à une réponse.

On voit ici que l'usage du langage vectoriel représente plutôt un artifice didactique, destiné à faire pratiquer les définitions et les propriétés vectorielles. En effet, une solution peut être rédigée utilisant les mêmes propriétés (avec des notations géométriques) sans faire appel à des écritures vectorielles. Cet exercice a été proposé à des élèves de Première scientifique et aucun élève a utilisé les vecteurs confirmant ainsi l'hypothèse que l'usage des vecteurs semble ici artificiel, lié à des contraintes du contrat.

Exemple 2. Exercice 70, Parallélisme, p. 298 (Terracher 1994)

Dans la figure ci-après, I et J sont les milieux de [AB] et [AC], ABJM et CIAN sont des parallélogrammes et enfin P est le milieu de [MN].
Le problème consiste à établir que (AP) et (BC) sont parallèles.



Les propriétés à utiliser dans la résolution vectorielle sont la règle du demi-parallélogramme (lorsque I est le milieu de [AB], on a pour tout point M du plan : $\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}=2\overrightarrow{MI}$) et la relation de Chasles. La difficulté de cette résolution réside justement dans l'utilisation de la première propriété, qui n'est guère travaillée dans la partie cours des manuels. Elle est énoncée mais n'a qu'une place secondaire au moment où il faut caractériser vectoriellement le milieu d'un segment : ceci rend peu probable son utilisation par l'élève. Ainsi on peut douter que cette propriété soit disponible chez l'élève, mais une fois qu'il pense à l'utiliser, la résolution semble plus économique qu'une résolution géométrique. En effet, une résolution géométrique, disponible à ce niveau, consiste à faire intervenir un point K milieu du segment [MJ], à utiliser le théorème des milieux dans le triangle MJN ; puis à conclure en utilisant la transitivité des propriétés géométriques des parallélogrammes existants sur la configuration. La difficulté de cette résolution réside dans le fait que l'élève doit penser à poser un point qui n'appartient pas à la figure de départ et à visualiser des « sous-figure ».

Cette démarche propose ainsi un changement de cadres, de la géométrie synthétique à la géométrie vectorielle. De plus ce changement rend la solution économique. Voici donc un exemple d'un exercice où les vecteurs ne constituent pas le seul outil de résolution possible mais représentent un outil économique et efficace.

Les propriétés à mettre en oeuvre ...

L'analyse des réponses fournies dans le livre du maître aux 73 exercices montre que les outils de résolution mis en oeuvre sont : égalité vectorielle par direction, sens et longueur et par le parallélogramme ; relation de Chasles première et deuxième forme ; caractérisation vectorielle du milieu d'un segment ; propriété du demi-parallélogramme ; théorème des milieux ; colinéarité ; et finalement les propriétés géométriques du parallélogramme ou encore de quelques configurations particulières telles que le rectangle ou le triangle.

1.4. En guise de conclusion

Faisons a présent un résumé de l'analyse des manuels centrant l'attention d'abord sur les types des *traductions* qui peuvent être attendues des élèves en fin de Seconde, puis sur les *types de problèmes* pour lesquels on attend qu'ils utilisent les vecteurs.

Relativement aux traductions des propriétés géométriques en propriétés vectorielles, notre analyse nous permet de faire le classement suivant[8]:

	propriétés géométriques	**traduction en langage vectoriel**
1	ABCD parallélogramme	$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$
2	I milieu de [AB]	$\overrightarrow{AI} = \overrightarrow{IB}$ ou $\overrightarrow{AI} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB}$
3	ABCD parallélogramme	$\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AC}$ $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}$ (Chasles)
4	(AB)//(CD) et AB = kCD	$\overrightarrow{AB} = k\overrightarrow{CD}$ (proportionnalité)
5	A, B, C alignés	$\overrightarrow{AB} = k\overrightarrow{AC}$
6	G centre de gravité de ABC	$\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} = \vec{0}$
7	t (C)= D	$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$
8	(AB)//(CD)	$\overrightarrow{AB} = k\overrightarrow{CD}$ (vecteurs colinéaires)
9	(AB) $\perp$ (CD)	vecteurs orthogonaux
10	A └ (CD)	$\overrightarrow{AC} = k\overrightarrow{AD}$

Les traductions (8) et (9) sont travaillées surtout avec la géométrie analytique, donnant lieu ainsi au passage par le registre géométrique-numérique.

Nous avons montré qu'en classe de Quatrième et Troisième les vecteurs ne constituent pas vraiment un outil de résolution de problèmes de géométrie ; il s'agit d'introduire une nouvelle notion et de faire une approche des propriétés. En classe de

[8] L'ordre de ce classement n'est pas celui d'apparition dans les cours ; nous avons classé par ordre d'importante accordé pour les manuels à chaque traduction. Pour cela nous avons analysé la partie cours des manuels et aussi la partie exercices (résolus ou proposés).

Seconde ce type d'exercices réapparaît mais cette fois il y a aussi de véritables problèmes à résoudre avec les vecteurs. Ces derniers représentent alors un outil de résolution de problèmes de géométrie, mais il faut remarquer qu'ils ne sont pas nécessaires (ou essentiels). Nous n'avons pas rencontré des exercices pour lesquels les vecteurs soient un outil indispensable sans qu'ils fassent partie de l'énoncé. En revanche, en un petit nombre nous avons rencontré des exercices dans lesquels l'utilisation des vecteurs représente une certaine économie au niveau de leur résolution, comme l'exemple donné ci-dessus.

Types de problèmes

Ci-dessous une liste de types de problèmes rencontrés dans tous les chapitres des manuels qui traitent les vecteurs.

Types de problèmes	**4ième**	**3ième**	**2nde**
1) montrer l'égalité vectorielle	X	X	X
2) effectuer ou identifier la translation de figures	X	X	X
3) calculer les coordonnées de AB à partir de celles des points A et B		X	
4) calculer les coordonnées du milieu de AB		X	
5) effectuer ou identifier l'addition vectorielle (règle du parallélogramme et rel. Chasles)		X	X
6) construire des points définis par des égalités vectorielles		X	X
7) montrer l'alignement des points			X
8) identifier ou calculer le milieu d'un segment			X
9) montrer le parallélisme de droites			X
10) montrer l'orthogonalité de droites			X
11) transformations (translation et homothétie-effet sur des figures)			X

Ces problèmes peuvent être groupés en trois grandes classes : alignement de points, direction de droites et transformations. Pour ce type de problèmes, les vecteurs sont présentés dans les manuels comme un outil efficace de résolution. Pourtant, notre analyse des exercices proposés a permis de mettre en évidence le nombre infime d'exercices pour lesquels les vecteurs fonctionnent de façon efficace. De plus il s'agit d'exercices dont la résolution exige d'utiliser deux résultats qui n'ont pas été assez travaillé dans la partie cours : il s'agit de l'addition vectorielle dans le demi-parallélogramme et de la possibilité de pouvoir toujours écrire un vecteur du plan comme combinaison linéaire de deux vecteurs du plan non colinéaires. Il reste donc à savoir si les élèves sauront y faire appel et bien utiliser ces résultats.

Ainsi après avoir fait l'analyse des manuels, l'une des questions sur lesquelles nous nous sommes penchées était celle de savoir si ce nouvel outil est utilisé à bons escient par les élèves. Dans la suite nous donnons quelques résultats obtenus auprès des élèves qui nous permettront de donner des esquisses de réponses à cette question.

2. Quelques difficultés d'élèves

Nous avons mis en place un dispositif expérimental visant à étudier la disponibilité et l'efficacité de l'outil vectoriel chez les élèves après la classe de Seconde. Nous disons que l'outil est *disponible* chez l'élève s'il pense à l'utiliser dans un énoncé neutre, qui ne fait pas appel explicitement à l'outil en question. L'outil est *efficace* chez l'élève s'il l'utilise à bon escient, c'est-à-dire si cet usage le conduit à la réussite. L'analyse de ce dispositif doit contribuer à modélisation des difficultés d'élèves lorsqu'ils ont a utiliser les vecteurs.

Dans cet article nous présentons une partie des résultats obtenus. L'exercice suivant a été proposé à 33 élèves de Première S[9] :

> Soit un parallélogramme ABCD, I le milieu de (AB) et E un point situé sur le segment (ID) de telle façon que la distance du point I au point E soit égale au tiers de la distance du point I au point D. Montrer que le point E appartient au segment (AC) et que la distance de A à E est égale au tiers de la distance de A à C.

Le choix de l'exercice est dû, d'une part au fait qu'il apparaît dans plusieurs manuels comme un exercice résolu et d'autre part qu'il comporte une solution vectorielle mais aussi une solution géométrique déjà connue des élèves. Comme nous voulons vérifier si l'outil vectoriel est disponible et efficace chez les élèves pour des problèmes standards, cet exercice satisfait nos exigences.

Il s'agit de l'exercice résolu du manuel Terracher (1994) dont nous avons parlé plus haut. Seulement l'énoncé a été modifié pour éviter des automatismes crées par l'enseignement. En effet, si la question posée évoque auprès des élèves l'alignement, alors cela les conduit très probablement à l'usage des vecteurs. L'utilisation des vecteurs ici peut être vue comme un effet du contrat : « problème d'alignement je traduis par les vecteurs et j'utilise la colinéarité. » Il reste alors à savoir si les élèves transforment des problèmes d'appartenance d'un point à une droite en un problème d'alignement. De même nous avons diminué la proximité d'écriture entre la notation de proportionnalité des distances et celle de colinéarité vectorielle.

Les résultats obtenus

Sur les copies de 17 élèves (sur 33) nous avons rencontrés des notations vectorielles ; parmi ces 17 seulement 13 ont pu faire quelques transformations d'écritures vectorielles. Nous avons alors étudié de plus près les copies de ces 13 élèves. Trois d'entre eux ont réussi l'exercice, trois autres ont fait des petites fautes et les 7 restants n'ont pas fait de fautes et pourtant n'ont pas aboutit à une solution.

Ci-après un schéma des résultats obtenus :

---

[9] Nous remercions les élèves du Lycée Pierre du Terrail qui ont accepté de participer à cette expérience, ainsi que leur enseignante Mme Lagoriot. L'expérimentation complète est donnée dans (Bittar 98). Le lecteur intéressé y trouvera des analyses a priori des exercices proposés aux élèves ainsi que des résultats obtenus et des copies d'élèves.

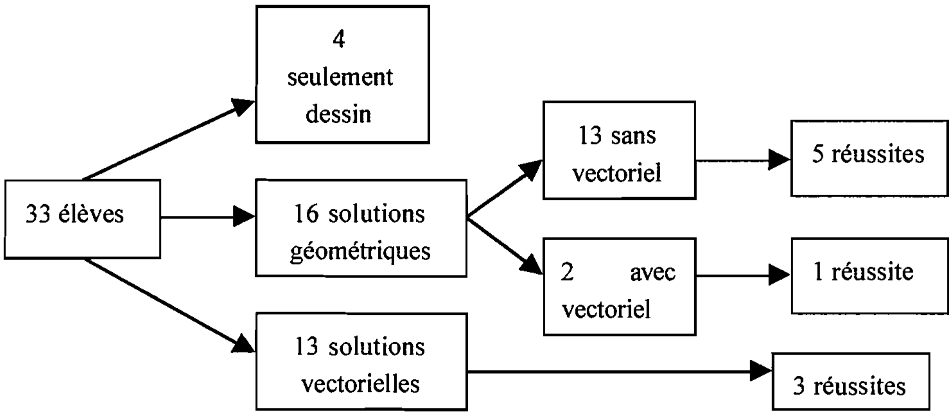
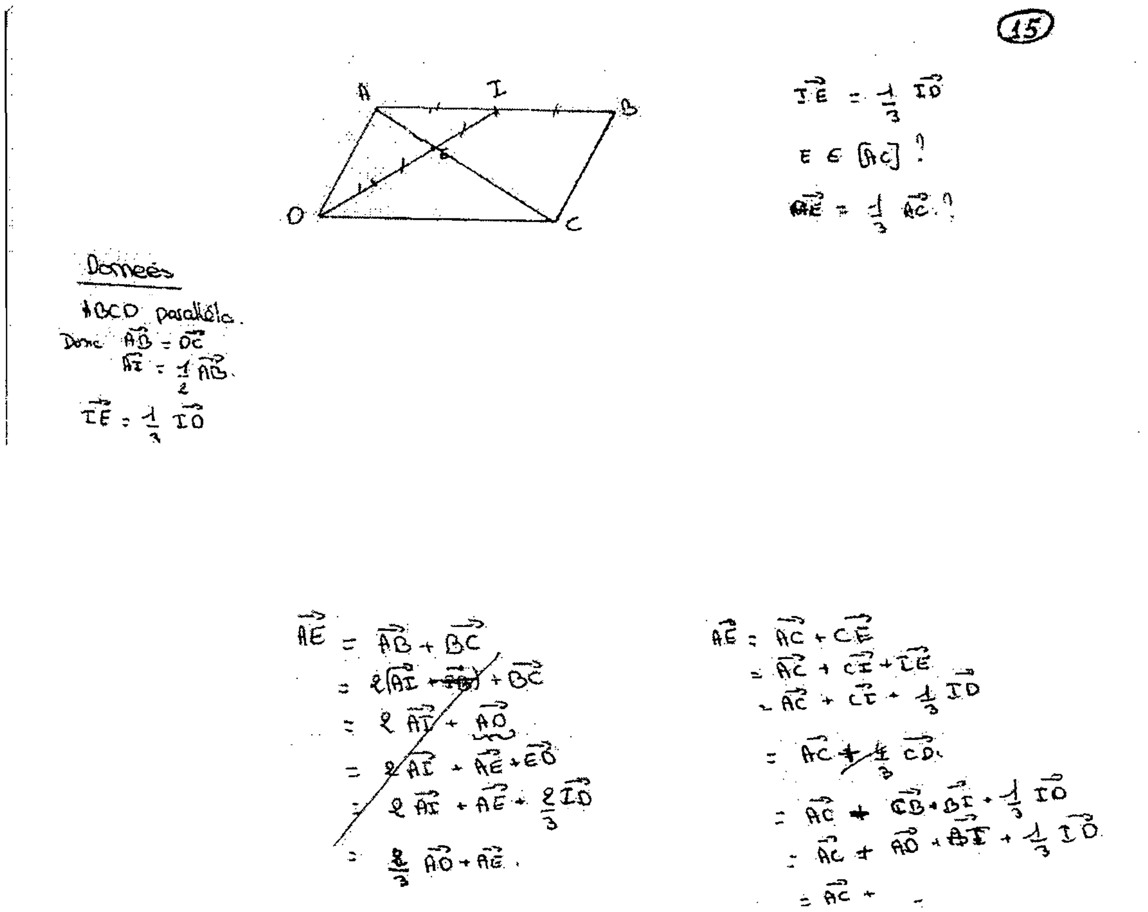


Schéma. Résultats obtenus

Les « échecs » dans l'usage de l'outil vectoriel sont plutôt dus au fait que les élèves, apparemment, savent *où* ils doivent arriver (montrer la relation de colinéarité), ils ne savent pas *comment* le faire. Prenons comme exemple la copie de l'élève n° 15.



Nous pouvons constater que cet élève sait ce qu'il faut montrer, connaît la relation de Chasles, sait l'utiliser mais n'aboutit pas à une solution. Cet échec peut être du à une absence de la notion de décomposition dans une base, ce qui amène l'élève à faire plusieurs substitutions pour essayer d'arriver à la solution souhaitée. Seulement pour faire ces substitutions aucune règle ou méthode n'est fournie aux élèves : il tourne alors en rond et ne trouve pas la « bonne » substitution. Cette hypothèse est confirmée par l'analyse de la copie de l'élève 29, en annexe, qui a réussi l'exercice : pour aboutir à la relation recherchée il fait 6 substitutions, puis il abandonne. Cet élève semble ne pas douter de sa résolution (ou des outils à mettre en oeuvre pour résoudre l'exercice) : il recommence l'exercice depuis le début utilisant les mêmes outils, fait 17 substitutions et finalement réussit l'exercice.

Relativement à une solution géométrique, seulement un élève a réussi l'exercice en utilisant les médianes. Les fautes commises peuvent être classées comme « conceptuelles », comme par exemple utiliser dans la résolution ce qu'il faut montrer, l'alignement des points, ou encore utiliser une fausse propriété. Ceci est une différence importante par rapport à l'usage de l'outil vectoriel, où le élèves ne font pas de fautes ; les échecs sont plutôt dus à des manques de « savoir faire » avec les vecteurs.

En conclusion...

D'après l'analyse de l'enseignement actuel des vecteurs et tenant compte de l'objectif de notre observation, nous avons choisi cet exercice qui pose une question considérée comme pouvant provoquer chez les élèves un appel aux vecteurs (s'ils font le lien entre appartenance et alignement). En effet, il s'agit d'un exercice traité en classe de Seconde, utilisant soit des configurations soit des calculs vectorielles. Le problème d'alignement de trois points joue un rôle fondamental pour l'enseignement de vecteurs : les auteurs de manuels mettent l'accent sur l'utilisation des vecteurs pour résoudre ce type de problèmes. Seulement nous avons changé la question d'alignement en une question d'appartenance pour diminuer la proximité excessive avec l'usage dans l'enseignement de la première question ; ainsi si l'élève interprète le problème d'appartenance comme un problème d'alignement, le passage aux vecteurs peut se faire facilement. En plus, cet exercice demande l'utilisation d'une proportionnalité de distances qui renvoie (ou devrait renvoyer) à l'utilisation de vecteurs à partir du moment où l'élève écrit la relation de distance. Et pourtant le résultat obtenu pour cet exercice, montre que la moitié de la classe n'a pas pensé aux vecteurs, même si les élèves étaient en face d'un problème considéré par nous comme étant un problème de passage « raisonnablement » facile aux vecteurs ; contrairement à ce qui s'est passé lors de la pré-observation au lycée Pablo Neruda où 19 élèves (sur 25) ont pensé aux vecteurs.

Le premier problème proposé aux élèves nous semble donc, montrer que l'outil vectoriel n'est *disponible* que pour 13 élèves (sur 33), pour le type de problème posé.

Du point de vue de *l'efficacité,* les résultats semblent montrer que les élèves ont des difficultés à utiliser les vecteurs pour résoudre un problème. Pour analyser l'efficacité de l'outil vectoriel nous regardons, parmi les élèves qui ont utilisé le registre vectoriel, la proportion de ceux qui ont réussi (au moins à aborder le problème), les erreurs commises et les « impasses », c'est-à-dire les élèves qui s'arrêtent sans explication apparente.

Le taux de réussite dans le vectoriel est de 3 élèves. Et en ce qui concerne les erreurs commises, nous voyons que les erreurs de type vectoriel (3 sur 17 élèves) sont beaucoup moins importantes que celles de type géométrique (7 sur 9 élèves). Les erreurs commises dans le géométrique sont de type « conceptuel » : il s'agit par exemple de l'utilisation de propriétés erronées.

Dans le vectoriel, les élèves commencent à résoudre l'exercice et n'arrivent pas à s'en sortir. Cela peut être dû au fait que d'une manière générale, ils ont une méthode à suivre - qui consiste à utiliser la relation de Chasles pour montrer que les vecteurs sont colinéaires - mais que cette méthode n'est pas perçue comme permettant de les amener de manière sûre vers une réussite. Ceci relève selon nous d'un manque de maîtrise de la notion qui est à la base de la relation de Chasles. En effet, les élèves ne disposent pas de méthode de décomposition par rapport à deux vecteurs donnés ; alors que si l'on sait qu'il faut arriver à décomposer les vecteurs dans une base fixe, le risque de tourner en rond est réduit.

D'après les résultats obtenus, l'outil vectoriel paraît tout de même plus opérationnel que le géométrique, car, pour bien utiliser le géométrique, il faut vérifier à chaque fois des conditions géométriques, comme par exemple vérifier si les conditions pour utiliser le théorème de Thalès sont satisfaites avant de l'appliquer. La plupart des élèves ont utilisé comme hypothèse une condition qui en fait, était à démontrer (l'appartenance du point E au segment AC). La configuration dans ce cas a induit certains élèves à utiliser le résultat comme point de départ : en analysant la configuration, Thalès « saute aux yeux » ! La solution géométrique étant rendue difficile de par la présence du dessin, le recours au vectoriel permettrait d'éviter cette source de difficulté.

3. Conclusion

L'analyse des résultats obtenus nous permet de conclure que l'outil vectoriel s'est montré *disponible* pour 13 élèves (sur 33). Du point de vue de l'*efficacité*, les résultats montrent que les élèves ont des difficultés à utiliser cet outil pour résoudre un problème. Ces difficultés semblent être liées au manque de méthode permettant l'aboutissement à une solution.

Le point fort en faveur de l'utilisation des vecteurs dans le secondaire vient de l'analyse des erreurs commises dans l'usage des deux outils : géométrique et vectoriel. Le deuxième semble être tout de même plus opérationnel que le premier. Ce qui manque pour le rendre plus efficace semble être la notion de *décomposition dans une base*. En effet, relativement au vecteur outil de résolution d'un problème de géométrie, la seule méthode présentée aux élèves pour résoudre un problème consiste à faire des substitutions en utilisant la relation de Chasles et les propriétés vectorielles lues sur le dessin, mais ces substitutions apparaissent comme un tour de magie. Il s'agit pour les élèves presque d'un tirage au sort, où celui qui a choisi le « bon chemin » et de « bonnes » substitutions arrivera à la solution.

Pour compléter nos observations nous avons mené des interviews avec les élèves et nous avons pu confirmer que chez les élèves il s'agit de faire de substitutions et tomber « au hasard » à la solution souhaitée. Il y a eu des élèves que disaient « tourner en rond » avec l'usage de l'outil vecteurs pour résoudre l'exercice proposé.

On peut penser que certaines difficultés peuvent être surmontées par les élèves au cours des années du lycée, avec la maturité (par exemple). À ce propos une expérimentation réalisée en DEUG, première année nous a permis de montrer que certaines difficultés perdurent jusqu'en DEUG.

Dans cet article nous avons fixé l'attention sur les vecteurs en tant qu'outil de résolution d'un problème de géométrie. Dans notre travail de thèse nous avons aussi étudié des difficultés d'élèves relativement à la notion de vecteur en tant qu'objet d'étude[10]. Nous avons montré que l'utilisation d'un environnement informatique peut contribuer à la mise en évidence des différences entre des propriétés affines et vectorielles et par là, ouvrir une perspective de travail d'élaboration d'activités : la finalité de ces activités, qu'il reste à construire, seraient de favoriser l'apprentissage des spécificités entre caractéristiques géométriques et vectorielles.

Références bibliographiques

BITTAR M. (1998) : *Les vecteurs dans l'enseignement secondaire. Aspects outil et objet dans les manuels. Etude de difficultés d'élèves dans deux environnements : papier crayon et Cabri-géomètre II.* Thèse de doctorat de l'Université Joseph Fourier, Grenoble 1.

DOUADY R. (1986) : Jeux de cadres et dialectique outil-objet. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, vol. 7, n° 2, pp. 5-31.

DUVAL R. (1988) : Ecarts sémantiques et cohérence mathématique : introduction aux problèmes de congruence. *Annales de Didactiques et de Sciences Cognitives*, vol. 5, IREM de Strasbourg, pp. 7-25.

DUVAL R. (1994) : Registres de représentation sémiotique et Fonctionnement cognitif de la pensée. *Annales de Didactiques et de Sciences Cognitives*, vol. 5, IREM de Strasbourg, pp. 37-65.

VERGNAUD G. (1990) : La théorie des champs conceptuels, *Recherches en Didactique des Mathématiques*, vol. 10, n° 2.3, pp. 133-170.

[10] Dans le cadre de la théorie des Champs Conceptuels (Vergnaud 1990), nous nous sommes intéressée à l'étude des composantes outil et objet de l'enseignement des vecteurs.

Références des Manuels et Programmes utilisés

BONNEFOND G. et al, (1993) : Collection Pythagore, 4e et 3e, Ed. Hatier.

Collection dirigée par MOLLET-PETIT F. (1993) : Maths, 4e et 3e, IREM de Strasbourg, Istra.

NAKATANI N. et all., (1990) : Collection Dimathème, 2nd, Didier.

TERRACHER P. et all., (1989) : Math, 4e et 3e, Hachette Collèges.

TERRACHER P-H et FERACHOGLOU R., (1994) : Collection Terracher, 2nd, Hachette Education.

Programme de mathématiques de la classe de 4e, Brochure n° 755 00 412, B.O. n°25 du 30 juin 1988.

Programme de mathématiques de la classe de 3e, Brochure n° 755 00 412, B.O. n°12 du 23 mars 1989.

Programme de mathématiques de la classe de Seconde, 2e réimpréssion 1996.

Annexe 1

Lycée Pablo Neruda
Première S
Nom et Prénom :

LA CONSIGNE

« Ce travail fait partie d'une recherche et ne sera pas utilisé pour vous évaluer. Ne vous censurez donc pas.

Nous voudrions que vous écriviez tout ce que vous pensez même si cela ne donne pas la solution. N'utilisez pas de brouillon ! Vous pouvez tout écrire sans vous censurer et sans effacer ou gommer. Rayez ce qui vous pensez être faux mais de façon à ce que ce soit encore lisible.

Le travail doit être fait individuellement.

Vous ne devez utiliser que le matériel qui vous est fourni. Tout doit être rendu aux observateurs. »

1) Soit un parallélogramme ABCD, I le milieu de [AB] et E un point situé sur le segment [ID] de telle façon que la distance du point I au point E soit égale à de la distance du point I au point D.

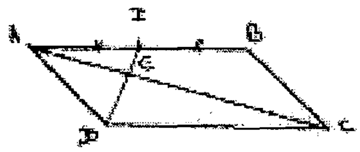
Montrer que le point E se trouve sur le segment défini par les points A et C et que la distance de A à E est égale à de la distance de A à C

2) Soit un triangle quelconque ABC. On note I, J et K les milieux des côtés [AB], [AC] et [BC] respectivement.

Soit par ailleurs, un point M quelconque, on note P, Q et R respectivement ses symétriques par rapport à I, J et K.

Montrer que les segments [AR] , [BQ] et [CP] ont le même milieu.

Annexe 2 : Copie de l'élève 29



29

$E \in [ID]$

$IE = \frac{ID}{3} \Rightarrow ID = 3IE$

$\overrightarrow{AI} = \overrightarrow{IB}$ $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$

$\overrightarrow{ID} = 3\overrightarrow{IE}$ $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$

$\overrightarrow{DI} = 3\overrightarrow{EI}$

Si E appartient à [AC], alors $\overrightarrow{AC} = k\,\overrightarrow{AE}$.

$$\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}$$
$$= \overrightarrow{AI} + \overrightarrow{IB} + \overrightarrow{BC}$$
$$= 2\overrightarrow{AI} + \overrightarrow{AD}$$
$$= \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DI} + \overrightarrow{AI} + \overrightarrow{AD}$$
$$= 2\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DE} + \overrightarrow{EI} + \overrightarrow{AI}$$
$$= \overrightarrow{AE} + \overrightarrow{EI} + \overrightarrow{IB} + \overrightarrow{BC}$$

Inutile

$$\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AE} + \overrightarrow{EC}$$
$$= \overrightarrow{AE} + \overrightarrow{EI} + \overrightarrow{IB} + \overrightarrow{BC}$$
$$= \overrightarrow{AE} + \overrightarrow{AI} + \frac{\overrightarrow{DI}}{3} + \overrightarrow{BC}$$
$$= \overrightarrow{AE} + \overrightarrow{AD} + \frac{\overrightarrow{DI}}{3} + \overrightarrow{AI}$$
$$= \overrightarrow{AE} + \frac{\overrightarrow{AI}}{3} + \frac{2\overrightarrow{AD}}{3} + \overrightarrow{AI}$$
$$= \overrightarrow{AE} + \frac{4}{3}\overrightarrow{AI} + \frac{2}{3}\overrightarrow{AD}$$
$$= \overrightarrow{AE} + \frac{4}{3}\overrightarrow{AD} + \frac{4}{3}\overrightarrow{DI} + \frac{2}{3}\overrightarrow{AD}$$
$$= 2\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AE} + \frac{4}{3}\overrightarrow{DE} + \frac{4}{3}\overrightarrow{EI}$$
$$= \overrightarrow{AE} + \frac{4}{3}\overrightarrow{AE} + \frac{2}{3}\overrightarrow{AD} + \frac{4}{3}\overrightarrow{EI}$$

$\overrightarrow{AD} + \frac{\overrightarrow{DI}}{3}$

$\frac{3\overrightarrow{AD}}{3} + \frac{\overrightarrow{DI}}{3}$

$= \frac{\overrightarrow{AI}}{3} + \frac{2\overrightarrow{AD}}{3}$

$$= \frac{7}{3}\overrightarrow{AE} + \frac{2}{3}\overrightarrow{AD} + \frac{4}{3}\frac{\overrightarrow{DI}}{3}$$
$$= \frac{7}{3}\overrightarrow{AE} + \frac{2}{3}\overrightarrow{AD} + \frac{4\overrightarrow{DI}}{9}$$
$$= \frac{7}{3}\overrightarrow{AE} + \frac{2}{3}\overrightarrow{AE} + \frac{2}{3}\overrightarrow{ED} + \frac{4\overrightarrow{DI}}{9}$$
$$= \frac{9}{3}\overrightarrow{AE} + \frac{2}{3}\overrightarrow{ED} + \frac{4}{9}\overrightarrow{DE} + \frac{4}{9}\overrightarrow{EI}$$
$$= \frac{9}{3}\overrightarrow{AE} + \frac{2}{9}\overrightarrow{ED} + \frac{4}{9}\overrightarrow{EI}$$

$\frac{2}{3}\overrightarrow{ED} + \frac{4}{3}\overrightarrow{EI}$

$= \frac{6}{9}\overrightarrow{ED} + \frac{4}{9}\overrightarrow{EI}$

$= \frac{2}{9}\overrightarrow{ED}$

$$= \frac{9}{3}\overrightarrow{AE} + \frac{2}{3}\overrightarrow{ED} + \frac{4}{9}\overrightarrow{EI}$$
$$= \frac{9}{3}\overrightarrow{AE} + \frac{4}{3}\overrightarrow{IE} + \frac{4}{3}\overrightarrow{EI}$$
$$= \frac{9}{3}\overrightarrow{AE}$$
$$\boxed{= 3\overrightarrow{AE}}$$