ÇA NE TOMBE PAS JUSTE*

Marc BLANCHARD

20 divisé par 3, «ça ne tombe pas juste». Qui d'entre nous n'a entendu, voire prononcé une phrase analogue ?

Et pourtant ou en effet :

- Pour partager 20 dalmatiens entre trois familles adoptives, il est facile d'en donner six à chacune mais que faire des deux qui restent ?

- Pour partager 20 mètres de tissu en morceaux de 3 mètres chacun, une couturière peut facilement le faire et gardera peut-être la chute.

- Pour partager 20 mètres de tissu entre trois couturières, parions que cela ne leur poserait pas de grosses difficultés.

- Pour transporter 20 tonnes de marchandises avec un camion de 3 tonnes de charge utile, combien de voyages cela nécessitera-t-il ?

- Pour partager 20 gâteaux identiques entre trois enfants, cela peut se faire à l'aide d'un couteau en coupant de façon convenable deux gâteaux.

- Pour partager 20 francs entre 3 enfants, comment faire si on ne dispose que d'un billet de vingt francs ? De quatre pièces de cinq francs ? D'une pièce de dix francs, une pièce de cinq, deux pièces de deux et une pièce d'un franc ?

Alors 20 divisé par 3, cela peut-il tomber juste ?

En fait la division relève de problématiques différentes.

- L'une est totalement discrète et relève du comptage, le partage se fait sur des objets insécables (cas des dalmatiens), il s'agit de la division euclidienne définie dans $\mathbb{N}^*$. L'égalité fondamentale est $20 = 6 \times 3 + 2$.

---

* Article paru dans le n° 146 (année 1991) de la revue Math-Ecole (CP 54 - 2007 Neuchâtel 7 - Suisse).

- La seconde relève de la mesure mais on travaille avec une unité conventionnelle (ici 3 mètres) et la mesure totale de la pièce de tissu n'est pas un nombre entier d'unités. L'égalité est la même que la précédente.

- La troisième, continue, relève de la valeur de la mesure de ce qui est à partager (et qui est relative à l'unité choisie). La division est définie par $\mathbb{R}^{+*}$ mais la densité de $\mathbb{Q}$ dans $\mathbb{R}$ le permet dans la pratique. Dans l'exemple correspondant, on considère le rationnel 20/3.

Notons qu'ici, avec une autre unité de mesure, la longueur du tissu pourrait être de trois ou de six (etc.) unités et il n'y aurait apparemment plus de problème.

- La quatrième, problème classique de transport, est une division particulière puisque le reste est négatif ou nul. L'égalité de cette situation est : $20 = 7 \times 3 - 1$ car on veut satisfaire une double inégalité $b(q - 1) < a < bq$ différente de celle de la division euclidienne.

- Dans le cas suivant, les objets à partager sont sécables (cas des gâteaux) et la division est à la charnière des cas discrets et continus. L'égalité fondamentale est alors celle-ci $20/3 = 6\ 2/3$ (ce qui conventionnellement signifiait en France autrefois et signifie encore dans certains pays $6 + 2/3$ car $2/3 \in [0 ; 1]$.

- Quant au dernier exemple, discret lui aussi, des contraintes de situations empêchent d'user simplement de l'unité de façon indifférenciée. Chacun jugera s'il convient de s'adapter à la situation ou s'en échapper de diverses façons. Nous avons peut-être moins l'habitude de prendre en compte ce genre de problèmes dans l'enseignement des mathématiques.

En fait la phrase «ça ne tombe pas juste» est employée par les élèves dans un autre sens, purement calculatoire : la division poursuivie après la virgule ne s'arrête pas car le reste n'est jamais nul. Cette division poursuivie aussi loin que l'on veut (on peut) n'a de sens que s'il s'agit d'un partage dans un cas continu (tissu ou gâteaux) pour lequel 20/3 a une signification physique. Ce qui est à mettre en cause ici est la base de numération choisie, pour nous la base 10.

Nous savons que la fraction irréductible a/b a une écriture décimale finie lorsque b n'est pas divisible par d'autres nombres premiers que 2 ou 5. En base 3, on écrirait 202/10 = 20,2 ; en base 6 : 32/3 = 10,4 ; en base 12 : 18/3 = 6,8. Tout nombre rationnel peut avoir une écriture à virgule finie dans certaines bases de numération mais aucune base de numération ne permet d'écrire tout rationnel avec une écriture à virgule finie. Alors la base 10 ou une autre...

Pour les élèves jusqu'au premier cycle y compris, il est inutile d'entrer dans des considérations de bases de numération de cet ordre, mais il est sans doute très profitable de distinguer les activités de comptage (phénomènes discrets) de celle de mesure (phénomènes continus). Les rationnels bâtis à partir des entiers (solutions d'équations du type $bx = a$, $(a, b) \in (\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}^*)$ ne sont pas tous entiers. Il n'est pas toujours possible de les écrire sous forme décimale, d'où la nécessité d'une nouvelle écriture (a/b). Quant aux nombres irrationnels, il n'est jamais possible de les écrire sous forme décimale ou rationnelle comme leur nom le laisse deviner, d'où la nécessité d'user de nouveaux symboles (radicaux, noms spécifiques, etc.). Pour mieux situer tous ces nombres sur la droite des réels, il est souvent commode de connaître des valeurs approchées (décimales voire rationnelles pour les irrationnels), de les encadrer si on le veut de plus en plus finement, ce que les calculatrices permettent de faire désormais plus facilement qu'auparavant.