L'ENSEIGNEMENT DE LA GEOMETRIE A L'ECOLE PRIMAIRE

René BERTHELOT
Marie-Hélène SALIN
Laboratoire de Didactique des Sciences et Techeniques
Université Bordeaux I - IUFM d'Aquitaine

INTRODUCTION

Ce que la tradition appelle "enseignement de la géométrie" renvoie, à l'école primaire à deux champs de connaissances : d'une part celui des connaissances nécessaires à l'enfant pour contrôler ses rapports usuels à l'espace, champ désigné depuis une dizaine d'années par "structuration de l'espace", d'autre part celui de la géométrie proprement dite. Toutefois, la distinction entre ces deux champs n'est pas très claire, et l'enseignement de la géométrie à l'école primaire est l'objet de nombreuses questions de la part des enseignants. En voici quelques-unes :

Quels sont ses objectifs ? En quoi les activités géométriques concourent-elles, comme le disent les instructions "à la construction de l'espace chez l'enfant" ?

Quelles connaissances doit-on faire apprendre ? Faut-il des définitions ? Lesquelles ? Les différentes notions sont-elles liées ? Y a-t-il une progression à respecter ? Quelles sont les attentes des enseignants du secondaire et quels sont les besoins réels de leurs élèves ?

Les réponses à ces questions sont bien moins assurées que dans le domaine numérique. Personne ne conteste, par exemple qu'il soit utile de savoir effectuer une multiplication, donc de l'apprendre à l'école. C'est "naturel" depuis un siècle à peu près. Le retirer des programmes ne passerait pas inaperçu. Pour les connaissances géométriques, les convictions sont moins affirmées, et les enseignants n'ont pas de réponse claire à ces questions. Aussi se sentent-ils "autorisés" à prendre des libertés avec le programme, c'est-à-dire à en négliger cette partie (tout comme ceux du secondaire avec la géométrie dans l'espace).

Cet exposé, qui s'appuie sur les résultats de recherches en didactique menées dans le cadre d'une thèse sous la direction de G. Brousseau, a plusieurs objectifs :

* clarifier les rapports entre les deux champs évoqués : celui des connaissances spatiales et celui des connaissances géométriques,

* situer leur place respective dans les programmes d'enseignement, en attirant l'attention des lecteurs sur la faible place accordée au premier, et sur les conséquences de cet état de fait,

* proposer une analyse didactique de certaines des caractéristiques de l'enseignement de la géométrie.

Nous nous proposons, dans un deuxième article, d'exposer et de justifier les propositions d'action que nous avons été amenés à élaborer à la suite de ces analyses, en vue de contribuer à une amélioration de l'enseignement de l'espace et de la géométrie.

CONNAISSANCES SPATIALES ET CONNAISSANCES GEOMETRIQUES

La géométrie a à voir avec l'espace mais peut-on assimiler les connaissances spatiales, nécessaires à la maitrise des problèmes qui se posent à tout individu dans ses rapports avec l'espace, et celles qui relèvent du savoir mathématique appellé géométrie ?

LES DIFFÉRENCES

Leur genèse chez l'enfant

Une première différence est relative à la **genèse** de ces connaissances pour l'enfant.

Chaque enfant dispose de connaissances spatiales avant même que l'on se propose de lui apprendre des connaissances de géométrie.

La géométrie, elle, doit être enseignée pour exister, comme tout savoir mathématique.

Les types de problèmes

Le problème du vitrier

Quelles connaissances sont-elles nécessaires à un vitrier pour reproduire un quadrilatère de forme parallélogramme afin de découper une vitre adaptée à la fenêtre d'un de ses clients[1] ? Il est certain que s'il s'agit pour lui d'une action familière, ce ne sera pas un problème et il mettra en oeuvre la procédure qu'il connaît bien. S'il n'est familier que des fenêtres de forme rectangulaire, il doutera et ne saura quelles mesures prendre avec les outils dont il dispose. Son problème est de prendre les informations qui lui garantissent que la vitre qu'il va découper aura bien la forme voulue. Ce qui lui manque est **la maîtrise du caractère déformable ou non des figures** dont on connaît les longueurs des côtés. Dans le cas rapporté, c'est bien ce qu'a manifesté la décision qu'a prise le vitrier : il a fait, avant la coupe du verre, un cadre en bois correspondant aux mesures saisies puis il l'a comparé à la fenêtre, et ajusté à sa forme.

---

[1] Cet exemple n'est pas fictif, nous avons pu observer un vitrier confronté à ce problème.

Dans le cadre de la géométrie, la formulation d'un problème correspondant au problème du vitrier serait par exemple : "Trouver un ensemble de propriétés caractéristiques du parallélogramme". La solution de ce problème appelle une validation d'ordre mathématique. Si le vitrier dispose de connaissances géométriques, il pourra prévoir que la connaissance des longueurs des côtés et d'une diagonale (informations auxquelles ses instruments lui donnent un accès facile) suffit à déterminer une figure superposable à la figure mesurée.

Mais il ne trouvera pas cette propriété dans un cours de géométrie, car pour la géométrie elle n'a pas particulièrement d'intérêt. Les **propriétés intéressantes** pour la géométrie et pour l'espace ne sont pas toujours les mêmes et les exemples ne manquent pas : l'incommensurabilité du côté du carré à sa diagonale, tout comme la droite d'Euler ou le cercle des neuf points, ne répondent à aucun intérêt spatial.

Considérons une propriété géométrique dont l'utilité spatiale est avérée, la relation de Pythagore par exemple ; le premier problème de géométrie en est la démonstration, qui n'a aucune utilité spatiale. A l'inverse, l'intérêt du théorème de Pythagore pour l'enseignement mathématique n'est pas seulement fondé sur son utilité spatiale (qui est grande[2]), mais aussi sur la variété de démonstrations que l'on peut en fournir ou qu'il permet de faire.

Problème spatial, problème de géométrie

De manière générale, nous devons distinguer deux types de problèmes.

Les problèmes spatiaux, ainsi caractérisés :
- leur finalité concerne l'espace sensible
- ils peuvent porter sur la réalisation :
* d'actions : fabriquer, se déplacer, déplacer, dessiner,etc..
* de communications à propos d'actions ou de constats. Le langage et les représentations spatiales permettent de communiquer des informations qui se substituent à la perception.
- la réussite ou l'échec sont déterminés par le sujet par comparaison entre le résultat attendu et le résultat obtenu.

Les problèmes de géométrie, au sens où ce mot est employé en mathématiques :
Résoudre un problème de géométrie est une activité qui concerne le caractère nécessaire et non contradictoire de certaines propriétés des objets de la géométrie[3].

Les situations de géométrie mettent en interaction un sujet "mathématicien" avec un milieu qui n'est plus l'espace physique et ses objets mais un espace conceptualisé que les "figures-dessins" tracées par ce sujet ne font que représenter. La validité de ses déclarations n'est plus établie empiriquement mais s'appuie sur des raisonnements qui obéissent aux règles du débat mathématique. La fonction des dessins est, comme le dit

---

2 Les "équerres" basées sur le triangle (3, 4, 5), utilisées dans le bâtiment, étaient connues dès l'antiquité.

3 Il ne s'agit pas des "objets géométriques" au sens matériel. La rotation, par exemple, est un objet de la géométrie.

Poincaré, de provoquer la mise en relation de propositions que l'on sait associer à tel ou tel tracé ou portion de dessin, mais le constat de ces propriétés sur la "figure-dessin" ne permet pas de valider la proposition mise à l'étude. C'est ce que les élèves de collège ont tant de mal à comprendre.

Le vocabulaire

Il comporte bien des mots communs. La signification en est-elle la même ? Rien n'est moins sûr :

Dans la vie courante ou professionnelle (hors mathématiques), personne ne qualifiera de rectangulaire un objet de forme carrée : ce serait considéré comme une erreur, parce que cela serait interprété comme voulant signifier une différence de longueur entre les côtés consécutifs.

En géométrie par contre, qualifier un carré de rectangle constitue une manifestation d'une connaissance particulière qui fait l'objet d'un enseignement.

L'organisation des connaissances

Bien évidemment, l'ensemble de ces différences ne peut que déterminer une organisation différente des concepts communs.

Les connaissances de la géométrie sont identifiées et organisées de manière bien connue par la théorie mathématique. Cette structuration a changé au cours de l'histoire.

L'étendue et la structure des connaissances spatiales spontanées ou culturelles sont par contre moins bien connues, parce qu'utilisées pour résoudre des situations particulières correspondant à des champs professionnels distincts.

LES RAPPORTS

Malgré ces différences, connaissances géométriques et connaissances spatiales sont très fortement liées.

L'étude historique montre que la géométrie euclidienne est issue, pour une large part, de la résolution de problèmes spatiaux. Deux grands thèmes ont, en particulier, mobilisé la réflexion des hommes[4] : les mesures spatiales et la représentation plane des situations spatiales. Les grecs, pour des raisons culturelles que nous ne pouvons développer ici[5], ont été les inventeurs de la "géométrie mathématique". Celle-ci s'est développée de plus en plus, jusqu'à une géométrie coupée de ses origines spatiales. Il n'en reste pas moins que la géométrie demeure "la science des situations spatiales"[4] et que la maîtrise de l'espace, c'est à dire la possibilité d'un contrôle efficace par le sujet de ses relations à l'espace sensible, est facilitée s'il dispose des connaissances géométriques qui s'appliquent au problème qu'il a à résoudre.

Analysons par exemple le travail d'un arpenteur du début du siècle. Ayant à évaluer l'aire d'un terrain "réel", il ne peut la mesurer directement, c'est-à-dire compter le nombre d'unités d'aires qu'elle contient.

---

[4] Voir Bkouche (1990).

[5] Voir Arsac (1987).

Il va constamment faire appel à des connaissances spatiales et géométriques pour réaliser sa tâche. Par exemple, si son terrain est clôturé sur un côté, il va commencer par s'assurer que la clôture est rectiligne. Pour cela, il va par exemple faire une visée, c'est à dire utiliser une pratique proprement spatiale. Mais ce qui le guide dans le ***choix*** des éléments à contrôler, c'est la connaissance géométrique dont il dispose concernant les facteurs qui interviennent dans le calcul d'une aire. Ce sont ces connaissances également qui lui permettent de ne prendre que les mesures nécessaires, puis, à partir d'un schéma représentant approximativement le terrain sur lequel il aura noté les mesures des côtés et des angles, de calculer l'aire.

Par ailleurs, il aura utilisé ses connaissances spatiales pour effectuer les mesures : s'il ne dispose pas d'un instrument de mesure des longueurs suffisamment long et qu'il est conduit à reporter plusieurs fois son décamètre-ruban lors de la mesure d'une distance non matérialisée par une haie, il aura contrôlé l'alignement des extrémités successives.

Ainsi, à chaque instant, l'arpenteur aura fait appel à des connaissances qui relèvent soit de celles nécessaires au contrôle spatial soit du modèle géométrique. Il n'y a pas pour lui d'ambiguïté : il respecte la fonction de chaque type de connaissances.

Remarquons que la résolution de son problème s'appuie sur la **modélisation** de l'espace en question, c'est à dire sur un mode de traitement qui consiste à représenter le terrain par un schéma ne prenant en compte que la partie pertinente pour le problème posé, des propriétés du terrain, et à traiter le problème dans le modèle, avant de revenir au réel.

Dans quelle mesure l'enseignement de la géométrie prend-il en compte ces différents aspects, en particulier à l'école primaire? Nous avons essayé de répondre à cette question en regardant l'évolution, à travers l'histoire, des programmes et des instructions. Nous proposons ici un exposé rapide de nos conclusions, qui pourraient être résumées par le titre : "Les connaissances spatiales utiles sont exclues des programmes de l'enseignement des mathématiques".

CONNAISSANCES SPATIALES ET CONNAISSANCES GEOMETRIQUES DANS LES PROGRAMMES D'ENSEIGNEMENT

LA GÉOMÉTRIE "MATHÉMATIQUE"

Elle a été très longtemps considérée comme le lieu même de la formation mathématique, en particulier à propos de ce qu'est une démonstration. L'école primaire n'est pas directement concernée par cet aspect, ni même, jusqu'aux derniers programmes du collège, les classes de 6ème -5ème. Ce qui ne veut pas dire que les jeunes élèves ne sont pas concernés par la production de raisonnements[6].

---

[6] Comme par exemple ceux nécessaires à la résolution du problème suivant, qui leur est communiqué par écrit et sans figure :
On a donné à un enfant une figure qui ressemble beaucoup à un carré, en lui disant de vérifier si c'est bien un carré. Il a mesuré les quatre côtés et trouvé qu'ils étaient de même longueur. Il a vérifié ensuite un angle avec son équerre. Il a trouvé qu'il n'était pas droit. Il a alors dit : Ce n'est pas la peine que je vérifie les autres angles, je suis sûr que cette figure n'est pas un carré". Es-tu d'accord avec lui ? Justifie ta réponse.

LES CONNAISSANCES NÉCESSAIRES À LA MAITRISE DES RAPPORTS SPATIAUX

Les connaissances spatiales "de base"

Nous entendons par là le langage spatial des positions et des déplacements, la prise de conscience des phénomènes liés aux changements de points de vue, l'élaboration et l'utilisation de représentations de l'espace environnant, etc.

Elles n'ont jamais été reconnues comme importantes dans les programmes de mathématiques à l'école primaire. Elles ne font partie des contenus d'enseignement que si elles s'inscrivent dans une finalité professionnelle (à l'époque où celle-ci existait) ou dans une finalité disciplinaire. Leur importance pour le développement des enfants n'est prise effectivement en compte qu'à l'école maternelle.

Ce constat peut paraître en contradiction avec les déclarations actuelles de la noosphère[7] sur l'importance de l'espace. C'est pourtant celui que nous avons été amenés à faire en étudiant l'évolution, depuis le début de la scolarité obligatoire, des programmes de l'ensemble des disciplines concernées par la maîtrise des relations spatiales, à l'école élémentaire, et sur celle des contenus des programmes de géométrie des deux premières années du premier cycle depuis 1957. En voici quelques résultats :

* Les connaissances spatiales à finalité professionnelle comme l'arpentage ou la perspective ont disparu en même temps que les classes de fin d'études, les plans et les cartes relèvent depuis 1970 de l'enseignement de la géographie (même si on trouve encore des activités sur ce thème en mathématiques dans les manuels), la "construction de l'espace" introduite en 77 au C.P. n'est justifiée que par son intérêt pour l'enseignement ultérieur de la géométrie. Nous pouvons remarquer qu'actuellement, ces connaissances sont mentionnées pour le cycle 1 mais plus après. Elles relèvent alors des compétences transversales et de la géographie et sont supposées acquises à la fin du cycle 2.

Nos conclusions rejoignent celles de M.G. Pêcheux (1990) qui écrit à la fin de son étude sur les programmes scolaires et l'espace : "Au delà de ces acquisitions, cruciales pour notre culture que sont la lecture et l'écriture, il nous semble que les performances spatiales sont davantage considérées comme relevant d'aptitudes individuelles, qui peuvent éventuellement être utiles pour certains métiers, mais dont on peut aisément se passer. Ni l'enseignement élémentaire, ni le collège n'entreprennent d'enseigner l'espace de manière structurée", et un peu plus loin : "Au total dans les pratiques scolaires, la systématisation des connaissances spatiales est laissée très largement au hasard".

---

[7] Ensemble des personnes et des groupes intéressés à la création et à la communication des savoirs d'un certain domaine.

Les connaissances "spatio-géométriques"

Nous avons introduit ce terme pour désigner les connaissances issues du savoir géométrique et mises en jeu dans la résolution de certains problèmes de l'espace. L'introduction de certaines de ces connaissances se fait dès l'école primaire, en particulier celles concernant les formes des objets et leurs propriétés, qui permettent le calcul des aires et des volumes.

Ces connaissances ont une existence stable. La justification de leur présence dans l'enseignement primaire a toutefois varié : conçues autrefois comme nécessaires aux pratiques de mesurage (donc dans une perspective pré-professionnelle), elles apparaissent dans les Instructions Officielles de 1970 comme un lieu d'exercice de "la pensée mathématique", c'est à dire en référence au savoir savant, celui produit par l'institution des mathématiciens. A partir de cette époque, le choix des concepts à enseigner suit la même évolution que celui du collège : par exemple, les transformations sont introduites au même moment dans les deux niveaux.

Remarque

Il est intéressant de comparer le devenir de propositions nouvelles de contenu présentées dans les I.O. de 78-80. Par exemple, celles concernant les "changements de point de vue" n'ont pas été reprises dans les I.O. de 85 alors que celles concernant les transformations ponctuelles proposées pour le CM en 80 ont été mises au programme dès le cours élémentaire en 85, au moment où elles faisaient leur entrée en 6ème.

Ainsi des connaissances qui relèvent d'un secteur reconnu des mathématiques sont plus faciles à légitimer, même dans l'enseignement primaire, que des connaissances spatiales pratiques, aussi nécessaires soient-elles aux élèves[8], comme celles permettant l'utilisation convenable d'un plan pour se repérer dans un espace inconnu, par exemple.

Conclusion

Cette faible place accordée aux connaissances proprement spatiales serait justifiée si leur acquisition se faisait quasi-spontanément, dans les interactions familières de l'enfant avec le milieu spatial. Il est donc important de faire le point sur les compétences des élèves à la fin de l'école primaire.

QUELQUES RÉSULTATS CONCERNANT LES COMPÉTENCES DES ÉLÈVES À L'ISSUE DE L'ÉCOLE PRIMAIRE

LES MAITRISES SPATIALES

Remarquons qu'elles ne sont pas évaluées. Il n'existe même pas d'étude ni d'outils permettant de savoir de quelle manière un enfant de 11 ans maîtrise l'utilisation d'un plan en situation réelle. Toutefois des déficits de compétences spatiales

---

[8] Nous proposons dans notre thèse une explication de ce phénomène en nous référant aux travaux de Chevallard sur la transposition didactique.

préjudiciables à l'enseignement ultérieur de la géométrie ou d'autres disciplines nécessaires à la formation professionnelle sont signalées dans divers travaux.

Exemple 1 : La lecture de plan

Nous avons utilisé les possibilités d'observation dont nous disposons à l'Ecole Michelet, pour proposer aux 57 élèves de CM_2 la tâche suivante[9] :

Un des bâtiments de l'école comporte une partie centrale réunissant préau et diverses salles et deux ailes symétriques composées chacune de 4 classes[10]. Ce bâtiment est bien connu des enfants mais n'est pas celui où sont situées leurs classes.

L'observateur est assis devant une petite table placée en A dans le préau. Le plan du bâtiment est posé sur la table, dans la position inverse de celle congrue au bâtiment.

Le dialogue prévu est le suivant :

O.: Sais-tu comment s'appelle ce genre de dessins ?

Suivant la réponse de l'élève, il infirme ou confirme la réponse et ajoute :

O.: C'est un plan du bâtiment dans lequel nous sommes.

Il rappelle très vite les codes pour représenter les murs et les portes et pose le problème :

Je vais te montrer une porte, tu me diras où elle est sur le plan.

L'observateur et l'élève se déplacent jusqu'à la porte en laissant le plan sur la table, puis reviennent à leur emplacement initial.

Quand l'enfant a donné sa réponse, deux cas peuvent se présenter :

* Elle est juste, l'interrogation est terminée.

* Elle est fausse, l'observateur montre le préau à l'élève sur le plan et demande *cela, qu'est-ce que c'est ?*, puis pose la même question pour les petites salles.

Il accepte les réponses des enfants, quelles qu'elles soient puis demande : *Alors tu es sûr que la porte que je t'ai montrée est bien celle-là sur le plan ?* la réponse à cette deuxième interrogation sur la position de la porte met un terme à l'entretien.

Les résultats en sont les suivants :

- 14 d'entre eux, soit 24%, ont été capables de montrer sur le plan, dès la première réponse, la porte indiquée par l'expérimentateur.
- 22, soit 39%, n'ont à aucun moment envisagé le problème de l'orientation du plan malgré la prise de conscience pour certains, de contradictions entre leurs interprétations de certains de ses éléments et la réalité.
- 21, soit 37%, sont dans une situation intermédiaire, capables de revenir sur leur réponse après le questionnement de l'observateur.

Nos résultats montrent donc que les trois quarts de ces élèves de CM_2 ne maîtrisent pas convenablement l'utilisation d'un plan dans une activité d'anticipation spatiale, et que 40% d'entre eux sont même assez loin de la compréhension des propriétés spatiales en jeu dans une mise en oeuvre correcte. Nous voyons que ces constats sont nettement différents de ceux auxquels on pourrait s'attendre si les objectifs assignés au cycle des apprentissages fondamentaux étaient atteints.

Exemple 2 : La représentation des objets de l'espace

Ce sont les recherches sur l'apprentissage du dessin technique qui signalent la présence de déficits concernant les représentations spatiales chez les élèves de LEP.

Un rapport de recherche de l'INRP (1984) fournit de nombreux résultats attestant les difficultés de représentation spatiale que rencontrent les élèves. Nous ne citerons que ceux de Artaud, Dolle et Lardeux (1984) qui ont proposé à 75 élèves de LEP une série d'épreuves où les problèmes posés consistaient à lire sur un dessin deux vues d'un parallélépipède rectangle pour en construire d'autres, en faisant varier les positions des vues données ainsi que leurs proportions. Les auteurs insistent sur

---

[9] inspirée d'une recherche de Rachedi et Weill-Fassina sur les compétences spatiales de jeunes de LEP.

[10] voir annexe 1.

l'échec que représente, pour cet enseignement, le fait que après 20 semaines de pratique hebdomadaire du dessin soit 80 heures de travail, "près de la moitié des élèves échouent sur des notions sensées être comprises et assimilées depuis les premières heures". L'apport d'examens cliniques leur permet de préciser de manière qualitative les difficultés repérées dans les tests collectifs, dont nous présentons les trois plus importantes :

-"L'incapacité des élèves (30 à 40 % suivant les proportions de l'objet) à changer de point de vue d'observation pour repérer la troisième dimension".

-"la fixation sur la vue de face, stéréotype représentatif, auquel est demandée toute information".

-"La résistance à sortir du stéréotype pour choisir une autre vue de face".

En résumé, les auteurs concluent : "les élèves des classes de LEP qui échouent, n'utilisent pas les opérations euclidiennes et projectives de façon coordonnée".

Les travaux relatifs à l'enseignement de la perspective au lycée, présentés par Bautier, Boudarel, Colmez, et Parzysz (1987) laissent penser que ces "déficits" (par rapport à la norme piagétienne) sont beaucoup plus généraux. Les auteurs écrivent en effet : "En l'absence d'apprentissage spécifique, les élèves observés développent des représentations mentales de l'espace incohérentes". Et ils comparent certaines de leurs productions aux représentations du Moyen-Age ou à celles d'enfants d'école maternelle.

LES CONNAISSANCES ENSEIGNÉES JUSQU'AU CM2

L'examen des épreuves des évaluations ministérielles et de leurs résultats nous fournissent des indications. Après une première année où la géométrie était à la portion congrue, elle occupe maintenant une place "honnête" et les résultats sont du même ordre de grandeur que ceux des autres types d'épreuves.

Dans notre travail nous avons été amenés à regarder sur quelques exemples, dans quelle mesure les élèves étaient capables de réinvestir des connaissances acquises dans le cadre scolaire, c'est-à-dire au cours d'activités portant sur des figures tracées dans la feuille de papier ou sur de petits objets, pour résoudre des problèmes situés dans d'autres contextes, en particulier quand on change la taille de l'espace. Des difficultés apparaissent, qu'on retrouve de manière semblable chez les futurs professeurs des écoles, qui sont pourtant des adultes.

Ainsi, alors que la construction d'un rectangle sur une feuille de papier, quand un côté est déjà tracé et que l'on donne la longueur d'un autre côté, est réussie par la grande majorité des élèves de CM2, la résolution du même problème posé à propos d'un rectangle dont les longueurs de côté sont de 7m et 9m fait apparaitre les limites des conceptions des élèves dont les apprentissages se sont effectués dans le contexte de la feuille de papier. Cela se manifeste pour certains par l'oubli de la prise en compte de la rectitude des angles, pour d'autres par la mise en doute, après une construction correcte de la figure, de sa qualité de rectangle : A la question "es-tu sûr que c'est un rectangle ?", on obtient des réponses comme : "Je ne suis pas convaincu, il faudrait aller au deuxième étage et regarder", ou " Mais peut-être qu'il y a des figures avec quatre angles droits qui ne sont pas des rectangles".

Conclusion

Les difficultés que nous venons de pointer nous renvoient à une interrogation sur la façon dont le système d'enseignement prend en charge le développement des compétences et des connaissances spatiales et spatio-géométriques, nécessaires tant à la vie sociale qu'aux apprentissages mathématiques ou professionnels ultérieurs.

QUELQUES CARACTÉRISTIQUES DE L'ENSEIGNEMENT DE LA GÉOMÉTRIE

Nous allons nous appuyer sur la description de quelques exemples, tirés de manuels pour décrire les caractéristiques de cet enseignement.

LES PRATIQUES LES PLUS RÉPANDUES

L'enseignement de l'espace et de la géométrie à l'école primaire et en 6ème-5ème s'appuie majoritairement sur une présentation ostensive[11] des connaissances spatiales et spatio-géométriques

L'ostension assumée

Par l'ostension assumée, repérée dans l'histoire de l'enseignement de la géométrie à l'école primaire et en 6ème-5ème jusqu'aux programmes de 77-78-80, l'enseignant présente directement les connaissances en s'appuyant sur l'observation "dirigée" d'une réalité sensible ou d'une de ses représentations, et suppose les élèves capables de se les approprier et d'en étendre l'emploi à d'autres situations.

En voici un exemple : la leçon sur le périmètre, tirée d'un manuel de 1960[12]

Nous ne savons pas exactement comment les maîtres de l'époque utilisaient le manuel avec leurs élèves. Nous pouvons tout de même faire l'hypothèse d'une lecture collective du texte accompagnée de questions : "Qu'est-ce que vous voyez sur l'image ? Comment connaître la longueur de grillage employée par le jardinier ?" et d'explications complémentaires puis de la recherche individuelle des exercices.

Comment pouvons-nous qualifier les rapports spatiaux développés par les enfants pendant cette leçon ?

* Ces rapports ne sont pas effectifs ; le milieu matériel (la pelouse polygonale et son grillage) est évoqué par une représentation fournie à l'enfant, l'action du jardinier par le mot "entoure" (en rouge dans le texte). Les enfants sont donc supposés capables de se représenter la situation objective à partir de ces seules informations.

* L'objectif est de munir les enfants d'une procédure générale s'appliquant à certaines situations spatiales planes. Le maître fournit aux élèves un modèle leur permettant d'évaluer le périmètre de toute surface polygonale, connaissant les longueurs des côtés.

---

[11] Ratsimba-Rajohn (1977) la définit comme la donnée par l'enseignant "de tous les éléments et relations constitutifs de la notion visée".

[12] Voir annexe n°2.

* Par contre, aucune place n'est faite à une approche que nous qualifions de a-didactique[13] :

- Il n'y a pas de situation dans laquelle les élèves se posent le problème de "comment connaître le périmètre dans les conditions fixées ?" et envisagent différentes façons possibles de le faire (y compris par mesurage effectif) :
- La raison pour laquelle une évaluation de la longueur du grillage est nécessaire n'est pas évoquée.

Il y a bien présentation du modèle mais absence, dans la situation didactique, du travail de modélisation. Un tel travail supposerait qu'une fois résolu par différents moyens empiriques (dont le mesurage), le problème de l'évaluation de la longueur du tour de la pelouse, d'autres problèmes soient étudiés, correspondant à des limitations dans l'action ; l'élaboration de la procédure à utiliser dans le cas d'une forme polygonale pourrait apparaître alors comme le résultat d'une modélisation de ces problèmes particuliers.

De manière plus générale, dans les situations "d'ostension assumée" que nous avons analysées, le problème est présenté aux élèves de manière évoquée, mais ceux-ci ne sont pas confrontés eux-mêmes à sa résolution dans des interactions spatiales effectives, ils n'ont pas la possibilité d'éprouver les représentations dont ils disposent, de les modifier en fonction des rétroactions de la situation, d'expliciter et de justifier leurs démarches.

Or ce sont les situations a-didactiques qui donnent du sens aux connaissances spatio-géométriques et qui servent d'appui à leur institutionnalisation. Leur absence a pour conséquence que la relation entre le savoir enseigné et l'ensemble des situations de référence dont ce savoir assure la maîtrise, c'est-à-dire le sens de ce savoir, est à la seule charge des élèves. Dans l'exemple du périmètre, les résultats des évaluations de fin de 6ème de l'APMEP montrent que si une partie d'entre eux, de part leur expérience personnelle, sont capables d'établir cette relation, ce n'est pas le cas de tous.

En conclusion, dans la présentation assumée, l'enseignant prend à sa charge la formulation de la correspondance entre un milieu objectif et le modèle géométrique. L'élève a la charge de "problématiser l'espace", c'est à dire doit faire appel à ses connaissances personnelles pour traduire en questions sur l'espace les questions posées dans le cadre du savoir enseigné, pour faire le lien entre les solutions pratiques et les solutions géométriques, pour reconnaître dans d'autres milieux les mêmes modèles géométriques.

L'ostension déguisée

Nous avons repéré dans les IO de 77-78-80, puis 85, pour le primaire, 86 pour le premier cycle, une évolution des conceptions épistémologiques de leurs rédacteurs,

---

[13] A l'intérieur d'une situation didactique (donc organisée par le maître pour un certain enseignement), le terme de situation a-didactique désigne toute situation (finalisée par un résultat empirique) qui d'une part ne peut être maîtrisée de façon convenable sans la mise en oeuvre des connaissances ou du savoir visé, et qui, d'autre part, sanctionne les décisions que prend l'élève (bonnes ou mauvaises), sans intervention du maître relativement au savoir à mettre en oeuvre.

avec l'apparition de "la résolution de problèmes" comme moyen de prendre en compte le caractère "d'outil" des mathématiques.

L'examen d'un certain nombre de propositions d'enseignement concernant tant les apprentissages spatiaux que les apprentissages spatio-géométriques nous conduit à conclure que, de manière générale, les situations d'enseignement de l'espace et de la géométrie ne comportent guère plus de phase a-didactique, maintenant qu'autrefois, malgré les timides incitations des instructions. Dans ces conditions, toutes les conclusions que nous avons tirées ci-dessus sur ce qui est à la charge de l'élève restent vraies.

En voici un exemple : ce sont les trois premiers exercices sur la symétrie tirée d'un manuel actuel pour le CM_1[14]

Ainsi dans la phase "recherche" de la leçon sur la symétrie par rapport à une droite, qui présente le dessin de deux oiseaux symétriques par rapport à une droite D verticale sur lesquels ont été repérés et désignés par des lettres, un certain nombre de points en correspondance (les pointes du bec, des ailes), les élèves doivent dire que les segments joignant les points correspondants sont parallèles entre eux, perpendiculaires à l'axe et que le point de rencontre avec l'axe est le milieu du segment ! Dans l'activité suivante, ils ont à utiliser les observations faites à l'exercice précédent pour construire l'avion symétrique de celui dessiné (mais cette fois le dessin est fait sur papier quadrillé, l'axe étant encore vertical), dans la troisième, le saut est considérable, puisqu'il faut construire sur papier blanc, le symétrique d'un triangle, l'axe étant oblique, et expliquer comment on a fait.

Nous avons ici l'exemple type de ce que nous appelons "l'ostension déguisée" :

Dans un premier temps, les propriétés visées sont représentées sur la figure, de manière à ce qu'elles soient les plus lisibles possible, l'observation du dessin doit permettre aux enfants de les reconnaître et de les expliciter.

Dans un deuxième temps, il est demandé aux élèves de les réutiliser pour différents types d'exercices dont la proximité avec la situation d'introduction n'est pas contrôlée.

Nous affirmons que dans ces conditions, la part de l'enseignant , sous-estimée par le manuel, est essentielle :

Dans le cas de la symétrie, les recherches au collège, menées par D. Grenier nous ont appris que les propriétés ponctuelles n'étaient pas du tout évidentes pour des élèves de 6ème ; même mises en scène comme dans le manuel, rien n'autorise à penser que les élèves de CM_1 vont répondre ce qu'attend le maître. Seul l'apprentissage des "figures-messages" (ainsi désignées par Bautier (1988)), peut permettre aux meilleurs de le faire, sous la force du contrat didactique ; "Que dire des deux segments joignant les sommets se correspondant ?" : ils ne sont manifestement pas de même longueur, ils ne sont manifestement pas perpendiculaires, ils ne peuvent plus qu'être parallèles. Nous reconnaissons là l'effet Topaze[15].

[14] Voir annexe n°3.

[15] Ce phénomène de didactique est présenté dans l'article de G. Brousseau (1990), Utilité et intérêt de la didactique, Grand N n°47, pp. 93-114.

Si le "message" n'est pas décodé par au moins un des élèves, "l'exploitation collective" permet à l'enseignant d'avancer, suivant les conseils du manuel pour le maître, qui s'exprime en ces termes : "on dégagera, on fera constater, on mettra en évidence etc..." Ce "on" est bien commode, il permet au maître de se sentir autorisé à intervenir largement tout en maintenant la fiction que ces interventions ne sont que la reprise de l'expression des enfants. Le rapport avec la situation n'est donc pas producteur de sens, et nous retrouvons les caractéristiques de la présentation ostensive des connaissances.

L'ostension "assumée" n'a-t-elle pas été remplacée par un autre mode d'ostension, que l'on pourrait qualifier "d'ostension déguisée" ? Au lieu de montrer à l'élève ce qui est à voir, le maître le dissimule derrière une fiction : celle que c'est l'élève lui-même qui le découvre sur les objets spatiaux soumis à son observation ou à son action. Comme le savoir à découvrir est un savoir très élaboré, le maître est obligé de "manipuler" le milieu matériel pour rendre la lecture de ses propriétés la plus simple possible ; malgré cela, ses interventions sont indispensables, mais au lieu d'être vécues par l'élève comme un apport d'informations dont il ne dispose pas, elles peuvent l'être comme le signe manifeste de son incapacité à voir et comprendre ce qui est si évident pour l'enseignant et comme une plus grande incitation à décoder les intentions didactiques du maître.

LES RAISONS DE LA PERSISTANCE DE L'OSTENSION

Que l'ostension (assumée), qui n'accorde de place qu'au savoir, rejette l'apprentissage de l'articulation des concepts enseignés avec les situations spatiales qui en sont la base, hors du temps de l'enseignement de la géométrie, voilà qui est bien cohérent avec la méthode. Or, nous avons fait le constat de la persistance de ce rejet de l'apprentissage a-didactique des connaissances spatiales et spatio-géométriques ; cette persistance tient alors d'un phénomène didactique majeur, que nous allons tenter de mettre en relation avec les contraintes de la relation didactique.

Ce sont ces contraintes et l'absence de moyens adaptés pour y satisfaire, qui maintiennent la nécessité de l'ostension et donc sa résurgence sous sa forme "déguisée".

L'enseignant a la responsabilité de la communication du savoir et du contrôle que ce que l'élève a appris est bien conforme à ce savoir. De plus, il est comptable de l'avancée du programme devant les instances officielles, devant les parents d'élèves et les élèves.

L'insistance relativement récente sur le rôle des connaissances et de l'activité propres de l'élève dans la construction de ses savoirs, conduit le système d'enseignement à rejeter l'emploi de l'ostension assumée.

Que se passe-t-il souvent ?

L'élève ne doit plus être considéré comme une cire vierge ; sur les savoirs visés, il a déjà des connaissances, explicitables ou non, plus ou moins adaptées mais dont le maître doit tenir compte. Pour pouvoir réaliser cette prise en compte, certains ouvrages proposent de commencer un enseignement par la résolution d'un problème nouveau, où les interactions avec l'espace sont effectives, et où l'élève va pouvoir engager et éventuellement expliciter ce qu'il sait déjà.

Or, dans la majorité des cas, ce que produit l'élève comme stratégie de base dans une situation a-didactique est très éloigné du savoir visé. La validation empirique peut s'avérer positive pour des modèles non attendus. En voici un exemple, tiré de la brochure "Enseignement des mathématiques utilisant la réalité" (1987), réalisée par A. Berté et éditée par l'IREM de Bordeaux.

Les auteurs rapportent les faits suivants qui se passent en 4ème:
"L'enseignant donne trois séries de nombres aux élèves. Il faut dans chaque cas, dessiner un triangle dont les côtés ont pour mesure ces trois nombres en cm. 1er cas: 7, 5, 4 2ème cas: 9, 5, 4 3éme cas: 10, 5, 4. Les élèves peuvent travailler en petit groupe et discuter entre eux.

Dans le premier et le troisième cas, tous les élèves dessinent le triangle avec le compas ou la règle pivotant autour du zéro et concluent sans difficulté.

Dans le deuxième cas, un groupe d'élèves arrivent à dessiner un triangle, très aplati mais pas tout à fait. La vérification de la longueur des côtés avec la règle graduée leur parait exacte.[16] *Malgré quelques objections timides des autres élèves, ils s'acharnent donc à dire que le triangle existe et arrivent même parfois à convaincre toute la classe! "*

L'enseignant peut-il accepter que l'élève soit convaincu de l'existence du triangle (9, 5, 4) parce qu'il en a dessiné un, alors que ce résultat est faux dans le savoir dont il est le garant, la géométrie ? Pour répondre oui à cette question, il faudrait qu'il se sente autorisé à reconnaître comme légitime une proposition qui s'appuie sur une connaissance spatiale effective de l'élève, mais qui n'a pas statut de vérité dans la géométrie et qu'il dispose de moyens pour aider l'élève à passer de cette connaissance, à la connaissance géométrique correspondante, avec une intervention didactique minime de sa part. Or ce sont ces moyens qui lui manquent.

L'ostension "déguisée" apparaît alors comme une solution de compromis ; elle évite tous ces problèmes à l'enseignant en le laissant maître du jeu, tout en semblant prendre en compte l'activité de l'élève. Nous avons vu qu'en fait, elle a pour conséquence la persistance du rejet de l'apprentissage a-didactique des connaissances spatio-géométriques hors du temps scolaire puisqu'elle fait porter à l'élève la responsabilité de l'établissement des rapports entre les concepts qui lui sont enseignés et la réalité sensible à laquelle ils se rapportent.

CONCLUSION

Une caractéristique majeure de l'enseignement de la géométrie à l'école élémentaire est de sous-estimer la difficulté d'acquisition des connaissances spatiales proprement dites et de laisser à l'élève la charge d'établir les rapports adéquats entre l'espace et les concepts géométriques qui lui sont enseignés, et qui sont censés lui donner prise sur ce domaine de réalité. Nous avons donné quelques exemples des difficultés rencontrées par les élèves pour établir ces rapports, difficultés qui renvoient à un déficit ou à une mauvaise adaptation de leurs connaissances privées.

Il est certain que l'enseignement ne peut prendre en charge toutes les connaissances que l'élève doit savoir mettre en oeuvre, soit pour apprendre, soit pour

---

16 Le lecteur pourra vérifier sur l'annexe n°4 que le triangle tracé répond bien aux contraintes demandées, au demi-mm près !

utiliser ce qu'il sait. En ce qui concerne l'espace et la géométrie, pourtant, la frontière entre ce qui relève de la responsabilité de l'élève et ce qui relève de celle du système enseignant, ne semble pas convenablement située. Il nous est apparu nécessaire d'étudier comment et à quelles conditions cette frontière pourrait être modifiée. Ce sera l'objet du travail que nous présenterons ultérieurement.

BIBLIOGRAPHIE

ARSAC G. (1987). L'origine de la démonstration : essai d'épistémologie didactique. *Recherches en Didactique des Mathématiques 8/3.*

BAUTIER T. (1988). Une modélisation didactique des activités d'enseignement des premières propriétés de la symétrie orthogonale, *Séminaire de didactique des mathématiques et de l'informatique*, LSD-IMAG, Institut Fourier, Université J. Fourier, Grenoble, années 86-88.

BAUTIER, BOUDAREL, COLMEZ, PARZYSZ, (1987). Géométrie et espace, représentation plane des figures de l'espace. *Didactique et acquisition des connaissances scientifiques.* La pensée sauvage.

BERTE A. (1987) (2ème éd. 1992). *Enseignement des mathématiques utilisant la réalité.* IREM de Bordeaux.

BERTHELOT R. & SALIN M.H. (1992). *L'enseignement de l'espace et de la géométrie dans la scolarité obligatoire.* Thèse Université Bordeaux 1. LADIST 40 rue Lamartine 33400 Talence.

BERTHELOT R. & SALIN M.H. (1993). Conditions didactiques de l'apprentissage des plans et cartes dans l'enseignement élémentaire. *Espaces Graphiques et Graphismes d'Espaces.* La pensée sauvage.

BKOUCHE R. (1990). Enseigner la géométrie, pourquoi? *Repères n °1.*

BROUSSEAU G. (1990). Utilité et intérêt de la didactique. *Grand N n° 47.*

BROUSSEAU G. (1983). Etudes de questions d'enseignement. Un exemple : la géométrie", *Séminaire de didactique des mathématiques et de l'informatique*, LSD IMAG, Université J. Fourier, Grenoble (1982-1983).

BROUSSEAU G. (1986). Fondements et méthodes de la didactique des mathématiques, *Recherches en didactique des mathématiques 7/2,*

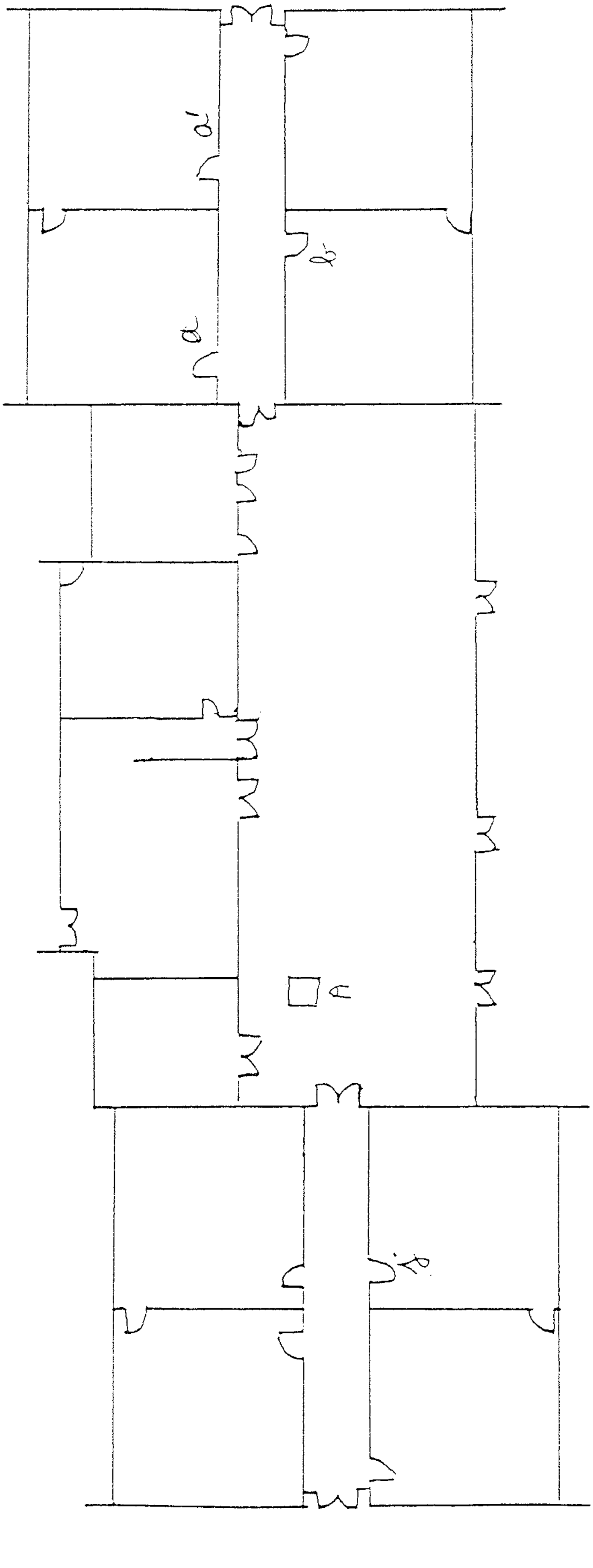
I.N.R.P. (1984) *L'apprentissage de la géométrie du dessin technique ; Des constats d'échec et des moyens de réussite.* Collection "rapports de recherche" 1984 n°9.

LABORDE C. (1988) : L'enseignement de la géométrie en tant que terrain d'exploration de phénomènes didactiques, *Recherches en didactique des mathématiques 9/3*, 337-364.

PECHEUX M.G. (1990) *Le développement des rapports des enfants à l'espace.* Nathan Université.

WEILL-FASSINA A. & RACHEDI Y. (1993) Mise en relation d'un espace réel et de sa figuration sur un plan par des adultes de bas niveau de formation. *Espaces graphiques et graphismes d'espace.* La pensée sauvage.

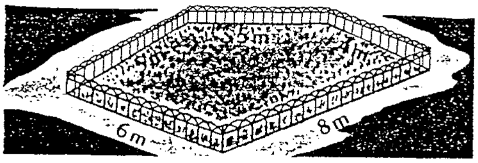
ANNEXE 1



ANNEXE 2

Ardiot (1960), Calcul Cours Elémentaire, Classiques Hachette

Le périmètre d'une figure



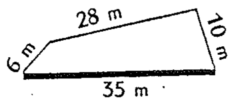
Dans le jardin public il y a une pelouse, le jardinier l'entoure d'une bordure en grillage.

Le jardinier emploie : 8 m + 6 m + 5 m + 5 m + 4 m = 28 m de bordure.

Le tour, pourtour ou périmètre d'une figure se calcule en additionnant la longueur de tous ses côtés.

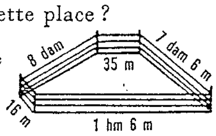
Exercices

● 1.



Au carrefour de plusieurs rues se trouve une petite place.
Quelle est la longueur de la bordure en pierre qui entoure cette place ?

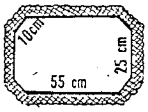
● 2. Un cultivateur veut entourer son pré d'un triple rang de fil de fer. Quel est le périmètre du pré ?



1 hm 6 m☐16 m☐8 dam☐35 m☐7 dam 6 m
ou ... m☐.. m☐ .. m☐.. m☐ ... m = ... m

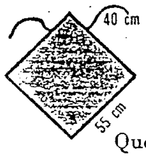
Quelle est la longueur du fil de fer employé ?

● 3.



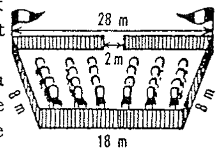
Jacqueline confectionne un napperon. Elle le borde d'une dentelle. Quelle est la longueur de cette dentelle ?
Un m de dentelle coûte 45 c.
Quel est le prix de la dentelle employée ?

★● 4.

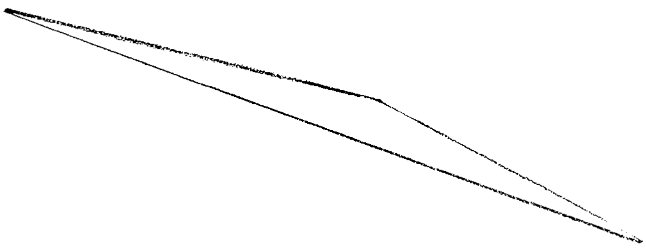


Danièle confectionne un tablier en prenant un carré d'étoffe de 55 cm de côté. Elle le borde d'un galon rouge. Puis elle emploie 2 morceaux du même galon pour faire une ceinture. Chaque morceau mesure 40 cm. Quelle longueur de galon a-t-il fallu pour border le tablier ?
Quelle longueur totale de galon Danièle a-t-elle employée ?

★● 5. Dans une fête on a délimité la place réservée aux invités par une palissade en lattes de bois. Quel est le périmètre de la place réservée aux invités ?
On a ménagé une entrée large de 2 m. Quelle est la longueur de palissade nécessaire ? Cette palissade existe en rouleaux de 1 dam de long. Quel est le nombre de rouleaux nécessaires ?



ANNEXE 4



ANNEXE 3

Eiller (1987), Math et Calcul CM1, Classique Hachette

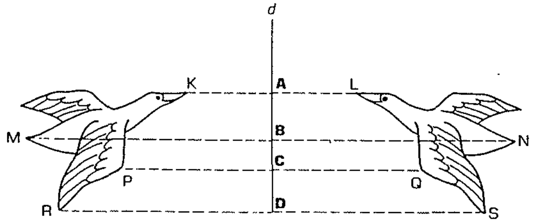
Annexe 4

(voir page précédente)

34 Symétrie par rapport à une droite

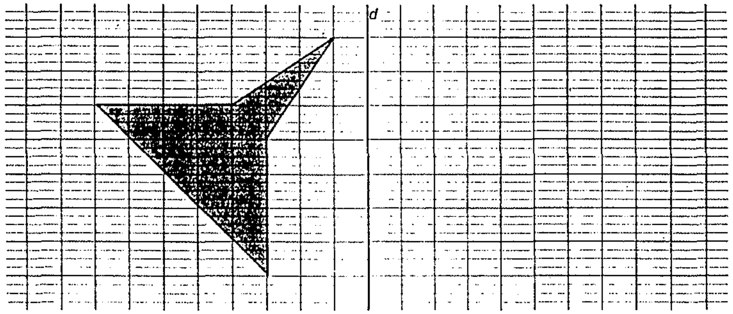
RECHERCHE

1 Observe les deux dessins suivants. Les deux oiseaux sont symétriques par rapport à la droite *d*.

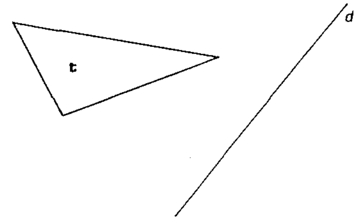


— Que peux-tu dire de la direction des segments tracés en pointillés ?
— Que peux-tu dire de la direction de *chacun* de ces segments par rapport à la droite *d* ?
— Quelle est la position du point **A** par rapport au premier segment KL ?
— Même question pour les points **B**, **C** et **D** par rapport aux segments MN, PQ et RS.

2 Reproduis l'avion et la droite *d* sur ton cahier. Utilise les observations faites à l'exercice précédent pour construire l'avion symétrique du premier avion par rapport à l'axe de symétrie *d*.

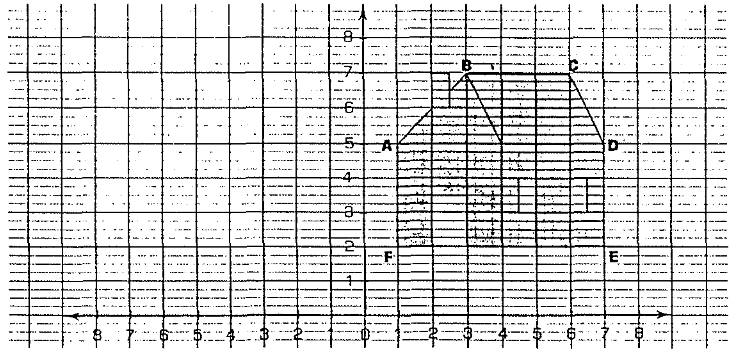


3 Reproduis le triangle **t** et la droite *d*. Construis le triangle symétrique du triangle **t** par rapport à l'axe de symétrie *d*.



♦ Explique comment tu as fait.

4 Reproduis les deux axes et le dessin sur une feuille de cahier. Construis la figure symétrique de la figure représentée par rapport à l'axe des points bleus.



Reproduis et complète les tableaux.

Point	A	B	C	D	E	F
Couple						

Point	A	B	C	D	E	F
Couple						

♦ Que remarques-tu ?