TRANSFORMATIONS GEOMETRIQUES ET CONFIGURATIONS EN 4 EME ET 3 EME

UNE PREMIERE CLASSIFICATION DES TACHES PROPOSEES AUX ELEVES ET LEUR REPARTITION DANS DEUX MANUELS

Neri TEREZINHA BOTH CARVALHO & Colette LABORDE

Neri TEREZINHA BOTH CARVALHO
Laboratoire Leibniz, Grenoble
et Université de Santa Catarina (Brésil)

Colette LABORDE
Laboratoire Leibniz, Grenoble

Résumé. L'objectif de l'étude est de déterminer les attentes et les exigences de l'enseignement relativement aux compétences des élèves de collège dans le domaine des relations entre transformations et configurations. A cette fin, est présentée une classification des tâches, dégagées dans l'analyse des exercices de deux manuels, Pythagore et IREM de Strasbourg, (classes de 4ème et de 3ème) selon des critères liés à leur complexité cognitive.

Mots clés : Transformation géométrique, figure, manuels, tâche, classification, configuration

Introduction

Dans l'enseignement secondaire en France, les transformations géométriques sont l'objet d'un enseignement de la Sixième à la Terminale. Depuis les changements de programmes de 1986 qui ont conduit à modifier leur présentation au niveau du collège, leur présence à chaque niveau scolaire et la fonction d'outil au service de la géométrie des configurations qu'elles sont censées jouer, sont des éléments de stabilité.

Le rôle des transformations dans l'étude des configurations et les liens qui doivent être établis entre transformations et configurations dans l'enseignement ont été largement explicités, ne serait ce que dans les textes officiels de programmes que ce soit ceux de 1985 ou les programmes actuels (Programme, Classe de 4ème, Arrêté du 14 novembre 1985; p. 51; Programme, classe 3ème; p. 63 ; documents d'accompagnement du cycle central des programmes de 1995) : "La translation et la rotation n'ont à aucun moment à être présentées comme une application du plan sur lui-même. Suivant le cas, elles apparaîtront dans leurs actions sur les figures, ou comme laissant invariantes les figures" (Programme, Classe de 4ème, p. 51). Des affirmations analogues figurent dans les programmes actuels de 6ème et 5ème à propos de la symétrie axiale et la symétrie centrale.

L'introduction même des transformations se fait donc au collège en les articulant à des figures spécifiques elles-mêmes objets d'enseignement : en sixième, les études de la symétrie orthogonale d'une part, du triangle isocèle et du rectangle d'autre part, se nourrissent mutuellement comme celles de la symétrie centrale et du parallélogramme : "Relier les propriétés du parallélogramme à celles de la symétrie centrale".(Programme 5ème, Arrêté du 14 novembre 1985 ; p.38).

L'introduction des élèves à ces relations entre configurations et transformations se fait certes par l'énoncé de définitions et de propriétés ou théorèmes mais surtout par des exercices de tracé et de construction. "Utiliser la symétrie axiale pour construire un triangle isocèle, un losange, un rectangle et un carré" (Programme 6ème, Arrêté du 22 novembre 1995; p.6). "L'objectif fondamental en sixième est encore la description et le tracé de figures simples". (Programme 6ème, Arrêté du 22 novembre 1995 ; p.7).

Les programmes fournissent certes quelques exemples de compétences exigibles des élèves à ce propos. Mais quelles sont effectivement les pratiques demandées aux élèves dans les réalisations diverses de l'enseignement ? Tel est le point de départ de notre étude.

I. Problématique

I.1 Questions

Notre interrogation est double :

- d'une part, elle vise à connaître les attentes et exigences de l'enseignement relativement aux compétences des élèves de collège dans le domaine des relations entre transformations et configurations.

- d'autre part, elle vise à différencier les tâches proposées aux élèves dans ce même domaine du point de vue de leur complexité cognitive.

Puisque l'objet de l'étude concerne les relations entre figures et transformations dans les traitements que sollicitent les tâches proposées aux élèves dans l'enseignement au collège, nous avons choisi de porter notre attention sur les tâches construites autour du triplet (F, t, F') où F est la figure sur laquelle agit la transformation t et F' la figure image de F par t. La majeure partie de l'ensemble de ces tâches consiste à déterminer (géométriquement ou par un tracé) un des éléments du triplet connaissant les deux autres. Ce sont ces tâches que nous retenons pour l'étude.

Avant d'aborder la complexité et la variété des réalisations en classe, il nous a paru plus raisonnable de prendre pour objet d'étude les réalisations fournies par les manuels scolaires, qui selon les termes de Menssouri (1994, p.46) "constituent une réalisation effective et objectivée des enseignements donnés en classe". Les manuels *de facto* évitent la complexité introduite par la présence réelle de l'enseignant et des élèves et leurs interactions. Ils sont néanmoins un terrain privilégié d'études portant aussi bien sur la transposition didactique que sur le contrat didactique (Menssouri *ibid.*, p.47).

Nous avons donc choisi d'étudier les tâches proposées aux élèves dans les manuels. Notre étude s'est restreinte aux classes de 4ème et 3ème, dans lesquelles au moment de l'étude (avant les programmes actuels) étaient vues ou revues l'ensemble des transformations abordées au collège.

Les tâches que nous étudions mettent en jeu des transformations, souvent des constructions à réaliser, et toujours des tracés à effectuer ou à interpréter, ne serait ce que celui du dessin associé à l'énoncé de la tâche. Des objets de nature très diverse sont donc en jeu dans ces tâches : objets de la théorie, tracés matériels. Nous sommes donc amenés à nous pencher au préalable sur la spécificité de ces objets en jeu, spécificité qui n'est pas sans conséquence sur les traitements sollicités pour la résolution des exercices en question.

I.2 - Spécificité des objets en jeu et des traitements qu'ils impliquent

Comme il a déjà été souligné à plusieurs reprises (Parzysz 1988, Mariotti 1995, Fishbein 1993, Duval 1994), la géométrie met en jeu des objets théoriques dont les extériorisations se font par différents registres. Deux registres jouent un rôle important, celui de la langue naturelle et celui des représentations spatio-graphiques, appelées habituellement figures. Ces dernières sont particulièrement en jeu dans l'enseignement des transformations au collège puisque l'objectif des programmes est bien celui d'étudier les transformations au travers de leurs effets sur les figures.

Les tâches géométriques proposées aux élèves impliquent donc des traitements et des contrôles de diverse nature (Laborde & Capponi 1996, p. 265) :

- traitements et contrôles relatifs aux objets théoriques
- traitements et contrôles relatifs aux objets spatio-graphiques.

Ces derniers types de traitements ont été analysés par Duval (1994, p. 122) qui dégage quatre types d'appréhensions d'une figure, dont en particulier[1], l'appréhension perceptive, "celle qui permet d'identifier ou de reconnaître, immédiatement, une forme, ou un objet, soit dans un plan soit dans l'espace", l'appréhension opératoire, "appréhension d'une figure donnée en ses différentes modifications possibles en d'autres figures", l'appréhension discursive qui "correspond à une explicitation des autres propriétés mathématiques d'une figure que celles indiquées par la légende ou par les hypothèses".

II. Méthodologie

Notre analyse des problèmes vise à identifier les connaissances et les traitements impliqués par les tâches impliquant un triplet (F, t, F'). Mais une telle entreprise, pour aboutir, nécessite de partir d'une première classification.

Dans une première phase, nous proposons donc a priori une classification des tâches qui sera justifiée par une analyse a priori que nous ferons des traitements au niveau spatio-graphique et théorique que nous supposons impliqués par ces tâches.

Dans une deuxième phase, nous confronterons la classification a priori avec la réalité que fournissent les tâches proposées dans deux manuels de 4ème et de 3ème.

[1] Nous n'utilisons pas ici, la quatrième type dit "appréhension séquentielle".

Seront relevés tous les exercices et problèmes posés dans ces deux manuels. Nous chercherons à les attribuer à l'une des classes distinguées a priori. L'inexistence de tâches d'une classe aussi bien que l'existence de tâches inclassables dans les manuels seront des éléments d'information importants que nous chercherons à expliquer en termes de transposition didactique et de contrat didactique. L'importance relative des différentes classes des problèmes dans les manuels sera interprétée et discutée de la même manière.

Les deux manuels retenus sont Pythagore 4ème (1992) et 3ème (1993) et Maths IREM de Strasbourg 4ème (1992) et 3ème (1995). En effet, pendant que les programmes précédents étaient en vigueur, le premier manuel était très répandu et le deuxième portait une attention particulière à la géométrie.

III - Classification a priori

III.1 Des classes de problèmes

Une simple combinatoire sur le triplet (F, t, F') met en évidence en un premier temps, trois types de problèmes possibles issus de la variation sur les éléments donnés du triplet et l'élément à trouver.

1. F et t sont donnés, F' est à trouver.
2. F' et t sont donnés, F est à trouver.
3. F et F' sont donnés, t est à trouver.

Nous faisons l'hypothèse qu'ils correspondent à des classes différentes de problèmes au sens de Vergnaud (1986; p. 34) en ce qu'ils mettent en jeu des traitements cognitifs et des procédures différents de la part des élèves.

Justifions le d'abord, de manière globale, puis en un second temps en analysant de façon fine les traitements impliqués à l'aide d'un exemple de tâche de chaque classe.

III.2. Différenciation globale des classes

On peut penser qu'au niveau du collège, les types 1 et 2 sont effectivement différents, dans la mesure où les élèves n'ont pas été introduits à la notion de transformation inverse. Ils ne peuvent donc pas, dans un problème de type 2, mettre en jeu directement une procédure de détermination d'une image inverse ou encore ils ne peuvent pas identifier la figure objet dans un ensemble plus complexe en considérant la transformation inverse.

Le type 3 diffère des types 1 et 2 car chercher la transformation qui transforme F en F' oblige à faire des hypothèses sur la nature de cette transformation avant d'en déterminer les éléments qui la caractérisent. Au contraire, les types 1 et 2 ne requièrent que l'usage de la définition et des propriétés de la transformation donnée.

Les problèmes de type 3 impliquent trois étapes dans le raisonnement :

1) A partir de l'analyse comparée de F et F', on doit émettre une hypothèse sur la nature de la transformation. Ce peut être un raisonnement qui conduit à éliminer certaines transformations (les élèves ne sont conduits à imaginer que les transformations vues en cours). Par exemple : ce ne peut être une translation ou une symétrie centrale, car l'image d'une droite n'est pas une droite parallèle à cette dernière. Ou ce peut être un raisonnement qui conduit à supposer que la transformation est de telle ou telle nature : ce peut être une rotation car le triangle, figure initiale et le triangle image ont un point commun.

2) A partir de cette hypothèse, on détermine les caractéristiques de cette transformation, en analysant les propriétés géométriques de la figure formée par l'ensemble {F, F'}.

3) Puis on vérifie que la transformation trouvée transforme bien F en F'.

Comme on le constate, le type 3 met en jeu des opérations de pensée, d'enchaînement complexe et différentes de 1 et de 2.

Ainsi identifions-nous trois classes de problèmes impliquant un triplet (F, t, F').

Classe I : La figure initiale et la transformation sont données et la figure finale est à trouver.

Classe II : La figure finale et la transformation sont données et la figure initiale est à trouver.

Classe III : Les figures initiale et finale sont données, la transformation est à trouver.

La classification des problèmes additifs donnée par Vergnaud (1986) nous conduit à envisager a priori une classe supplémentaire :

Classe IV : La composition des transformations.

Les problèmes de cette classe mettent en jeu une figure initiale F et ses transformées successives F_i par des transformations t_i

Divers types de problèmes peuvent être envisagés. Citons en deux dans lesquels on suppose que les transformations t_i sont données :

1) La tâche est celle de déterminer les images successives par les t_i d'une figure initiale F donnée.

2) La tâche est de trouver la transformation composée, la figure initiale F étant donnée

3) La tâche est de trouver la transformation composée, seulement à partir des t_i, la figure initiale F n'étant pas donnée.

Le premier type n'est en fait que la succession de problèmes de classe I tandis que le second, soit se ramène à la classe III si l'on connaît F et donc la figure finale, les t_i étant connus.

Seul le troisième type ne relève d'aucune des classes précédentes (I, II, III). A priori une classe spécifique de problèmes semble donc être envisageable dans laquelle il ne s'agit plus d'opérer sur des figures mais d'opérer sur les transformations mêmes. Nous faisons l'hypothèse que le passage à la classe IV.3 correspond à un saut conceptuel considérable : celui de prendre pour objets ce qui n'était jusqu'alors que procédés de transformation, suivant en cela Sfard (1991) à propos de la notion de fonction ou Vergnaud (1976) à propos des problèmes additifs.

III.3. Traitements a priori impliqués par chaque classe

Nous dégageons ici, a priori, les traitements impliqués par chaque classe, à l'aide d'un exemple de tâche pour chacune des classes.

Classe I : La figure initiale et la transformation sont données et la figure finale est à trouver

Exemple :

1. Tracer un cercle C de centre O. Marquer deux points A et B quelconques, puis construire le cercle C', image de C par la translation de vecteur $\overrightarrow{AB}$.

2. Marquer deux points E et F sur C.

Construire en expliquant :

L'image de E et de F par la même translation, avec l'équerre et la règle non graduées.

(Maths-Irem de Strasbourg, 4ème, chapitre 14, exercice H (modifié) ; p. 211)

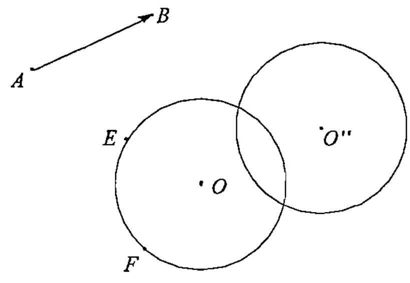


Fig.1 (non donnée dans l'énoncé)

La résolution de la question 1 met en jeu une propriété globale (l'image d'un cercle est un cercle de même rayon) et une propriété ponctuelle pour la détermination du centre du cercle image.

La résolution ne requiert que la mise en œuvre de ces propriétés en acte au niveau spatio-graphique. Une résolution fondée sur la propriété globale du cercle image (présente en acte chez tous les élèves) et sur la localisation perceptive au jugé de son centre est possible, d'autant plus que l'énoncé ne demande pas d'explication. La question 1 ne discrimine donc pas les solutions reposant sur une propriété ponctuelle et celles reposant sur une localisation spatiale approximative du centre.

La résolution de la question 2 comporte trois phases :

- une phase de prise de conscience de l'impossibilité, compte tenu des instruments disponibles, de la détermination de E' et de F', images de E et de F, par les égalités vectorielles issues de la définition de l'image d'un point par une translation ;

- une phase de reconnaissance des objets et des relations que les instruments fournis (règle non graduée et équerre) permettent de tracer : des droites, des droites perpendiculaires à des droites données, des parallèles à des droites données grâce à une technique apprise en 6ème et 5ème (fondée ou non sur la propriété : "deux droites perpendiculaires à une troisième droite sont parallèles") ;

- une phase de détermination au niveau théorique des points images E' et F' de E et de F par un raisonnement ponctuel : E' (resp F') est sur l'image du cercle C (si un point appartient à un cercle, son image appartient au cercle image) et sur une parallèle à (AB) passant par E (resp F) (en raison de l'égalité vecteur EE' = vecteur AB).

Dans la question 1, l'image du cercle est obtenue par un procédé séquentiel direct à partir du cercle donné : centre puis cercle. La question 2 exige au contraire de suspendre le tracé immédiat du point image pour concevoir des conditions auxquelles il doit satisfaire.

On peut qualifier la première résolution d'arithmétique et la deuxième d'algébrique : des relations sur un objet à déterminer sont exprimées alors qu'il est encore inconnu.

Il est à noter, de plus, que la question 2 ne permet pas par une pure résolution spatio-graphique perceptive au moyen de la seule localisation spatiale approximative de E' ou de F', sans tenir compte de la condition d'appartenance de E' et F' au cercle image. Une telle solution donnerait un résultat incorrect. Dans ce cas, même une solution spatio-graphique nécessite la mise en œuvre de connaissances théoriques pour déboucher sur une réponse correcte. D'ailleurs, le manuel demande justement une formulation de la construction de E' et F'.

Cet exemple illustre bien que, compte tenu de la coexistence d'objets spatio-graphiques et théoriques, dans certains cas, deux tâches très différentes, nécessitant des opérations de pensée qualitativement différentes, peuvent être camouflées par le même intitulé de tâche de construction de l'image d'une figure par une transformation. Les choix relatifs aux instruments, aux figures en jeu, peuvent être décisifs quant à la nature de la tâche pour l'élève. C'est pourquoi, nous appelons *variables de tâche* ces caractéristiques du problème, reprenant ainsi l'expression anglaise de *task variable* (Lesh 1985).

Classe II : La figure finale et la transformation sont données et la figure initiale est à trouver

A priori on peut distinguer deux cas suivant que la transformation est involutive ou non. Les symétries axiales et centrales enseignées en 6ème et 5ème sont justement involutives mais l'on n'apprend pas aux élèves que le même procédé permet de passer de la figure objet à la figure image ou de l'image à son antécédent. Nous supposons donc que la tâche ne diffère pas pour les élèves suivant la transformation en jeu.

Dans tous les cas, transformation involutive ou non, la construction de l'antécédent de la figure donnée passe par sa caractérisation par un ensemble de conditions, au moyen des propriétés de la transformation. Le raisonnement impliqué peut donc être qualifié d'algébrique comme précédemment. On raisonne sur l'objet inconnu en déterminant des conditions auxquelles il doit satisfaire.

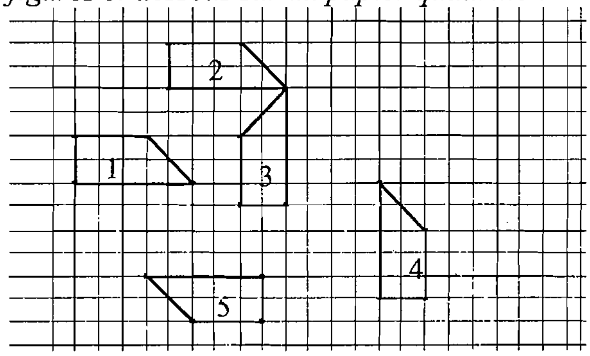
Mais suivant le choix des valeurs des variables de tâche (choix du triplet transformation, figure image donnée et instruments disponibles), il se peut qu'une solution spatio-graphique par localisation spatiale approximative donne une réponse très acceptable, comme dans l'exercice qui consiste à trouver le segment dont l'image par la symétrie d'axe D, de direction “ verticale ” sur la feuille de papier, est un segment [A'B'] donné parallèle à D.

Classe III : Les figures initiale et finale sont données, la transformation est à trouver

La figure initiale F et la figure finale F' sont données, la transformation est à trouver. Il faut établir des relations entre F et F' pour identifier ou caractériser la transformation t.

Exemple :

"Reproduire les figures ci-dessous sur du papier quadrillé :



Trouver la transformation permettant de passer :

. de 1 à 2 ;

. de 2 à 5 ;

. de 2 à 4 ;

. de 1 à 5 ;

. de 2 à 3 .

Faire apparaître sur la figure les éléments qui définissent chaque transformation.

D'après le Brevet des Collèges, Caen, 1990)

(Maths-IREM de Strasbourg ; 3ème ; Chapitre 11; exercice 13; p. 175)

Illustrons les traitements requis par ce type de problème par deux cas.

a) de 1 à 2 ;

L'appréhension perceptive de l'identité de forme des figures 1 et 2 et de leur position relative permet de faire une hypothèse : la transformation est une translation. On peut identifier les points correspondants dans la transformation par une opération assez immédiate d'estimation à l'œil de l'angle ou de la longueur (appréhension opératoire). A partir de là, on peut déterminer le vecteur translation, en joignant les deux points. Une vérification est possible : on trace plusieurs vecteurs translations et l'on vérifie l'égalité de leur longueur et de leur pente par comptage de carreaux.

b) de 2 à 5 ;

L'analyse de la position relative des figures 2 et 5 et la reconnaissance perceptive du parallélisme des côtés indiquent que la transformation peut être une symétrie centrale ou une rotation. On peut rejeter la translation par un glissement rectiligne en pensée de 2 vers 5 : On ne peut superposer 2 sur 5 sans faire tourner 2. Soit on reconnaît perceptivement que c'est un demi-tour et on suppose que c'est une symétrie centrale. Il faut alors en déterminer le centre, en identifiant deux points correspondants. Soit on suppose simplement que c'est une rotation. Par le comptage du quadrillage et l'analyse des points et segments, on vérifie que les segments images sont parallèles, il s'agit donc d'une rotation de 180°.

Dans ces problèmes, il faut trouver la nature de la transformation en effectuant d'abord une reconnaissance globale, au niveau spatio-graphique, de la forme et de la position de F' par rapport à celle de F. Il est important de noter que cette reconnaissance spatio-graphique s'appuie sur une connaissance spatiale des effets de la transformation sur la forme et la position relative des figures objet et image.

Dans une deuxième étape, on peut préciser t par une analyse ponctuelle, c'est-à-dire par le repérage d'un point de F et du point correspondant de F', et vérifier que ces points se correspondent bien dans la transformation supposée (usage de la définition théorique du transformé d'un point).

La résolution des problèmes de cette classe requiert un jeu entre spatio-graphique et théorique, entre global et ponctuel. Sont sollicitées les appréhensions perceptive et opératoire des figures qui s'appuient sur des connaissances spatiales des effets de la transformation. Ce type de problèmes nous semble particulièrement adapté pour relier les dimensions théorique et spatio-graphique et les aspects globaux et ponctuels de la géométrie. On peut faire l'hypothèse d'une plus grande complexité due à ces interrelations entre ces différents aspects.

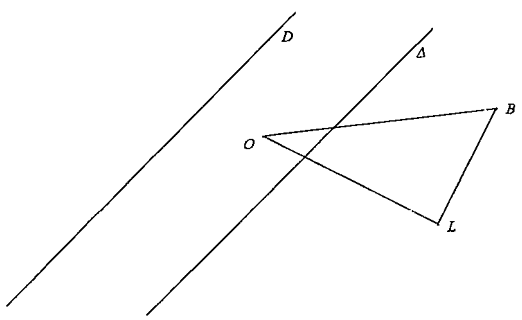
Classe IV : La composition des transformations

Examinons le cas où la figure initiale et les transformations t_1, t_2,... sont donnés. La tâche est de déterminer la transformation t composée des t_i.

Exemple :

a) *Construire, à la règle et au compas, le symétrique B'O'L' du triangle BOL par rapport à la droite Δ puis le symétrique B"O"L" de B'O'L' par rapport à D.*

b) Par quelle transformation passe-t-on directement de BOL à B"O"L" ?



(Pythagore, 3ème, Chapitre 13, exercice 11, page 240)

La tâche donnée dans la question a) relève de la classe I.

Une résolution possible à l'époque de l'étude de la question b) consiste à utiliser le résultat du cours d'alors sur la composition de symétries axiales.

Une autre résolution possible actuellement consiste à se ramener à un problème de classe III dans lequel F et F' sont données et t est à trouver.

L'analyse a priori des traitements impliqués par chaque classe confirme le bien fondé de la classification a priori en le nuançant. Le recours à des connaissances théoriques sur les transformations est beaucoup plus probable dans les classes II, III et IV que dans la classe I. Cette dernière est susceptible de ne solliciter que des traitements spatio-graphiques et des procédés directs d'obtention de l'image sans raisonnement à l'aide de connaissances théoriques sur les transformations. Le jeu entre spatio-graphique et théorique paraît être a priori le plus fort dans la classe III. Néanmoins l'examen plus attentif des traitements attachés à chaque classe a montré que la modification des caractéristiques d'une même tâche peut solliciter des traitements très différents et un problème de la classe II peut ne solliciter qu'un traitement spatio-graphique dans certains cas.

IV. Relevé systématique des exercices de deux manuels

Rappelons que les deux ouvrages concernés sont : Pythagore et Maths-Irem de Strasbourg, pour les classes de 4ème et 3ème. Au sein d'un même exercice, nous considérons autant de tâches différentes qu'il y a de questions.

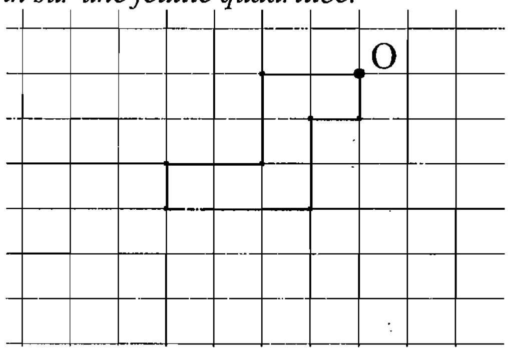
Classe I : La figure initiale et la transformation sont données et la figure finale est à trouver

L'analyse des manuels a permis de constater que les exercices de cette classe sont donnés soit sur papier quadrillé (en nombre non négligeable) soit sur papier blanc.

Or la présence du papier quadrillé peut favoriser des stratégies de résolution de nature différente de celles sur papier blanc.

Par exemple :

Reproduire ce dessin sur une feuille quadrillée.



Tracer l'image de la figure coloriée par la rotation de centre O et d'angle 90°.

(Pythagore, 4ème, Chapitre 17, exercice 2, p. 136)

Les deux stratégies possibles (Grenier & Laborde 1987, Gallou 1987, Grenier 1989) sont :

- trouver les images des sommets de la figure par la rotation donnée (au moyen de l'analyse du quadrillage et de la figure) et tracer les segments pour construire la figure image.

- trouver l'image d'un point par la rotation et dessiner la figure image par comptage de carreaux suivant une procédure du type : tourner à gauche ou à droite, avancer de n carreaux en utilisant le quadrillage comme référence. Cette procédure de résolution est qualifiée de *semi-ponctuelle* par Gallou :"*une procédure globale, qui consiste pour une figure formée de segments juxtaposés à tracer les symétriques des sommets puis à les joindre*". (Gallou, 1987, p.18)

La deuxième résolution consiste en une stratégie de comptage guidée par la forme de la figure initiale. La tâche porte sur l'action de la transformation sur le dessin. La résolution sollicite une appréhension et des contrôles plus perceptifs (repérage spatial) que théoriques. Les élèves partent de l'évidence que la forme va être la même. Ils utilisent implicitement les propriétés de transformation comme l'invariance des angles et de la taille des objets. La résolution réside dans un déplacement sur le quadrillage (tourner à droite, à gauche, avancer de tant de carreaux). L'usage des propriétés de la transformation est quasi implicite, à moins que, sous la pression de l'enseignant, l'élève ne soit conduit à expliciter les propriétés utilisées. Le quadrillage privilégie cette stratégie lorsque la figure initiale est un polygone et que ses côtés sont portés par le quadrillage (Grenier *ibid.*). Une stratégie par essai/erreur qui ne s'appuierait que sur une estimation globale du nombre de carreaux est même imaginable. L'invalidation d'une figure image incorrecte serait immédiate par le fait que le dernier trait à tracer serait oblique. Une telle stratégie par essai/erreur serait beaucoup moins efficace et plus coûteuse en papier blanc.

Nous distinguons donc deux sous-classes.

Sous-classe I.1 : La figure initiale F est donnée par un dessin sur papier quadrillé.

Sous-classe I.2 : La figure initiale F est donnée par un dessin sur papier blanc et/ou une caractérisation discursive[2].

Ci-dessous, nous présentons sous forme de tableau, pour chaque manuel et chaque sous-classe, la répartition des transformations en jeu et des figures initiales données. Nous distinguons en effet la ligne polygonale du polygone parce que nous faisons l'hypothèse que la fermeture des polygones est une variable qui donne à l'élève un moyen de contrôle sur sa production. Le nombre de fois où la tâche a été posée, est indiqué dans la case correspondante.

Sous-classe I.1 : La figure initiale F est donnée par un dessin sur papier quadrillé

2 Evidemment, la présence d'un dessin dans l'énoncé de l'exercice est susceptible de modifier la tâche. Dans la mesure, où si le dessin est absent, l'élève commence par le tracer, et où dans les exercices concernés le tracé du dessin n'ajoutait pas de difficulté particulière, nous n'avons pas distingué deux sous-classes au sein de la classe I.2 suivant que le dessin était donné ou non.

Pythagore - 4ème

Figure initiale	Symétrie centrale	Symétrie axiale	Translation	Rotation	Total
Polygone non régulier	0	0	3	4	7
Ligne polygonale	2	3	4	0	9
Total	2	3	7	4	16

Pythagore - 3ème

Figure initiale	Symétrie centrale	Symétrie axiale	Translation	Rotation	Total
Polygone non régulier	1	1	1	1	4
Ligne polygonale	0	1	1	0	2
Triangle	0	0	1	0	1
Total	1	2	3	1	7

Maths-IREM de Strasbourg - 4ème

Figure initiale	Symétrie centrale	Symétrie axiale	Translation	Rotation	Total
Polygone non régulier	2	2	2	2	8

Maths-IREM de Strasbourg - 3ème

Figure initiale	Symétrie centrale	Symétrie axiale	Translation	Rotation	Total
Polygone non régulier	3	1	0	1	5

Note : La complexité et une typologie de réponses des élèves ont été étudiées dans le cas particulier de la symétrie orthogonale par Grenier (1989), où les variables comme la position relative de la figure et de l'axe de symétrie, le type de papier sur lequel est tracée la figure (blanc ou quadrillé) sont prises en considération.

Ci-dessous, un tableau synthétique des tâches de cette sous-classe pour l'ensemble des deux manuels (4ème et 3ème).

Tableau de l'ensemble des tâches de la sous-classe I.1

Figure initiale	Symétrie centrale	Symétrie axiale	Translation	Rotation	Total
Polygone non régulier	6	4	6	8	24
Ligne polygonale	2	4	5	0	11
Triangle	0	0	1	0	1
Total	8	8	12	8	36

Les tableaux montrent que dans les problèmes sur quadrillage, les figures initiales sont de type polygonal, et lorsque ce sont des polygones, ils sont non réguliers. L'étude plus précise des exercices montre une diversité dans les choix de variables de tâche relatives aux côtés : dans certains exercices, les côtés du polygone sont tous portés par le quadrillage, dans d'autres pour un même polygone, certains côtés sont portés le quadrillage, d'autres non. Le manuel Pythagore privilégie les polygones à côtés sur le quadrillage, il utilise même des pavages triangulaires ou en parallélogrammes, pour proposer des polygones à angles non droits. Seul le manuel Pythagore propose des lignes polygonales non fermées.

Ce type d'exercices est plus important en nombre en 4ème qu'en 3ème, le manuel Pythagore en propose davantage en 4ème que Maths IREM Strasbourg et, de plus, varie la nature de la figure initiale.

Sous-classe I.2 : La figure initiale F est donnée par un dessin sur papier blanc ou de façon discursive.

Pythagore 4ème

Figure initiale	Symétrie centrale	Symétrie axiale	Translation	Rotation	Total
Carré	0	0	0	1	0
Droite	0	0	2	3	5
Demi-droite	0	0	0	1	1
Cercle	0	0	2	2	4
Total	0	0	4	7	11

Pythagore 3ème

Figure initiale	Symétrie centrale	Symétrie axiale	Translation	Rotation	Total
Point	1	0	1	1	3
Triangle	0	0	3	1	4
Total	1	0	4	2	7

Maths-Irem de Strasbourg 4ème

Figure initiale	Symétrie centrale	Symétrie axiale	Translation	Rotation	Total
Point	2	2	3	8	15
Segment	0	0	2	0	2
Triangle	1	1	7	7	14
Carré	0	0	3	3	5
Parallélogramme	0	1	2	4	7
Droite	1	1	2	3	9
Fig. composée	0	0	1	1	2
Cercle	0	0	3	1	5
Total	4	5	23	27	59

Maths-Irem de Strasbourg 3ème

Figure initiale	Symétrie centrale	Symétrie axiale	Translation	Rotation	Total
Triangle	0	0	3	0	3
Parallélogramme	0	0	3	4	4
Droite	2	1	2	2	7
Total	2	1	5	6	14

Tableau du total des problèmes de la sous-classe I.2

Figure initiale	**Symétrie centrale**	**Symétrie axiale**	**Translation**	**Rotation**	**Total**
Point	3	2	4	9	18
Segment	0	0	2	0	2
Triangle	1	1	13	8	23
Carré	0	0	3	4	7
Parallélogramme	0	1	2	8	11
Demi-droite	0	0	0	1	1
droite	3	2	6	8	19
cercle	0		5	3	8
Figure Composée	0	0	1	1	2
Total	**7**	**6**	**36**	**42**	**91**

Les deux ouvrages diffèrent notablement par le nombre d'exercices de cette sous-classe : le manuel Maths-IREM de Strasbourg 4ème propose un nombre d'exercices nettement plus important et, de plus, joue sur la variété des figures initiales.

Les manuels donnent surtout des exercices portant sur les transformations nouvellement vues, translation et rotation.

Un choix didactique paraît évident dans le manuel Maths-IREM de Strasbourg par l'accent mis sur la construction de l'image d'un point : développer à ce niveau la procédure ponctuelle, en entraînant les élèves à utiliser la technique de construction du transformé d'un point. Une hypothèse d'apprentissage est sous-jacente : si les élèves savent construire le transformé d'un point, ils savent réinvestir cette technique dans des constructions de transformées de figures plus complexes. Les expérimentations de Grenier (1989) ont montré la faillibilité de cette hypothèse.

Vocabulaire de la consigne

Nous mettons en évidence dans le tableau suivant les mots clés utilisés dans les questions.

Total des problèmes par mot utilisé dans la formulation de la question (sous-classe I.1)

Manuels	Transformer	Construire	Dessiner	Tracer	Total
Pythagore 4ème	0	0	0	16	16
Pythagore 3ème	0	4	0	3	7
Maths-Irem de Stras 4ème.	8	0	0	0	8
Maths-Irem de Stras 3ème	2	0	3	0	5
Total	10	4	3	19	36

Total des problèmes par mot utilisé dans la formulation de la question (sous-classe I.2)

Manuel	Transformer	Construire	Quel est la transformée ?	Total
Pythagore 4ème	0	11	0	11
Pythagore 3ème	0	4	3	7
Maths-Irem 4ème	5	54	0	59
Maths-Irem 3ème	0	14	0	14
Total	5	83	3	91

Nous faisons l'hypothèse que le mot utilisé dans la formulation de la question peut avoir une incidence sur les traitements de l'élève. Le terme "construire" insiste sur le procédé d'obtention de l'objet, tandis que "tracer" évoque la réalisation matérielle, sur papier ou à l'écran d'ordinateur (Laborde & Capponi, 1994). "Construire" renvoie en général dans les manuels à un procédé de nature géométrique alors que "tracer" n'exige pas nécessairement le recours à la géométrie pour obtenir le dessin d'une figure. Le mot "transformer" contient l'idée de changement : " faire passer d'une forme à une autre ". (Dictionnaire « Nouveau petit le Robert », 1993) et insiste sur la notion mathématique de transformation.

Ces données mettent en évidence l'accent mis sur les constructions dans l'enseignement des transformations au collège : 83 sur 91 des problèmes de cette sous-classe utilisent le mot construire lui même dans la question. Dans presque tous les problèmes de cette sous-classe, trouver l'image consiste à faire une construction.

Ces données révèlent de plus la différence de consigne entre les deux sous-classes.

Les mots "tracer" et "dessiner" ne sont employés qu'avec le papier quadrillé ; et ils sont relatifs au domaine des objets spatio-graphiques. "Construire" apparaît de façon écrasante en papier blanc. Ce terme révèle le fait que les auteurs ne sont pas tant intéressés par le tracé final que par le processus d'obtention de ce tracé, en ce qu'il repose sur des propriétés géométriques.

Le vocabulaire des consignes semble confirmer que la sous-classe papier quadrillé est plus du côté du spatio-graphique, alors que la sous-classe papier blanc se situe plutôt du côté du géométrique.

Des termes sont préférés selon les manuels. "Tracer" est utilisé exclusivement par Pythagore qui, justement, travaille plus sur le quadrillage que Maths-IREMde Strasbourg. "Construire" est utilisé essentiellement par Maths-IREM de Strasbourg qui privilégie fortement le papier blanc.

Classe II : La figure finale et la transformation sont données et la figure initiale est à trouver

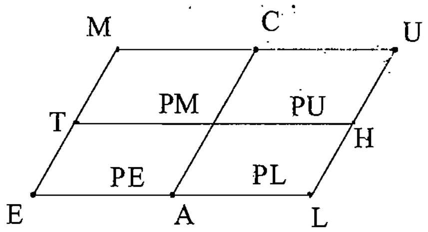
Fait remarquable : les deux manuels analysés n'ont aucun problème de cette classe, alors que des exercices mettant en jeu les symétries auraient été possibles.

Classe III : Les figures initiale et finale sont données, la transformation est à trouver

L'analyse des manuels révèle des types de questions non prévus dans l'analyse a priori : la nature de la transformation étant donnée, la tâche consiste à identifier dans un ensemble de figures le (ou les) couple(s) figure initiale/figure finale et à caractériser la transformation.

Exemple :

Soit un parallélogramme MULE, soit C le milieu de [MU], H celui de [UL], A celui de [EL] et T celui de [EM].



Citer des couples de parallélogrammes (P1, P2) de la figure tels que P2 soit l'image de P1 par une translation que l'on précisera.

(Pythagore, 3ème, Chapitre 12, exercice 6)

L'élève doit d'abord trouver le couple (F, F') par l'analyse du dessin. Il lui faut, en un premier temps, repérer globalement la forme et la taille des parallélogrammes, ce qui nécessite un découpage de la figure donnée en "sous-parallélogrammes" (appréhension opératoire). En un deuxième temps, il termine la caractérisation de la translation en identifiant un point et son image. Les traitements sollicités sont donc de même nature que ceux prévus par l'analyse a priori dans les tâches d'identification complète d'une transformation inconnue grâce à la donnée de la figure initiale et finale (§ III.3). Cette varation de question ne change pas la nature de la tâche pour l'élève.

Les problèmes qui portent sur la détermination du centre d'une rotation requièrent l'utilisation de la propriété donnée dans la partie cours. Si une rotation fait passer A à A', son centre est sur la médiatrice de [AA']. Le centre de la rotation est alors le point d'intersection des médiatrices des deux paires de points correspondantes (A,A'), (B,B') à condition qu'elles ne soient pas identiques. Dès que la nature de la transformation et un couple point/image sont connus dans le cas d'une translation, d'une symétrie axiale ou centrale, on détermine complètement la transformation par un procédé direct (obtention directe du vecteur, de l'axe ou du centre). La rotation nécessite toutefois l'explicitation de deux conditions auxquelles doit satisfaire le centre inconnu de la rotation. Ce dernier est alors obtenu comme intersection de deux tracés. On peut y voir une complexité plus grande.

En conclusion, aux problèmes prévus dans l'analyse a priori d'identification de la transformation t, F et F' étant donnés, les manuels offrent trois types d'exercices supplémentaires :

- préciser la transformation t dont la nature est donnée, F et F' étant donnés,
- préciser la transformation t dont la nature est donnée et trouver les couples (F, F') dans une configuration complexe donnée,
- la figure initiale F et une partie de F' étant données, préciser la transformation t dont la nature est donnée et compléter l'image F'.

Nous distinguons ainsi, deux sous-classes dans la classe III :

Sous-classe III.1 : La figure initiale et la figure finale sont données. La transformation est à trouver (exemple, § III.3 classe III).

Sous-classe III. 2 - Sont donnés : la figure initiale, la figure finale et la nature de t. Le problème consiste à préciser la transformation t, et éventuellement trouver les couples (F, F') ou compléter F'.

Nombre de problèmes par sous-classe et par manuel

Sous-classe III.1 — Sous-classe III.2

Manuels	**Nature de t à trouver** Pavage	Papier blanc	**Nombre et nature de t donné**	**Éléments de t à préciser**
Pythagore 4ème	6	0	2 symétrie 4 rotation	axe centre, angle
Pythagore 3ème	16	4	5 translation 2 rotation 1 symétrie centrale	vecteur centre, angle centre
Maths-Irem 4ème	6	1	3 rotation 2 translation	centre et angle vecteur
Maths-Irem 3ème	14	10	2 rotation 1 symétrie	centre, angle axes

Total des problèmes de la classe III.1 : 57 Total de problèmes de la sous-classe III.2 : 22

L'analyse des manuels montre que les exercices de la classe III.1 sont en plus grand nombre que ceux de la sous-classe III.2. Ils donnent lieu à des variations introduites très probablement à des fins didactiques :

- la donnée de la nature de t diminue la complexité de l'exercice,
- le repérage des couples F et F' réintroduit une complexité qui sollicite essentiellement des traitements au niveau spatio-graphique.

Il est à noter que les traitements impliqués dans les deux sous-classes ne différent pas en nature de ceux où la transformation est complètement inconnue, comme on l'a vu. Les variations introduites dans III.2 font travailler la reconnaissance des effets de la transformation sur les figures au lieu de celle de la transformation elle-même à partir du couple figure initiale/figure finale. Ce serait un moyen de compléter la classe I (production de transformées de figures initiales) en sollicitant cette fois la reconnaissance du dessin de transformées, type d'exercices absents de la classe I.

Classe IV : La composition des transformations

Sous-classe IV.1 : La figure initiale F et les transformations sont données. Il faut trouver l'image de F par l'application répétée d'une transformation, ou par plusieurs transformations.

Sous-classe IV.2 : Les figures initiale F et finale F_n sont données. Il faut déterminer la transformation qui fait passer de F à F_n.

Sous-classe IV.1 : Nombre de problèmes de cette sous-classe par manuel :

Manuels	**Nombre de problèmes**
Pythagore - 4ème	0
Pythagore - 3ème	11
Maths-Irem de Strasbourg - 4ème.	6
Maths-Irem de Strasbourg - 3ème.	4

Total des problèmes de cette sous-classe : 21

La résolution des problèmes de cette sous-classe se ramène à la résolution des problèmes de la classe I.

Le tableau suivant montre la nature des transformations en jeu, dans les questions sur la composée.

Figure initial	**Nombre**	**Transformation**	**Transformation**
Triangle	3	Symétrie axiale	Symétrie axiale
Triangle	3	Translation AB	Translation CD
Parallélogramme	3	Symétrie axiale	Symétrie axiale
Parallélogramme	1	Symétrie centrale	Symétrie axiale
Fig. Polygonale	2	Symétrie axiale	Symétrie axiale
Polygone irrégulier	1	Translation AB	Translation AC
Polygone irrégulier	1	Symétrie centrale	Symétrie centrale
Point	1	Symétrie axiale	Symétrie centrale
Point	1	Translation	Translation (...)
Point	2	Rotation	Rotation (...)
Cercle	1	Rotation	Rotation (...)
Droite	1	Rotation	Rotation (...)
Losange	1	Symétrie axiale	Symétrie axiale

(...) signifie que plus de deux transformations sont composées, les transformations en jeu étant de même nature.

Le manuel Pythagore 3ème, dans la partie cours, propose des activités sur la composition de transformations de nature différente, comme symétries et translations, translations et rotations. Le tableau ci-dessus montre cependant que dans les questions proposées dans les exercices, les transformations à composer sont en général de même nature, excepté dans les questions relatives à la composition d'une symétrie axiale et d'une symétrie centrale.

Notons enfin que le manuel Maths-IREM de Strasbourg ne suit pas à la lettre le programme parce qu'il propose des exercices de cette classe en 4ème.

Sous-classe IV.2

Les problèmes de cette sous-classe figurent seulement dans le manuel Pythagore - 3ème.

Les figures initiales, finales et les transformations sont précisés dans le tableau suivant :

Figure initiale	Figure finale	t1	t2	Total
Point	Point	Translation	Translation	2
Point	Point	Symétrie axiale	Symétrie centrale	1
Quadrilatère	Quadrilatère	Translation AB	Translation BC (...)	1
Triangle	Triangle	Translation AB	Translation BC (...)	2
Triangle	Triangle	Symétrie axiale	Symétrie axiale	2

Nombre d'exercices de cette sous-classe : 8

La détermination de la composée de transformations donne lieu à presque trois fois moins d'exercices que la détermination des images. De plus, seul le manuel Pythagore propose de tels exercices.

La sous-classe IV.3 est absente.

V. Interprétation globale des données

Récapitulons ci-dessous la répartition des différentes classes de problèmes par classe et par manuel :

Classes	Pyth.4è.	Pyth.3è	Maths 4è	Maths 3è	Total
Classe I : F, t--> F'	27	14	67	19	127
Classe II : F', t-->F	0	0	0	0	0
Classe III : F, F'-->t	11	23	12	31	77
Classe IV : t1 o t2....	0	19	6	4	29
Total	33	47	76	27	233

Classe III	Symétrie	Translation	Rotation	Total
Sous-classe III.1	15	12	31	58
Sous-classe III.2	2	6	11	19
Total	19	20	42	77

Classe IV	Symétrie axiale/axiale	Symétrie centrale/ centrale	Symétrie centrale/ axiale	Translation/ translation	Rotation/ Rotation	Total
Sous-classe IV.1	9	1	2	5	4	21
Sous-classe IV.2	2	0	1	5	0	8
Total	12	1	3	10	4	29

Une tendance forte : les exercices de construction de l'image d'une figure

La prédominance de la classe I est évidente : 127 sur 233 des questions étudiées portent sur la construction d'images. De plus, dans les formulations de questions, sur papier blanc (sous-classe I.2), le mot "construire" apparaît très fortement , à savoir dans 83 des 91 questions. Seules 3 questions portent sur la caractérisation géométrique de l'image. On peut en inférer que l'enseignement des transformations géométriques au collège met l'accent sur la construction d'images de figures. Certes, cette prédominance considérable de la classe I est due, en partie, au manuel Maths-IREM de Strasbourg, 4ème : 67 questions, mais cette classe serait quand même prédominante si le manuel Maths-Irem de Strasbourg se "comportait" comme Pythagore.

Dans cette classe I, le grand nombre de questions relatives à la rotation et à la translation, 97 sur 127, par rapport aux questions relatives à la symétrie centrale et axiale, 29 sur 127 s'explique, par le fait qu'elles sont éléments explicites du programme en 4ème et en 3ème.

L'absence de problèmes portant sur la construction de l'antécédent d'une figure image par une transformation (problèmes de classe II) peut donner à penser que l'objectif d'enseignement visé est davantage celui d'un savoir faire (les procédés "officiels" de construction d'une image, le développement de techniques de construction) que celui de savoir conduire des raisonnements fondés sur l'utilisation des propriétés de la transformation.

Cette appréciation présente quelques convergences avec l'étude d'autres classes de problèmes. En effet, la classe III d'identification d'une transformation comporte surtout des exercices sur quadrillage. L'analyse a priori (§ III.3) de ces exercices montre que les connaissances théoriques sont essentiellement utilisés pour confirmer la reconnaissance spatio-graphique de la nature de la transformation. Il est à noter qu'aucun exercice ne propose de couples de figures qui ne se correspondent pas dans une des transformations connues. Le théorique joue pourtant dans ce type d'exercices un rôle d'invalidation du spatio-graphique et y gagne un certain caractère opérationnel.

De plus, la classe III a été aménagée dans les deux manuels et donne lieu à une sous-classe dans laquelle la nature de la transformation composée est donnée. Cette dernière n'est plus à trouver.

La classe IV, également peu représentée dans les manuels, donne lieu à deux sous-classes, dont l'une, la sous-classe IV.1, consiste uniquement à construire les images successives par une suite de transformations. Seule la sous-classe IV.2 pose la question de l'identification d'une transformation. Or elle est très nettement plus faiblement représentée que la sous-classe IV.1 (8 problèmes contre 21), et n'est présente que dans le manuel Pythagore 3ème.

L'absence de tels problèmes dans le manuel Maths-IREM de Strasbourg, alors qu'une approche de la notion de transformations composée est faite en 4ème peut être l'indice de cette moindre importance donnée aux transformations en tant que telles, par comparaison avec l'accent mis sur le produit ou les effets de la transformation.

Jeu entre spatio-graphique et théorique

L'analyse des exercices des différentes classes a fait souvent apparaître un jeu entre des connaissances spatio-graphiques et théoriques dans leur résolution.

On a pu même remarquer l'introduction de figures sur quadrillage par les manuels, donnant le plus souvent une place plus importante aux connaissances spatio-graphiques. Il y a donc là une variable didactique à disposition des auteurs d'exercices.

Variabilité des choix didactiques des manuels

Le nombre de questions de la classe I posées par le manuel Maths-IREM de Strasbourg en 4ème (67 questions) et la variété des figures initiales, comparés à celui des questions du même manuel 3ème (19 questions) indique clairement le choix de mettre fortement l'accent sur les constructions d'images en 4ème. Le manuel Pythagore présente une rupture moindre à la fois entre 4ème et 3ème (sauf pour la classe IV) et entre classes.

Alors que le manuel Pythagore montre un choix net de travailler sur le quadrillage en 4ème, le manuel Maths-IREM de Strasbourg, 3ème comporte un très grand nombre d'exercices de construction d'images sur papier blanc comme le montre le tableau suivant :

	Sous-classe	Pythagore 4ème	Pythagore 3ème	Maths-Irem Stras. 4ème	Maths-Irem Stras-3ème
Quadrillé	I. 1	16	7	8	5
Papier blanc	I. 2	11	7	59	14

On peut supposer que l'accent mis sur le quadrillage par Pythagore 4ème correspond au souci de la création d'une étape intermédiaire dans la construction d'images par une transformation. L'hypothèse implicite dans ce manuel serait la suivante : Le quadrillage faisant davantage appel à des connaissances perceptives que théoriques permettait d'installer chez l'élève une connaissance perceptive des images par une transformation donnée qui servirait plus tard de contrôle dans les exercices sur papier blanc donnant plus place à des connaissances théoriques.

Au contraire, les choix du manuel Maths-IREM de Strasbourg 4ème reposeraient sur une hypothèse de construction d'image se situant d'emblée à un niveau plus théorique. Il est remarquable que le manuel Pythagore, dans la sous-classe I.2, donne le point comme figure initiale, dans 3 questions, alors que, dans le manuel Maths-IREM de Strasbourg, le point est la figure initiale pour 15 questions. Cela confirme un choix du manuel Maths-IREM de Strasbourg, d'insister sur les constructions des images à partir de la maîtrise de construction d'images de points, donc du moindre recours à des constructions au plan perceptif. Ce manuel introduit d'ailleurs la construction de l'image d'un polygone à partir de ses sommets dans la partie cours, sans la justifier comme une technique de construction, et ne laisse pas la place à d'autres techniques. On peut alors se demander si les élèves mettent réellement en jeu des connaissances théoriques dans ces exercices et s'ils ne font pas davantage appel à un procédé mémorisé qu'ils ne sauraient justifier.

Complexité cognitive

Dans la phase initiale de définition des différentes classes de problèmes (§III), nous faisions l'hypothèse d'une complexité plus grande des problèmes d'identification d'une transformation par rapport aux problèmes de construction d'images.

L'analyse a montré que la situation n'est pas si simple. On peut trouver des problèmes de complexité et de traitements différents à l'intérieur d'une même classe (cf. ex. classe I, §III.3). Le choix de variables de tâche paraît jouer un rôle plus déterminant pour la complexité de la tâche. On a pu ainsi retrouver le rôle de variables déjà repérées dans d'autres travaux (Grenier 1989 ; Gallou 1987), comme le choix des types de figure, la position de la figure par rapport au quadrillage. Le choix de la transformation en jeu peut être un élément décisif quant à la complexité. Il est en général plus facile d'identifier le vecteur d'une translation que le centre d'une rotation.

L'identification de la composée des transformations dans les problèmes de la sous-classe IV.2 relève aussi a priori d'une complexité plus grande, dans la mesure où les transformations sont considérées en tant qu'objets sur lesquels on opère. Mais l'identification de la composée peut aussi être perçue comme la seule correspondance entre la figure de départ et la figure image. Nous n'avons pas d'éléments qui permettent de conclure de façon tranchée.

VI - Conclusion

Tous les problèmes relevés dans les deux manuels, mettent en jeu un tracé (sur pavage ou sur papier blanc) ou un dessin à construire. Cela confirme que les transformations géométriques sont abordées, en 4ème et 3ème au Collège en France, en tant que transformations qui opèrent sur des figures et correspond à ce qui est annoncé dans les programmes officiels. L'aspect procédé de construction de l'image paraît plus accentué que celui de l'identification de cette dernière par la mise en œuvre de propriétés de la transformation ; l'absence de problèmes relatifs à la détermination de l'antécédent d'une image par une transformation donnée semblerait le confirmer.

La classification a été faite selon l'analyse de la tâche impliquée par les questions posées par les exercices de manuels. La variété de classes et sous-classes repérées montre des choix didactiques faits dans l'enseignement au niveau du collège relatifs aux transformations considérées en tant qu'objet d'étude.

Il est en particulier apparu deux choix didactiques différents :

- un travail intermédiaire sur quadrillage favorisant le recours à des connaissances et des contrôles spatio-graphiques ;
- d'emblée un travail sur les points de la figure à transformer, qui à première vue peut paraître reposer sur la définition théorique du transformé d'un point et le recours au théorème de conservation des segments. Cependant l'analyse de la partie cours du manuel concerné montrerait une absence de justification, qu'elle soit de nature spatio-graphique ou de nature théorique, du procédé ponctuel de la construction de l'image d'un polygone.

Il est donc raisonnable de postuler qu'il est difficile d'identifier dans la résolution de la tâche de construction de l'image d'une figure par l'élève si l'élève met en jeu des connaissances théoriques sur les transformations ou a recours à l'exécution de techniques naturalisées. Des expérimentations auprès d'élèves sollicitant des explicitations seraient nécessaires pour trancher.

Du côté des élèves, plusieurs recherches ont visé à montrer la complexité cognitive, des tâches, selon les variables en jeu, dans le cas de la symétrie orthogonale. Un travail expérimental pour étudier la complexité et les difficultés rencontrées chez des élèves, pour d'autres transformations serait encore à mener.

Références

DUVAL, R. (1994) Les différents fonctionnements d'une figure dans une démarche géométrique, *Repères IREM* n° 17, 121-137.

FISHBEIN E. (1993) The theory of figural concepts, *Educational Studies in Mathematics, Vol.24, n°2*, 139-162.

GRENIER, D. & LABORDE, C (1987) Transformations géométriques : le cas de la symétrie orthogonale, *Didactique et Acquisition de Connaissances Scientifiques ;* Actes du Colloque de Sèvres, pp. 65-86.

GRENIER D. (1989) Construction et étude du fonctionnement d'un processus d'enseignement sur la symétrie orthogonale : éléments d'analyse du fonctionnement de la théorie des situations, *Recherches en Didactique des Mathématiques.10 (1)* 5-60.

GALLOU, E. D. (1987) Symétrie orthogonale et Micro-ordinateur, *Recherches en Didactique des Mathématiques, vol. 8, 1.2*, 5-60.

LABORDE, C & CAPPONI, B. (1994) Cabri-géomètre constituant d'un milieu pour l'apprentissage de la notion de figure géométrique. *Recherches en Didactique des Mathématiques.14 (1)* 165-210.

LABORDE, C & CAPPONI, B. (1996) Modélisation à double sens, Atelier à la 8ème école d'été de didactique des mathématiques, *Actes* Édition IREM de Clermont Ferrant, 265-278.

LESH, R. (1985) Conceptuel. analyses of mathematical ideas and problem solving processes In *Proceedings of the Nirth Internationnal Conference for the Psychology of mathematics Education ;* L. Streeflland (ed.) (Vol II, pp 73-96) Utrecht Reseanch Group on mathematics Education.

MARIOTTI, M.A. (1995) Images and concepts in geometrical reasoning In : *Exploiting Mental Imagery with Computers in Mathematics Education*, Sutherland R. & Mason J. (eds) (pp.117-124), Nato ASI Series, Berlin, Heidelberg: Springer Verlag.

MENSSOURI, D. (1994) *Essai de délimitation en termes de problématiques des effets de contrat et de transposition : Le cas des relations entre droites et équations dans les classes de Seconde et de Première*, Thèse. Grenoble : Université Joseph Fourier.

PARZYSZ B. (1988) Knowing vs Seeing, Problems of the plane representation of space geometry figures, *Educational Studies in Mathematics*, 19.1, 79-92.

SFARD A. (1991) On the Dual Nature of Mathematical Conceptions : Theoretical Reflections on Processes and Objects as Different Sides of the Same Coin, *Educational Studies in Mathematics, 22*, 1-36.

VERGNAUD, G.,(1986) Psychologie du developpement cognitif et didactique des mathématiques un exemple : les structures additives, *Grand N*, n° 38, IREM de Grenoble, 21-40.

VERGNAUD, G. (1976) Stuctures additives et complexité psychogénétique, *Revue Française de Pédagogie n° 36* ; 28-43.