LES PRINCIPES QUI GUIDENT LA PENSÉE DANS LA RÉSOLUTION DES ÉQUATIONS

Anibal CORTÉS & Nelly KAVAFIAN
ESA 7021, Cognition et activités finalisées
CNRS, Université Paris 8

Résumé. Cette étude concerne le processus de conceptualisation de la méthode algébrique de résolution. Les erreurs (commises par des élèves de classes de 4ème et de 5ème) dans la résolution des équations ont été classées en cinq catégories. Ces catégories ont été construites à partir de la mise en relation des erreurs avec les propriétés mathématiques non respectées. Les classes d'erreurs construites nous ont permis d'identifier les principes implicites qui guident la pensée des experts dans le calcul littéral. Ce travail se veut un outil d'analyse pour le maître.

Introduction

L'étude de la maîtrise du calcul littéral élémentaire a une importance sociale indéniable car celui-ci constitue la base de départ nécessaire pour aborder la plupart des chapitres des mathématiques enseignés plus tard. Malgré son apparente simplicité, ce type de calcul est à l'origine d'une bonne partie des échecs scolaires en mathématiques. Or, on ne peut pas théoriser sur l'apprentissage des mathématiques en considérant seulement les situations et le symbolisme utilisés. Dans la résolution des équations, et dans tout autre travail mathématique, il est essentiel d'analyser *la signification* que les experts et les élèves peuvent donner aux symboles et aux transformations algébriques qu'ils utilisent. Ces analyses sont des outils pour le maître.

En effet, le rôle de médiation du professeur passe, en principe, par l'analyse et la correction des erreurs. Il est donc capital pour lui de pouvoir inférer avec finesse ce qui manque ou qui est erroné dans la représentation mentale que l'élève se donne d'un problème particulier et plus largement, de la méthode algébrique de résolution qu'il utilise.

C'est ainsi que le professeur peut guider l'élève dans la construction des connaissances. Le niveau des connaissances acquises par l'élève, dans l'apprentissage de la résolution des équations, conditionne la réussite des exercices difficiles ainsi que la réussite, plus tard, de la résolutions de systèmes d'équations, inéquations...

L'analyse des tâches et l'analyse des erreurs nous donnent des indications précieuses sur les connaissances mathématiques qui manquent à un élève à un moment donné, ainsi que des obstacles qu'il doit surmonter dans l'apprentissage de l'algèbre. L'analyse de l'évolution des erreurs dans le processus d'apprentissage, nous donne des indications concernant le processus de construction des connaissances (processus de conceptualisation) *dont le professeur est le guide.*

Dans l'enseignement que nous avons construit, pour deux classes (l'une de 4ème et l'autre de 5ème), les élèves ont résolu alternativement des équations mathématiques données et des problèmes énoncés en langage naturel. Néanmoins, dans le présent article nous allons analyser seulement *le processus de résolution algébrique des équations* car, d'une part, la résolution d'équations données est une tâche scolaire (elle mérite donc d'être analysée) et, d'autre part, nous avons constaté une relative indépendance entre les processus de mise en équation et de résolution algébrique des équations qui concerne prioritairement les propriétés mathématiques des transformations utilisées.

L'apprentissage de l'algèbre établit une rupture avec la méthode arithmétique apprise auparavant. L'élève doit rapidement passer d'un état de connaissances à un autre qui fait appel à des démarches totalement nouvelles. Dans la résolution des équations mathématiques, par exemple, l'élève va devoir abandonner le traitement arithmétique et le remplacer par l'application de transformations successives conduisant à une suite d'équations équivalentes. Par conséquent, il nous semble particulièrement intéressant d'analyser les processus cognitifs mis en jeu par les élèves (construction de fausses règles, stratégies développées...) au moment de l'introduction de l'algèbre.

L'analyse et la classification des erreurs commises par les élèves nous ont permis d'explorer les difficultés du calcul littéral ainsi que le fonctionnement cognitif des élèves. D'une part, l'analyse d'une erreur particulière permet d'identifier les connaissances qui manquent au sujet et, d'autre part, les classes d'erreurs construites *empiriquement* permettent d'identifier les bases de l'organisation de la conduite de celui qui sait résoudre les équations. Nous proposons, à la fin de l'article, un modèle cognitif de la méthode de résolution de l'expert (le professeur, par exemple) en termes de *principes* qui guident sa pensée. Le premier enseignement que nous en avons retiré est que souvent les bases conceptuelles du comportement (par exemple la priorité des opérations) ainsi que les mécanismes de contrôle sont totalement implicites dans le fonctionnement de l'expert et de l'élève, plus ou moins avancé, dans le processus de construction de ses connaissances.

Cadre théorique

La somme de connaissances mathématiques mise en jeu dans la résolution des équations est très vaste; il est donc important de dégager des critères de sélection et de hiérarchisation de ces connaissances. En effet, nous voulons identifier *les connaissances essentielles que l'élève doit construire* dans la résolution des équations. Pour cela, l'analyse des tâches est conduite conjointement à l'analyse et à la classification des erreurs par rapport à la propriété mathématique non respectée. Ces analyses sont présentées au fur et à mesure. Le concept théorique d'*invariant opératoire* permet de rendre compte de ces connaissances essentielles utilisées ou non par les élèves.

Le concept d'invariant opératoire a été proposé par Piaget et reformulé plus tard dans Vergnaud (1990) pour prendre en compte des aspects conceptuels de la pensée notamment dans des situations d'apprentissage. On appelle *invariants opératoires* certaines connaissances, souvent implicites, qui permettent la recherche de l'information pertinente (par rapport au but recherché), de faire des inférences et des anticipations. Donc, l'organisation de la conduite du sujet, conditionnant sa performance, va dépendre principalement des invariants opératoires qu'il a construits au cours des apprentissages scolaires et par son travail personnel.

Vergnaud (1990) distingue deux types d'invariants opératoires : des concepts-en-acte (des concepts construits pragmatiquement par les sujets) et des théorèmes-en-acte (par exemple des propriétés mathématiques, vraies ou fausses, construites pragmatiquement par les élèves). Existe également des invariants plus généraux, d'un autre niveau de conceptualisation. Par exemple Piaget (1950) considère les principes de conservation de la physique (la conservation de l'énergie par exemple) comme des invariants opératoires de la pensée physique :

> les principes de conservation [...]constituant à la fois les absolus de la réalité considérée et les invariants opératoires de processus déductif servant à atteindre cette réalité,[...] (p. 8).

Ce dernier type d'invariant opératoire fait partie de ceux que nous avons identifiés, nous les nommons : *des principes*. En effet, la maîtrise du calcul littéral implique de savoir résoudre un vaste ensemble d'exercices et pour cela le sujet doit être capable d'identifier différentes classes de situations et de surmonter bon nombre de difficultés. Ainsi, l'organisation de la conduite dans le calcul littéral est guidée, au moins chez les experts, par *des principes*.

Quelques éléments de méthodologie

Les significations construites par les élèves au cours des apprentissages dépendent fortement de la richesse des situations auxquelles ils se confrontent. Nos élèves ont résolu un ensemble d'équations représentatif de l'ensemble (infini) des équations du premier degré à une inconnue comportant des termes numériques et coefficients rationnels. Ainsi, dans notre travail, pour mieux guider le processus de construction des connaissances (ou de conceptualisation) nous avons construit une classification des équations.

Les exercices proposés aux élèves

La classification des équations proposée a été élaborée à partir de l'identification des tâches élémentaires que la résolution algébrique comporte. Nous distinguons principalement cinq tâches, qui sont à l'origine de la plupart des erreurs au début de l'apprentissage :

*1. Des transformations algébriques concernant des nombres négatifs (*particulièrement des coefficients négatifs).

2. Des calculs numériques concernant des nombres négatifs.

3. La factorisation et la réduction des termes contenant l'inconnue.

4. Le traitement des produits de facteurs . Par exemple : $(-3)(5x+26)+65 = 7$

5. Le passage des termes contenant l'inconnue dans l'autre membre de l'équation (dans la résolution d'équations du type $ax+b=cx+d$)

Nous avons construit des équations dont la résolution nécessite une ou plusieurs des ces tâches mathématiques élémentaires. Ainsi, les élèves vont, progressivement et rapidement, se trouver face aux multiples difficultés identifiées préalablement, et à d'autres que nous n'avions pas prévues et que nous avons identifiées à partir de l'analyse des erreurs. Une analyse plus détaillée des tâches élémentaires est donnée à la fin de cet article dans l'annexe.

Expérimentation

Nous avons expérimenté dans deux classes, une classe de 4ème et une autre de 5ème, dans lesquelles les bons élèves étaient majoritaires. Le profil socioculturel de nos élèves se situe majoritairement dans les classes moyennes et favorisées parisiennes. Nous avons constitué quatre groupes de quatre élèves et chaque groupe était à la charge d'un enseignant. Le professeur de la classe avait à sa charge un peu moins de la moitié des élèves.

Les exercices proposés correspondent souvent au programme de 4ème et par conséquent, dans le travail effectué dans la classe de 5ème, nous avons débordé le programme. Nous avons expérimenté pendant 4 heures (1 heure par semaine) la résolution d'équations. La plupart des erreurs commises pendant l'expérimentation ont été corrigées et discutées en classe. Ce travail minutieux, effectué en étroite collaboration avec les élèves, nous a permis de mieux comprendre l'origine de certaines erreurs.

Influence de l'enseignement utilisé

La particularité de l'enseignement que nous avons expérimenté, notamment les règles de transformations proposées ainsi que les notations utilisées, est la source de certaines erreurs. Néanmoins, la plupart des erreurs peuvent être considérées comme des essais d'adaptation des élèves aux difficultés nouvelles; *ces difficultés étant inhérentes aux tâches mathématiques vues précédemment.* Dans ce sens, les catégories d'erreurs et les analyses proposées dans cet article se veulent d'une validité générale, c'est-à-dire indépendantes du type d'enseignement utilisé.

En effet, plusieurs travaux antérieurs sur les erreurs en algèbre montrent que dans des classes et dans des écoles différentes les erreurs qui apparaissent sont les mêmes pour la plupart (Payne and Squibb, 1990). Ce qui change, quand on change d'établissement, c'est la fréquence d'apparition de ces erreurs. Par conséquent, le type d'enseignement utilisé se reflète dans ces fréquences. De ce fait, nous n'allons pas donner les fréquences d'apparition des erreurs qui peuvent être considérées comme propres à nos classes. Par contre, les analyses des erreurs proposées se veulent bien plus générales.

Les erreurs

L'apprentissage de la résolution algébrique des équations mathématiques implique l'apprentissage de bon nombre de concepts et propriétés mathématiques. Le passage par l'erreur est quasiment une nécessité surtout dans l'abord de situations nouvelles, comme par exemple quand les élèves sont confrontés à la résolution d'équations comportant l'inconnue dans les deux membres ou des produits de facteurs.

En général, dans la littérature anglo-saxonne on donne à l'erreur dans le calcul algébrique *une seule signification,* soit conceptuelle, soit d'inattention. Payne and Squibb (1990) résume la situation et l'impasse qui en résulte. Nous considérons comme étant conceptuelles les erreurs qui proviennent de l'utilisation d'une fausse propriété mathématique ; en suivant Vergnaud, l'utilisation d'un faux théorème en acte. Par contre, les erreurs d'inattention sont analysées, dans notre étude comme dues à une absence de contrôle.

Dans le présent article nous avons trouvé que, selon le niveau des connaissances de l'élève, une erreur particulière peut avoir *deux significations possibles*, soit conceptuelle, soit une absence de contrôle. Ceci est certainement un pas en avant qui par ailleurs modifie la méthode d'analyse.

L'analyse de la signification que l'élève donne à l'erreur commise peut se faire à partir de la connaissance que nous avons de nos élèves, la place de l'erreur dans le travail de l'élève ainsi que le commentaire que l'élève peut faire sur sa propre erreur (extrait des enregistrements réalisés).

Or, quand l'analyse de l'erreur se fait seulement à partir des traces écrites, lors des tests notamment, l'analyse est guidée, principalement, par la nature systématique ou pas, qui différencie, dans la plupart des cas, une erreur conceptuelle d'une erreur de contrôle. L'analyse de la nature systématique ou pas de l'erreur, est le critère utilisé par la plupart des auteurs qui ont travaillé sur les erreurs dans le calcul algébrique. Ce type d'analyse permet de faire un diagnostique approximatif de la nature de l'erreur.

Nous avons d'abord analysé et classé les erreurs commises par rapport *à la propriété mathématique non respectée,* indépendamment de la forme visuelle de l'erreur. Nous avons construit, par filiation conceptuelle, des catégories de plus en plus larges. Parallèlement, la prise en compte de la nature systématique ou non de l'erreur et du contexte de production de l'erreur (du moment dans le processus de conceptualisation, post-test par exemple, ainsi que le type d'équation traitée) nous a permis de repérer les erreurs dues *à une absence de contrôle.*

Nous avons pu ainsi classer toutes les erreurs dans cinq catégories :

1. Des erreurs concernant le concept d'équation et d'inconnue.

2. Des erreurs dans les transformations algébriques identiques dans les deux membres de l'équation.

3. Des erreurs qui concernent le choix de l'opération prioritaire.

4. Des erreurs dans l'écriture d'une nouvelle équation: absence de contrôle.
5. Des erreurs dans les calculs numériques.

1. Les erreurs qui concernent le concept d'équation et d'inconnue

Les concepts d'équation et d'inconnue ont été explorés par les élèves dès la première leçon.

- L'inconnue

Dans la mise en équation de problèmes les élèves conceptualisent l'inconnue comme une grandeur inconnue. Ensuite, dans la résolution d'équations mathématiques données l'inconnue prend la signification d'un nombre inconnu.

- L'équation

A partir de la résolution de problèmes « de la réalité », énoncés en langage naturel (c'est-à-dire en français), les élèves apprennent à identifier les éléments qui composent l'équation (termes, membres, facteurs), ainsi que la signification du signe égal qui exprime, en général, l'*équivalence de deux mesures*. Lors de la résolution d'équations données les élèves construisent la signification du signe égal : *équivalence de deux expressions contenant un nombre inconnu.*

• Quand l'équation et l'inconnue sont données, l'éventail d'erreurs concernant les concepts d'équation et inconnue est très réduit. Ainsi, dans le post-test, un seul type d'erreur apparaît: bon nombre d'élèves arrêtent leur calculs quand ils arrivent à une équation telle que -w=10,66 où l'inconnue est précédée par le signe moins et l'expression finale : *w=-10,66* n'est pas écrite. Les élèves ont conceptualisé l'inconnue comme un nombre inconnu, or, un nombre est différent de son opposé (7 est différent de -7); bon nombre d'élèves donnent à -w le statut d'inconnue.

• Par contre dans le processus de mise en équation de problèmes énoncés en langage naturel les élèves doivent écrire l'équation et l'inconnue. Nous constatons une grande quantité d'erreurs concernant les concepts d'équation et d'inconnue. Dans ces équations erronées les élèves expriment souvent une correspondance entre mesures au lieu d'une équivalence. L'inconnue a parfois la signification d'une unité ou symbolise un objet.

Les concepts d'équation et d'inconnue englobent des connaissances mathématiques essentielles pour donner du sens aux transformations algébriques.

2. Les erreurs dans les transformations algébriques identiques dans les deux membres de l'équation

L'application d'une transformation algébrique permise à une équation du premier degré conduit à une nouvelle équation, qu'on appelle équation équivalente, ayant la même solution (ou le même ensemble de solutions). Deux règles de transformations furent proposées aux élèves :

1. *On additionne ou on soustrait le même nombre à chaque membre de l'équation et on obtient une nouvelle équation équivalente*
(ces transformations sont explicitées au début de l'apprentissage de la façon suivante, par exemple : 5t-50=125 ; 5t-50+50=125+50 ; ...)
2. *On multiplie (ou on divise) par le même nombre chaque membre de l'équation et une nouvelle équation équivalente est obtenue*

(ces transformations sont explicitées au début de l'apprentissage de la façon suivante, par exemple : 3x=21 ; $\frac{3x}{3} = \frac{21}{3}$; x=7)

Ces deux règles constituent la méthode de résolution proposée, souvent, dans les manuels scolaires de la classe de 4ème. Premièrement, ces règles explicitent des propriétés mathématiques; elles sont des théorèmes donnés sans démonstration. En général, ces théorèmes sont considérés comme autojustifiés. Ces théorèmes vont devenir des invariants opératoires pour les élèves dans le processus de transformation des équations.

Par ailleurs, ces règles ont un but opératoire; elles ont été données pour produire des transformations. Elles sont des outils, des artefacts symboliques. Dans ce sens, ces deux règles contiennent les aspects les plus importants de la méthode algébrique. D'une part, on explicite que les transformations algébriques sont faites *sur* l'équation, ce qui conduit les élèves, à la demande des enseignants, à utiliser les écritures vues précédemment. D'autre part, on annonce l'obtention d'une séquence d'équations équivalentes qui conservent la (ou les) solution(s). Ces règles s'appliquent aussi aux transformations algébriques concernant les termes contenant l'inconnue, particulièrement l'addition ou la soustraction d'un nombre inconnu.

Pendant le processus d'apprentissage, les élèves doivent articuler ces deux règles avec les autres transformations algébriques qui se font sur un seul membre de l'équation (développement, factorisation, réduction de termes....)

- Critère de classification de la présente classe d'erreurs

Les deux règles données ont une propriété commune : on effectue des opérations identiques dans les deux membres de l'équation. Le non respect de cette propriété est le critère unificateur de la première classe d'erreurs.

En effet, les erreurs, répertoriées dans cette classe, commises par les élèves en effectuant des transformation additives ou multiplicatives à différents moments, et en utilisant des notations plus ou moins explicites, ont en commun le fait que *des opérations différentes on été réalisées dans chaque membre de l'équation.*

- La conservation de l'égalité

Les transformations qui se font identiquement dans les deux membres de l'équation, ainsi que toute autre transformation permise, conservent l'égalité. En effet, lors d'une transformation permise le signe « égal » se conserve : on passe à une autre égalité. La conservation du signe « égal » est un phénomène observable lors de processus mathématiques différents: la transformation d'une équation, d'un système d'équation, d'une fonction... Dans chaque cas le signe « égal » véhicule des signification précises qui sont aussi conservées.

- Qu'est ce qu'on conserve dans le processus de transformation des équations ?

Par exemple l'équation (-8) 3x+15= 2x-50 est une égalité entre deux expressions contenant l'inconnue x. Cette égalité peut être vraie pour une valeur particulière de x (alors les deux expressions sont *équivalentes*) ou fausse autrement. Une transformation permise, par exemple : (-8)3x+15-15= 2x -50-15 permet *de conserver la valeur de vérité présente dans la première équation :* les équivalences possibles sont conservées. On conserve donc la nature équivalente de deux expressions qui changent.

La conservation de l'égalité est *un principe* qui exprime la filiation de toutes les transformations algébriques qu'on peut faire sur une équation car elle est la propriété commune des transformations. *Chez l'expert (le professeur, par exemple), ce principe est* *un invariant opératoire souvent implicite.* Du point de vue cognitif, ce principe s'avère être la propriété majeure du processus de résolution.

La conservation de la solution est une propriété très importante. Or, elle ne peut se vérifier qu'à posteriori (au moins dans le cadre scolaire), une fois que la solution a été calculée. Donc, la conservation de la solution, même si elle est annoncée, ne constitue pas un invariant opératoire qui puisse guider la pensée dans le processus de résolution.

La conservation de l'égalité exprime la conservation des équivalences et des solutions lors de la résolution des équations, de systèmes d'équation... Dans le cas de la réécriture d'une fonction, la conservation de l'égalité exprime la conservation d'une identité.

2 a. Erreurs dans les transformations additives

2 a.1. Seulement un membre de l'équation est transformé

L'élève utilise la fausse règle « supprimer un terme » :

- dans le traitement de termes numériques (pour la plupart négatifs), par exemple :

 5t-50=125 ; 5t-50**+50**=125 ; 5t=125

- dans le traitement des termes contenant l'inconnu, par exemple :

 17z+45=5z+21 ; 17z+45=5z**-5z**+21

Cette erreur montre une difficulté conceptuelle au début de l'apprentissage car les élèves construisent une fausse règle qui organise une partie du processus de résolution. Cette fausse règle est un exemple de faux théorème-en-acte.

2 a.2. Des transformations différentes sont effectuées sur chaque membre de l'équation : un terme est additionné dans un membre et soustrait dans l'autre

- dans le traitement de termes numériques négatifs, par exemple :

 78,6=26,2x-44 ; 78,6**-44**=26,2x-44**+44**

- dans le traitement de termes numériques positifs; par exemple :

 -37=6v+65 ; -37**+65**=6v+65**-65**

- dans le traitement des termes contenant l'inconnue, par exemple :

 11x=14x-30 ; **14x**-11x=14x-*14x*-30

D'une manière générale la fausse règle utilisée pourrait s'énoncer comme *« le résultat de la transformation est un nombre moins l'autre »* et dans la plupart des cas un résultat positif est obtenu.

On remarque, *au post-test*, que dix élèves, souvent les plus performants, font ce type d'erreur sporadiquement et pour la plupart dans la résolution des exercices les plus simples : ces élèves travaillent vite. Ces erreurs peuvent être analysées, pour la plupart, comme dues à une absence de contrôle, par exemple :

- le signe de la transformation n'est pas correctement anticipé :

 4y+49=93 ; **93**+4y+49=93**-93**

- dans la lecture de l'équation un signe moins glisse d'un terme à un autre terme juxtaposé:

 78-m=33 ; 78-m**+78**=33**+78** ; -m=111

- difficultés dans la lecture de l'équation, par exemple:

 6w+32=-32 ; 32**-32**+6w=-32**+32** ; 6w=0

Le dernier exemple montre clairement que pour contrôler la validité de la deuxième équation l'élève *doit se référer à l'équation précédente.*

2 a.3. Les transformations additives ne sont pas notées explicitement. Le signe du terme transféré à l'autre membre de l'équation ne change pas

• dans le traitement des termes numériques négatifs, par exemple :

95=55,7x-150 ; **-150**+95=55,7x

• dans le traitement des termes numériques positifs, par exemple :

-37=6v+65 ; -37**+65**=6v

• quand les élèves effectuent plusieurs transformations en passant d'une équation à la suivante, par exemple :

$5t - 50 = 125$; $t = \dfrac{125\mathbf{-50}}{5}$

ou 2,3x=58x-245 ; 2,3-58x**-245=**0

Les exemples d'erreurs que nous venons de voir ont été relevées au début de l'apprentissage. D'une part, certaines erreurs sont conceptuelles (les élèves utilisent la fausse règle vue précédemment: « le résultat de la transformation est un terme moins l'autre »). D'autre part, certaines de ces erreurs peuvent être dues à une absence de contrôle, notamment dans la classe de 4ème, car ces élèves travaillent vite et abrègent les étapes écrites. Par exemple, dans la lecture de l'équation: 39-3x=125 ; 3x=125**+39** le signe moins glisse d'un terme à l'autre.

Dans *le post-test* neuf élèves de 4ème font ce type d'erreur dans la résolution des exercices les plus faciles; voici quelques exemples:

Transfert d'un terme :	78-m=33 ; -m=**78**+33
	4y+49=33 ; 4y=**49-33**
Transfert de plusieurs termes :	7z+30=30+4z ; 3z=**60**

On constate que les élèves les plus performants, ceux qui réussissent les exercices les plus difficiles, font ce type d'erreur dans la résolution des exercices les plus simples. Ces élèves travaillent vite et abrègent les étapes écrites, par conséquent la plupart de ces erreurs sont dues à une absence de contrôle.

2 b. Les erreurs dans les transformations multiplicatives

Le nombre d'erreurs relevées dans les transformations multiplicatives est bien moindre que celui qui concerne les transformations additives. Ceci ne préjuge en rien des difficultés intrinsèques à chaque type de transformation, en réalité les transformations multiplicatives apparaissent à la fin du processus de résolution, presque exclusivement dans la résolution des équations du type ax=b.

Les erreurs commises dans les transformations multiplicatives peuvent être analysées de la même façon que les erreurs qui apparaissent dans les transformations additives. Ces erreurs ont une double signification: d'une part, elles sont conceptuelles quand les élèves construisent des règles inappropriées (notamment au début de l'apprentissage). D'autres erreurs sont dues à une absence de contrôle de la transformation effectuée: on constate que, parfois, les élèves les plus performants, ceux qui réussissent les exercices les plus difficiles, font ce type d'erreur. Pour contrôler la validité de la nouvelle équation l'élève *doit se référer à l'équation précédente.*

2 b.1. Quelques élèves divisent seulement un terme de l'équation

Par exemple : $11x+30=14x$; $\frac{\mathbf{11x}}{\mathbf{11}}+30=14x$

Les élèves sont confrontés au traitement de l'inconnue dans les deux membres de l'équation. Ils essaient d'isoler l'inconnue au moyen d'une transformation qui ne conserve pas l'égalité (ni la solution). Cette procédure est une erreur conceptuelle.

2 b.2.- Quelques élèves effectuent une transformation sur un membre de l'équation et une autre différente sur l'autre membre

Voici des exemples:

$45=\frac{3}{2}y$; $\frac{\mathbf{3/2}}{45}=\frac{(3/2)y}{(3/2)}$; $\mathbf{(3/2)} * 45=y$

La difficulté posée par le quotient de fractions peut être à l'origine de cette erreur.

Les erreurs concernant le signe « moins » du diviseur, qui sont les plus fréquentes, peuvent être conceptuelles ou être dues à une absence de contrôle.

$-3x=86$; $\frac{-3x}{-3}=\frac{\mathbf{86}}{\mathbf{3}}$; $x=\frac{86}{3}$

Nous constatons, par exemple, que dans une classe faible de seconde plusieurs élèves utilisent systématiquement la règle suivante: *Un facteur multiplicateur devient facteur diviseur* ***et*** *change de signe en passant dans l'autre membre de l'équation :*

$-9y=99$; $y=\frac{99}{\mathbf{9}}$ ou $-9y=99$; $-y=\frac{99}{\mathbf{-9}}$

Cette règle est la généralisation de celle utilisée pour les transformations additives : *un terme change de signe quand il passe dans l'autre membre de l'équation.* Cette dernière règle est formellement correcte mais elle ne favorise pas la conceptualisation de la conservation de l'égalité.

Seulement une erreur au *post-test* :

$8x=24$: $\frac{8x}{8}=\frac{\mathbf{24}}{\mathbf{4}}$; $x=6$

Certainement cette erreur n'est pas conceptuelle, elle serait due à une absence de contrôle car cet élève effectue correctement les autres transformations multiplicatives.

2 b.3. Quelques erreurs apparaissent quand la division par le coefficient de l'inconnue n'est pas notée dans les deux membres de l'équation.

Les élèves doivent anticiper le résultat de la transformation : parfois ils inversent le numérateur et le dénominateur. Ce type d'erreur qui apparaît au début de l'apprentissage, par contre, n'apparaît pas au post-test :

$84y=-35$; $y=\frac{\mathbf{84}}{\mathbf{-35}}$

$245=55{,}7x$; $x=\frac{\mathbf{55{,}7}}{\mathbf{245}}$

Ces élèves savent que le résultat est un quotient mais il ne disposent pas d'une règle sure pour le déterminer. Nous remarquons que l'explicitation de la division par le coefficient dans les deux membres de l'équation est gardée jusqu'au post-test par la plupart des élèves. Cette explicitation de la transformation détermine le quotient résultat.

Conclusion sur les erreurs dans les transformations algébriques identiques dans les deux membres de l'équation

Dans les erreurs que nous venons d'examiner deux opérations différentes ont été réalisées sur chaque membre de l'équation. Ces erreurs sont souvent conceptuelles au début de l'apprentissage mais, pour la plupart de nos élèves, la signification de ces erreurs change au fur et à mesure que nos élèves avancent dans leurs processus de conceptualisation.

En effet, quand les élèves utilisent la bonne règle, notamment au post-test, ces erreurs sont dues à une absence de contrôle de la validité de la transformation effectuée. En général, ce qu'un expert note ou ne note pas est relié au contrôle qu'il peut exercer sur ses propres écritures. Par contre les élèves qui découvrent, au début de l'apprentissage, une nouvelle notation ainsi que l'organisation du travail algébrique (une suite d'équations) sont confrontés au dilemme suivant : écrire trop, ou pas assez, conduit à l'erreur. C'est alors que pourrait commencer la construction mentale des mécanismes de contrôle associés à un choix de notations.

Les invariants opératoires construits concernent les transformations algébriques identiques dans les deux membres de l'équation.

Au début de l'apprentissage, certains élèves construisent des fausses règles (des faux théorèmes en acte) qui isolent ou généralisent (d'une façon erronée) certaines propriétés mathématiques. Ces faux théorèmes en acte constituent des invariants opératoires qui disparaissent rapidement dans nos classes.

Les invariants opératoires utilisés par la plupart de nos élèves, à la fin de l'enseignement, sont les théorèmes énoncés dans les règles vues précédemment. Nos élèves ont construit des connaissances mathématiques, enrichies de procédures de contrôle et de notations socialement acceptables, qui permettent d'appliquer les règles à bon escient.

Dans une autre étude (qui n'a pas été encore publiée) nous explorons les justifications mathématiques que des élèves de seconde d'un lycée professionnel donnent des transformations algébriques. Nous explorons donc l'habillage conceptuel des règles qu'ils utilisent. Ces élèves utilisent des règles de transformation *concernant le passage des termes (« un terme passe dans l'autre côté en changeant de signe », « un coefficient passe dans l'autre côté en divisant »).*

Nous constatons que certains élèves ont construit des justifications mathématiques bien élaborées. Ainsi, lors des entretiens, certains élèves justifient les transformations additives et multiplicatives comme étant des opérations identiques dans les deux membres de l'équation (nous retrouvons les théorèmes énoncés dans les règles données en classe de 4ème qui sont des invariants opératoires). Parmi eux, certains élèves parlent de *conservation de la valeur de vérité* dans le processus de résolution des équations. On peut en déduire que ces élèves, très performants, ont construit un invariant opératoire plus général, un principe : *la conservation de l'égalité.*

Certains élèves justifient les règles concernant le passage des termes par l'arithmétique, ces connaissances sont leurs invariants opératoires. Beaucoup d'autres élèves ne connaissent pas les justification mathématiques de ces règles qui deviennent ainsi des théorèmes en acte difficilement généralisables. Certains élèves construisent des fausses règles, des faux théorèmes en acte (par exemple, *« un coefficient passe de l'autre coté en changeant de signe »*). La plupart de ces élèves, ayant une conceptualisation très limitée de leur méthode de résolution, sont confrontés à de grandes difficultés lors de la résolution de systèmes d'équations, d'inéquations.... pour lesquels les règles de passage des termes s'avèrent inefficaces et deviennent un obstacle.

3. Les erreurs qui concernent le choix de l'opération prioritaire

Certaines erreurs sont analysées dans la littérature internationale comme une impossibilité de lire la notation algébrique. Or, dans notre recherche ces erreurs sont analysées comme une méconnaissance des priorités des opérations. On remarque que la priorité des opérations est très peu analysée au niveau de la recherche et même au niveau de l'enseignement. Pourtant, il ressort du présent travail que l'identification de l'opération prioritaire dans le processus de résolution s'avère une difficulté majeure pour certains élèves.

En effet, chaque fois que l'élève effectue une transformation algébrique (additive, multiplicative, factorisation, développement...), notamment lorsqu'il effectue des opérations numériques dans le but de réduire des termes, la priorité des opérations doit être respectée. Or, au début de l'apprentissage, les élèves perçoivent l'équation comme une suite d'opérations arithmétiques dont l'ordre des opérations peut se faire arbitrairement : c'est alors que l'erreur survient.

Dans le calcul littéral, l'identification des opérations arithmétiques permises s'avère beaucoup plus difficile que dans les calculs purement numériques. En effet, dans le calcul littéral on laisse *en suspens les opérations arithmétiques concernant l'inconnue.* Ceci implique de ne pas essayer d'obtenir un résultat à partir de l'inconnue et son coefficient, de l'addition d'un nombre et d'un nombre inconnu...

Quelques remarques sur la priorité des opérations

Dans l'équation $6x+66=0$ la multiplication est prioritaire. Ceci signifie que le signe « plus » met en relation le nombre ($6x$) et le nombre 66, c'est-à-dire, que le produit ($6x$) doit être additionné comme un seul nombre (non dissociable). Par conséquent les additions $66+6$ ou $66+x$ ne sont pas permises.

Dans la même équation factorisée $6(x+11)=0$, le facteur multiplicatif $(x+11)$ doit être considéré comme un seul nombre (non dissociable) et, dans ce sens, l'addition devient prioritaire par rapport à la multiplication ; même si l'addition $x+11$ reste en suspens.

Par conséquent, la factorisation permet de passer à une expression où l'addition devient prioritaire et, vice versa, le développement ($6(x+11)=0$ --> $6x+66=0$) permet de passer à une situation où la multiplication est prioritaire. Ainsi, le changement d'opération prioritaire permet d'effectuer des calculs numériques qui réduisent l'équation, par exemple: $2x+6x=66$ ---> $x(2+6)=66$ --> $8x=66$

Dans le cas des transformations qui se font identiquement dans les deux membres de l'équation, l'identification des opérations prioritaires devient plus difficile pour les élèves car chaque membre de l'équation doit être traité de la même façon qu'une expression entre parenthèses. Dans ce sens, les additions qui relient les termes dans un membre d'une équation, deviennent prioritaires par rapport aux transformations effectuées sur les deux membres de l'équation.

Au fur et à mesure que les élèves avancent dans leur apprentissage ils construisent un invariant opératoire, un principe implicite : *l'identification et le respect de l'opération prioritaire,* qui guide la pensée chaque fois qu'ils transforment l'équation. Ce principe englobe les connaissances mathématiques qui permettent de décider si une transformation ou un calcul numérique est permis.

3 a. Les erreurs concernant le non respect de la priorité de la multiplication sur l'addition et la soustraction

Certains élèves effectuent des additions non permises dans des situations où la multiplication est prioritaire. Il est fort probable que les règles de commutativité utilisées dans le traitement des sommes algébriques et des produits de facteurs (*« la permutation de termes et le calcul de quelques termes n'altère pas le résultat »*) soient généralisées aux calculs comportant des multiplications et des additions (ou soustractions). Ceci est un exemple de faux théorème-en-acte : une proposition qui est considérée comme vraie par l'élève et utilisée dans la résolution de certains problèmes.

3 a.1. Le coefficient de l'inconnue ou un facteur multiplicatif est additionné à un terme indépendant:

• Un coefficient est additionné à un terme numérique :

5t-50=125 ; **-45t**=125 ou 40=**5t+22** ; 40=**27t**

Ces erreurs sont fréquentes dans la classe de cinquième au début de l'apprentissage et elles concernent aussi bien le traitement des nombres négatifs que positifs.

• D'une façon analogue certains élèves confrontés à un produit de facteurs donnent priorité à l'addition sur la multiplication :

60=**(-4)** (-9m)+**90** ; 60=**-4+90** * 9m ; 60=**86** * 9m

ou **z+4**(5-z)=-56 ; **5z-z**$^{\mathbf{2}}$+20-4z=-56

Ces erreurs conceptuelles sont fréquentes au début de l'apprentissage et disparaissent plus tard au post-test de nos classes. Par contre, on retrouve ces erreurs dans des classes faibles de seconde.

3 a.2. Dans la résolution des équations contenant un produit de facteurs certains élèves traitent un terme situé à l'intérieur de la parenthèse comme un terme indépendant

Par exemple : 3(2x+22)+34=110 ; 3(2x+**22-22**)+34=110-**22** ; 3(2x)+34=88

Dans la première équation l'addition des termes à l'intérieur de la parenthèse est prioritaire sur la multiplication par 3. Par contre, la multiplication de la parenthèse par 3 est prioritaire sur l'addition de -22 aux deux membres de l'équation et cette multiplication prioritaire n'est pas respectée. Nous remarquons une seule erreur au post-test.

La plupart de nos élèves sont capables de développer ou factoriser une expression quand il s'agit de résoudre des exercices dans lesquels la factorisation ou le développement sont demandés explicitement. Ce qui pose problème dans la résolution des équations est l'articulation de ces transformations avec les transformations additives et multiplicatives (qui se font dans les deux membres de l'équation) car il est nécessaire, alors, d'identifier dans quelles situations une opération est prioritaire sur l'autre.

3 a.3. Un produit de facteurs est traité comme ayant les mêmes propriétés qu'une addition de termes

Par exemple, le produit *ax* peut être traité comme ayant les mêmes propriétés que l'addition *a+x.*

• dans le traitement du coefficient de l'inconnue :

5t-50=125 ; 5t-**5**-50=125-**5** ; t-50=120

Les élèves isolent l'inconnue au moyen de la transformation additive qu'ils découvrent au début de l'enseignement (1/3 des élèves dans nos classes), même s'ils savent que 5-5=0. Le coefficient et l'inconnue sont traités séparément, la nature multiplicative du terme est ignorée. Ce type d'erreur disparaît très vite, il n'apparaît pas au post-test.

• dans la résolution des équations où l'inconnue apparaît dans les deux membres :

11x-**11x**+30=14x-**11x** ; **x**+30=3x

Dans cet exemple la transformation additive est pertinente et l'erreur survient au moment de la réduction des termes. L'inconnue et son coefficient sont traités indépendamment l'un de l'autre: le nombre 11 disparaît et x reste. Cette erreur met en évidence une difficulté dans la conceptualisation de l'inconnue comme un nombre. Ce type d'erreur n'apparaît pas au post-test.

• dans la résolution des équations contenant un produit de facteurs noté avec des parenthèses :

3(2x+22)=76 ; 3(2x+22)-**3**=76-**3** ; 2x+22=73

ou (-4)(-3x+6)**+4**=(-5)(2x-7)**+4** ; (-3x+6)=(**-1**)(2x-7)

Pendant l'apprentissage ces produits de facteurs sont traités comme ayant les mêmes propriétés qu'une addition de termes. On remarque une seule erreur au post-test de nos classes.

Au *post-test* d'autres classes, on remarque des difficultés dans le traitement de produits de facteurs notés avec des parenthèses, par exemple :

3(12-2t)+72=180+2t ; 3+72-180=**-12+2t**+2t

Dans ces classes les élèves utilisent la règle: *« un terme passe de l'autre côté du signe 'égal' en changeant de signe »* qui conduit à des écritures plus abrégées. Ces élèves effectuent, implicitement, une transformation additive qui ne respecte pas la priorité de la multiplication.

Dans la littérature internationale la plupart des auteurs suivent l'analyse proposée dans Sleeman (1984) où une partie de ces erreurs a été analysée comme *« une profonde incompréhension de la notation algébrique ».* Or la notation algébrique ne donne aucune indication concernant la priorité des opérations. La grande majorité de ces élèves reconnaissent les multiplications qui apparaissent dans les équations ; la difficulté réside donc dans l'identification de l'opération prioritaire selon la situation à laquelle ils sont confrontés.

3 b. Les erreurs concernant le non respect de la priorité de l'addition et la soustraction sur la multiplication

Dans un produit de facteurs du type (a)(bx+c), l'addition des termes bx+c est prioritaire sur la multiplication par (a) ; cette priorité est induite au moyen de l'utilisation de parenthèses. En général, cette propriété est introduite dans l'enseignement des mathématiques comme une propriété de la multiplication : la distributivité de la multiplication sur l'addition et la soustraction.

3 b.1. Une règle erronée est utilisée dans le développement d'un produit de facteurs : seulement un terme est multiplié

Par exemple :

3 (2x-2+24)+34=110 ; **3*2x**+22+34=110

Cette règle est aussi un exemple de faux théorème-en-acte, une construction des élèves qui repose sur la généralisation de la priorité de la multiplication valable pour la plupart des transformations effectuées sur les équations précédentes. Ces élèves n'intègrent pas la « distributivité » de la multiplication, explorée avant la résolution des équations, dans leurs stratégies de résolution.

Une seule erreur au post-test, qui est due plutôt à une absence de contrôle :

(-4) (3-6x)... ; **-12**+6x...

l'élève multiplie les signes correctement mais la multiplication du deuxième nombre est omise.

3 b.2. Certains élèves effectuent des transformations multiplicatives erronées. Ils multiplient par un nombre un seul terme dans chaque membre de l'équation

$57 = \frac{3}{2}\,y + 12$; $\mathbf{\frac{2}{3}}\,57 = \frac{3}{2}\,y\mathbf{\frac{2}{3}} + 12$

Dans cet exemple l'addition $\frac{3}{2}$ y +12 est prioritaire sur la multiplication par $\frac{2}{3}$. Cette priorité de l'addition (qui n'est pas induite par des parenthèses*) est nécessaire à la conservation de l'équivalence.* Ainsi, le respect de cette propriété fondamentale guide le processus de résolution et conduit à traiter l'expression $\frac{3}{2}$ y +12 de la même façon qu'une expression entre parenthèses.

3 b.3 . La factorisation n'est pas reconnue

Dans le post-test les élèves sont confrontés à la résolution de l'équation suivante : (-4) (3-6x)+30=x(3-3,5+2,5)+100. La plupart des élèves développent le produit de facteurs x(3-3,5+2,5) qui devient 3x-3,5x+2,5x et ensuite 2x dans la suite d'équations équivalentes. Cette procédure n'est pas une erreur, néanmoins elle montre que les élèves ne perçoivent pas l'utilité d'effectuer des additions (qui sont permises) avant d'effectuer la multiplication. La réduction des termes s'effectue au moyen de la règle *du comptage des x* ; règle de nature stéréotypique, difficilement justifiable car la justification mathématique réside précisément dans la factorisation.

3 c. Les erreurs concernant le non-respect de la priorité de la division sur l'addition et la soustraction

Des erreurs telles que : $\frac{1}{3} = \frac{1}{x} + \frac{1}{7}$; 3 = **x+7** et beaucoup d'autres, ne tiennent pas compte de la priorité de la division. Ces erreurs sont fréquentes dans des classes plus avancées. Dans notre expérimentation ce type d'erreur n'apparaît pas car les élèves n'ont pas résolu des équations comportant l'inconnue dans le dénominateur ; ces exercices débordant le programme traité.

3 d. Les erreurs concernant le non-respect de la priorité de l'addition et la soustraction sur la division

Certains élèves effectuent des transformations multiplicatives à un moment de leurs calculs où ces transformations ne sont pas pertinentes. *Ils divisent par un nombre un seul terme dans chaque membre de l'équation :*

• dans la résolution des équations du type ax+b=c : $-4z+z=-76$; $\frac{-4z}{4}+z=\frac{-76}{4}$

• dans la résolution des équations où l'inconnue apparaît dans les deux membres de l'équation: $109y=25y-35$; $\frac{109}{25}y=\frac{25}{25}y-35$

• dans la résolution des équations contenant un produit de facteurs :

$$60=(-4)(-9m)+90 \; ; \; \frac{60}{(-4)}=\frac{(-4)}{(-4)}(-9m)+90$$

Dans ce type d'erreur nous remarquons que les élèves transforment les deux membres de l'équation. Or, la priorité de l'addition, *nécessaire à la conservation de l'équivalence*, n'est pas respectée. Il est fort probable que ces élèves traitent la division comme étant une opération prioritaire sur l'addition dans toute situation, en accord avec un faux théorème-en-acte : « d'abord on divise et ensuite on additionne ». Cette erreur n'apparaît pas au post-test.

Conclusion sur les erreurs commises dans la choix de l'opération prioritaire

Dans l'ensemble des erreurs que nous venons d'analyser des opérations non permises ont été effectuées : l'opération prioritaire n'a pas été respectée. La plupart des élèves reconnaissent les multiplications et les divisions qui apparaissent dans les équations résolues, ces erreurs ne sont donc pas dues à une mauvaise lecture de la notation algébrique. Ces erreurs sont donc conceptuelles car ces élèves ne font pas appel à toutes les connaissances mathématiques qui permettent de décider si une opération est permise ou pas.

Les erreurs que nous venons d'analyser sont très nombreuses au moment où l'élève rencontre pour la première fois un nouveau type d'exercice (comme par exemple des équations contenant l'inconnue dans les deux membres ou des équations contenant un produit de facteurs). Ces erreurs sont donc fréquentes pendant le processus d'apprentissage et très rares au post-test, dans nos classes. Par contre, nous remarquons que dans des classes faibles de seconde, bon nombre d'élèves font systématiquement des transformations et des opérations qui ne respectent pas la priorité des opérations.

La plupart de nos élèves considèrent que les transformations erronées qu'ils effectuent sont pertinentes, or ces transformations ne sont pas permises. Par conséquent l'intention d'appliquer une règle correcte (donc de conserver l'égalité) ne suffit pas. Les règles données, pour être efficaces doivent être « habillées » par des connaissances mathématiques : c'est le processus de conceptualisation de la méthode de résolution.

La méthode de résolution est résumée par les auteurs et les professeurs par des règles qui font référence à la conservation de l'égalité. Nous constatons que les élèves, chaque fois qu'ils effectuent une transformation, notamment un calcul numérique qui permet de réduire des termes, se confrontent à une autre tâche élémentaire : l'identification et le respect de l'opération prioritaire. Ils doivent donc construire l'ensemble de connaissances mathématiques qui permettent de décider si une opération est permise ou pas. Cet ensemble de connaissances constitue *un invariant opératoire*, un principe qui guide la pensée, qui établit une filiation entre les différentes transformations qu'ils effectuent et qui nécessitent toujours *l'identification et le respect de l'opération prioritaire.* Le respect de ce principe est nécessaire à la conservation de l'égalité.

4. Les erreurs dans l'écriture d'une nouvelle équation : absence de contrôle

Dans un premier temps, l'écriture d'une nouvelle équation explicite la transformation effectuée, elle comporte donc des termes ou des facteurs nouveaux qui préparent des calculs numériques dans le but de réduire des termes. Ensuite, l'écriture d'une nouvelle équation comporte des termes nouveaux exprimant les résultats numériques obtenus. Cette nouvelle équation est l'aboutissement d'une ou plusieurs transformations algébriques effectuées. Certains élèves abrègent leurs écritures et écrivent seulement l'équation résultante, comportant des résultats numériques, dont le contrôle est encore plus difficile.

Certaines erreurs sont dues à l'absence de contrôle de la nouvelle équation écrite. Premièrement, les élèves ne contrôlent pas exhaustivement le transfert de termes non transformés (de l'équation précédente) vers la nouvelle équation. Deuxièmement, les élèves ne contrôlent pas la correspondance entre les signes des résultats numériques notés sur la nouvelle équation et les opérations numériques notées ou inferées sur l'équation précédente en cours de transformation.

4 a. Omission ou écriture incorrecte d'un terme dans la nouvelle équation

• Un terme a été omis ou mal recopié dans la nouvelle équation :

$57=\frac{3}{2}y+\mathbf{12}$; $57=1{,}5y$ ou $\mathbf{-37}=6v+65$; $6v+65=\mathbf{-65}$

ou $\mathbf{z}+20-20-4z=-56-20$; $-4z=-76$

• Une opération numérique a été notée et laissée en suspens dans la première équation. Cette opération numérique n'est pas conservée : un des deux nombres n'est pas reporté sur la nouvelle équation $z+20-4z-20=\mathbf{-56-20}$; $z-4z=\mathbf{-56}$ ou $\frac{8x}{8}=\frac{\mathbf{-24}}{\mathbf{8}}$; $x=\mathbf{-24.}$

En général, des deux opérations notées, seul l'annulation des termes ou la simplification du coefficient est effectuée. Ces erreurs sont très fréquentes au post-test.

4 b. Omission d'un signe « moins » dans la nouvelle équation

La fréquence de cette erreur est telle qu'elle mérite une analyse détaillée. Plusieurs situations sont à considérer.

4 b.1. Un terme est reporté dans la nouvelle équation et le signe « moins » est omis

En général ces erreurs concernent des termes contenant l'inconnue.

39-39-**3x**=125-39 ; **3x**=86

Au début de l'apprentissage, les élèves ont des difficultés à travailler avec l'inconnue précédée d'un signe « moins » et celui-ci peut être omis arbitrairement ; il s'agit alors d'une erreur conceptuelle. Tandis que plus tard, au post-test de nos classes ces erreurs sont dues à une absence du contrôle du transfert de termes. La fréquence de cette erreur est due au fait que les termes contenant l'inconnue sont reportés plusieurs fois dans la suite d'équations écrites car les élèves traitent d'abord les nombres et ensuite l'inconnue qui est gardée jusqu'à la fin. Ces erreurs sont fréquentes mais elles ne sont pas systématiques.

Par contre cette erreur est conceptuelle chez certains élèves des classes faibles de seconde qui considèrent que le signe « moins » indique une opération entre deux termes et qu'il disparaît quand un terme passe de l'autre coté de l'équation :

39-3x=125 ; 3x=125-39

4 b.2. Omission du signe moins dans l'écriture du résultat d'une addition de nombres relatifs

- dans l'addition de termes numériques :

-37-65=6v+65-65 ; **102**=6v ou 40-40-5t=**22-40** ; -5t=**18**

- dans l'addition de coefficients de l'inconnue :

109y-109y+35=**25y-109y** ; 35=**84y**

L'addition de coefficients est souvent triviale et de ce fait il y a moins d'erreurs ; ceci n'implique pas que ces résultats numériques soient contrôlés pour autant.

Dans le calcul mental ou dans le calculs sur un brouillon, l'addition de deux nombres négatifs, par exemple -37-65, s'effectue comme une addition de deux nombres positifs (37+65), laquelle doit être précédée d'un signe moins. D'une façon analogue la soustraction de 22-40 se fait, en général, comme la soustraction du plus petit nombre au plus grand (40-22), laquelle doit être précédée d'un signe moins. Il semble que très souvent ces opérations se font en deux temps et le signe du résultat est analysé ou oublié dans le deuxième temps.

Les transformations algébriques se font sur l'équation, tandis que les calculs numériques sont effectués à l'extérieur de l'équation (mentalement, sur un brouillon, sur une machine...). Ces résultats numériques sans signe moins montrent bien qu'il n'y a pas de contrôle du résultat écrit par rapport à l'opération numérique posée dans l'équation précédente.

4 b.3. Omission du signe moins dans l'écriture du résultat d'une division

- dans la simplification du coefficient de l'inconnue :

$\frac{\mathbf{-3x}}{\mathbf{3}} = \frac{86}{3}$; $x = \frac{86}{3}$

• dans des divisions non triviales :

$\frac{-3x}{-3} = \frac{\mathbf{86}}{\mathbf{-3}}$; $x = \mathbf{28{,}6}$

L'absence de contrôle est à l'origine de la grande quantité de ces erreurs relevées au post-test de nos classes. Il semble que très souvent ces opérations se font en deux temps et le signe du résultat est analysé ou oublié dans le deuxième temps.

Certains élèves, dans des classes faibles, font ce type d'erreur systématiquement (fausse règle : « *le coefficient passe de l'autre côté de l'équation en changeant de signe* ») ; cette erreur est alors conceptuelle : -3x=86 , $x = \frac{86}{3}$

4 c. Un signe moins est arbitrairement introduit dans la nouvelle équation

Par exemple :

-9y=**99** ; $y = \frac{\mathbf{-99}}{-9}$

109y-25y se transforme en **-84**y

Ces erreurs concernent aussi bien l'addition que la division de nombres relatifs.

Conclusion sur les erreurs commises dans l'écriture d'une nouvelle équation, concernant l'absence de contrôle

Les erreurs que nous venons d'analyser ont été commises par tous les élèves, même les plus performants. Ces erreurs, au post-test de nos classes, ne sont pas conceptuelles, sauf exception, et elles ne sont pas systématiques même si elles sont très fréquentes. Dans la littérature on désigne ces erreurs comme « faute d'attention » (slip en anglais). Or, cette désignation est trop générale et cache un phénomène important: *le contrôle de ce qui vient d'être écrit fait partie de la méthode algébrique.* Ces erreurs sont dues à l'absence d'un processus de contrôle propre au calcul algébrique.

Le processus de contrôle que nous venons d'examiner se manifeste par un constant mouvement entre l'équation qui vient d'être écrite et la précédente dans le but *de vérifier que tous les termes ont été reportés* (première règle) ainsi que *la validité des signes des résultats numériques écrits* par rapport aux opérations numériques notées ou inférées dans l'équation précédente (deuxième règle). On peut faire l'hypothèse, alors, que la méthode de résolution algébrique construite par un expert comporte, implicitement, ces deux règles.

- Invariant opératoire de procédure: le contrôle algébrique

Nous avons vu précédemment un autre type de contrôle. En effet, lorsque une transformation est posée, la nouvelle équation doit être contrôlée par rapport à l'équation précédente, même si on emploie la bonne règle de transformation. On exerce alors un contrôle conceptuel : *le contrôle de la validité de la transformation écrite*; c'est-à-dire que ce qu'on vient d'écrire correspond à ce qu'on se propose de faire.

Par conséquent, *le contrôle de la validité de la transformation écrite* ainsi que *le contrôle du report de termes et le contrôle des résultats numériques sur la nouvelle* *équation* font partie de la tâche de résolution, ces trois règles constituent un invariant opératoire de procédure : *le contrôle algébrique.* La prise en compte de cet invariant se manifeste par un va-et-vient entre la nouvelle équation et la précédente; le non respect de cet invariant est à l'origine de nombreuses erreurs même quand le processus de conceptualisation est accompli (les erreurs de l'expert par exemple).

Le contrôle algébrique comporte aussi le contrôle de la validité de la solution par substitution (de l'inconnue par la solution obtenue) dans l'équation initiale. *Nos élèves connaissent ce type de contrôle* et l'utilisent dans certaines situations, notamment lors de la résolution de problèmes énoncés en langage naturel qui nécessitent une mise en équation. Or cette substitution n'est pas utilisée lors de la résolution d'équations mathématiques en situation de test. En situations d'enseignement, par économie de temps ou pour pouvoir discuter de l'erreur, nous avons validé le résultat trouvé par l'élève et la substitution ne s'effectue pas.

5. Les erreurs dans les calculs numériques

On relève un grand nombre de calculs numériques erronés tout le long du processus d'apprentissage et dans le post-test. Certaines erreurs sont conceptuelles, d'autres sont dues à une absence de contrôle.

5 a. Les erreurs dans les calculs numériques concernant les nombres relatifs

5 a.1. L'addition de nombres relatifs

-56-20 aboutit à -36
-6t-2t aboutit à -4t

L'addition de deux nombres négatifs est la source d'erreur la plus fréquente. Pour certains élèves ces erreurs sont conceptuelles au début de l'apprentissage (on utilise une règle non pertinente).

Pour d'autres élèves il peut s'agir d'une absence de contrôle de la validité de la règle utilisée. Ainsi, une mauvaise lecture de l'opération notée peut conduire au choix d'une règle inappropriée. Ces erreurs sont dues alors à une absence de contrôle algébrique : il n'y a pas de retour à l'équation précédente et le résultat noté n'est pas contrôlé par rapport à l'opération notée (ou inférée) dans l'équation précédente. Certaines erreurs très grossières peuvent ainsi s'expliquer, par exemple :

57-12 aboutit à 69
11x-14x aboutit à 25x

5a.2. La multiplication de nombres relatifs

60=(-4) (-9m)+90 ; 60=**-36**m+90

Ces erreurs sont nombreuses dans notre classe de 5ème au début de l'apprentissage; ces erreurs sont conceptuelles, les élèves utilisent une fausse règle.

Certains élèves donnent le même signe à tous les résultats des produits de facteurs. Quand le premier signe est erroné, nous pensons à une difficulté conceptuelle (fausse règle), par exemple :

(-4) (-3x+6) aboutit à -12x-24

Par contre quand le premier signe est correct, par exemple :

$(-4)(-3x+6)$ aboutit à $12x+24$

$(-4)(3-6x)$ aboutit à $-12-24x$

Nous pensons que, dans nos classes, l'origine de la plupart des ces erreurs réside dans une absence de contrôle algébrique : il n'y a pas de retour à l'équation précédente.

5 a.3. La division de nombres relatifs.

Par exemple : $\frac{-18}{-5}$ aboutit à $-3,6$

La plupart de ces erreurs apparaissent au début de l'apprentissage : la plupart de ces élèves utilisent une fausse règle (le signe « moins » l'emporte).

5b. Les erreurs dans les calculs mentaux

• Le résultat d'une division diffère, parfois légèrement, du résultat correct :

$\frac{99}{-9}$ aboutit à -10

$\frac{44}{4}$ aboutit à 10

Ces erreurs sont très nombreuses, notamment au post-test, dans toutes les classes. Nous constatons que le calcul mental est source d'erreurs et, par ailleurs, il se fait de moins en moins à l'école.

• Le résultat d'une addition de nombres relatifs diffère du résultat correct :

$125-39$ aboutit à 96

$29x-7,8x$ aboutit à $11,2x$

$-48-12$ aboutit à -68

$3-3,5+2,5$ aboutit à 3

Dans chacun des exemples précédents les élèves utilisent la règle pertinente. L'absence de mécanismes de contrôle propres à l'organisation du calcul mental est à la base de ces erreurs.

Conclusion sur les erreurs dans les calculs numériques

Certaines de ces erreurs sont conceptuelles (les élèves utilisent une fausse règle) notamment lors de l'addition, la multiplication et la division de deux nombres négatifs. La plupart de nos élèves ne font plus ce type d'erreur au post-test. D'autres erreurs ont pour origine un dysfonctionnement des mécanismes de contrôle qui sont propres à l'organisation de la conduite concernant les calculs numériques : la validité de la règle utilisée n'est pas contrôlée, le résultat non plus.

Par ailleurs, une mauvaise lecture de l'opération notée peut conduire au choix d'une règle inappropriée. Ces erreurs sont dues, alors, à une absence de contrôle algébrique : il n'y a pas de retour à l'équation précédente. Ainsi, une mauvaise lecture peut être à l'origine des erreurs les plus grossières et qui auraient pu être corrigées par une relecture provoquée par la comparaison du résultat avec l'opération notée (ou inférée) dans l'équation précédente.

Vers un modèle cognitif de la méthode de résolution de l'expert

Le modèle que nous présentons par la suite concerne le fonctionnement cognitif de l'expert (un très bon élève du lycée, le professeur ....), c'est-à-dire celui qui peut justifier les transformations algébriques qu'il utilise et peut établir des contrôles sur ses écritures.

La résolution algébrique des équations se fait au moyen de transformations successives dont le choix est guidé par les considérations suivantes :

1. *Laisser en suspens les opérations arithmétiques concernant l'inconnue. Par exemple, ne pas essayer d'obtenir un résultat à partir de l'inconnue et son coefficient, de l'addition d'un nombre et un nombre inconnu...*
2. *Effectuer des transformations pertinentes choisies parmi l'ensemble des transformations permises.*

Ce choix implique la conceptualisation de ces transformations (construction mentale de leurs propriétés, filiations et ruptures) ; la filiation fondamentale entre ces transformations étant la *conservation de l'égalité.* En général, pour chaque transformation le sujet utilise souvent des règle « économiques » du type :

« Le terme passe de l'autre côté en changeant de signe »

« Le coefficient de l'inconnue passe de l'autre coté en divisant »

« Le comptage des x pour réduire des termes »

dont il connaît, en général, s'il est un expert, la justification mathématique. Toutes ces règles et leurs justifications expriment la conservation de l'égalité. *La conservation de l'égalité*, englobant toutes ces règles et leurs justifications, est donc *un principe* qu'on respecte dans chaque transformation. Cette conservation est donc un *invariant opératoire* chez l'expert.

Mais une fois la transformation posée, la nouvelle équation résultante doit être contrôlée par rapport à l'équation précédente, même si on emploie la bonne règle. Il ressort alors, que l'invariant conceptuel « conservation de l'égalité », à lui tout seul, ne suffit pas, il doit être accompagné d'un certain type de contrôle: *le contrôle de la validité de la transformation écrite.* On vérifié ainsi que ce qu'on vient d'écrire correspond à ce qu'on se propose de faire. Par exemple, dans la résolution erronée suivante :

$$78-m=33\ ;\ -m=33+78;\ -m=111$$

l'absence de contrôle de la validité de la transformation empêche la rectification d'une erreur de lecture.

L'équation est perçue par certains élèves, à un moment donné de leur processus de conceptualisation, comme une suite de termes reliés par des opérations arithmétiques *concurrentes.* C'est ici que survient l'erreur concernant la priorité des opérations. Par contre, l'expert respecte la priorité des opérations chaque fois qu'il effectue une transformation algébrique (additive, multiplicative, factorisation, développement...) ; rappelons-nous que la priorité d'une opération sur une autre change selon la situation. *Le respect de l'opération prioritaire* est un invariant opératoire de nature conceptuelle dans la résolution algébrique des équations. Cet invariant est aussi *un principe* qui englobe des propriétés mathématiques (distributivité de la multiplication sur l'addition et la soustraction, factorisation, addition de deux fractions ayant le même dénominateur...) qui sont en général présentées chacune séparément lors de leur apprentissage. La conceptualisation des filiations et des ruptures entre ces situations permet la construction mentale de l'invariant opératoire. Cette conceptualisation se fait implicitement dans la plupart des cas.

Une fois les opérations numériques effectuées on doit reporter les résultats obtenus dans l'équation suivante et on doit aussi reporter tous les termes qui n'ont pas changé. Or le grand nombre d'erreurs relevées au post-test, dues à un mauvais report, montre en négatif l'importance du contrôle du report. Par conséquent, *le contrôle de la validité de la transformation écrite* ainsi que *le contrôle du report de termes et le contrôle des résultats numériques écrits sur la nouvelle équation* font partie de la tâche de résolution. Ces trois règles constituent un invariant opératoire de procédure, *un principe : le contrôle algébrique.* La prise en compte de cet invariant se manifeste par un va-et-vient entre la nouvelle équation et la précédente ; le non respect de cet invariant est à l'origine de nombreuses erreurs, même quand le processus de conceptualisation est accompli (les erreurs de l'expert par exemple). Le contrôle algébrique comprend aussi la validation de la solution trouvée par la substitution dans l'équation initiale. Or, les test effectués dans plusieurs classes montrent que ce type de contrôle n'est pas utilisé par les élèves dans la résolution d'équations mathématiques (au moins en situation de test).

Le bon fonctionnement de *la méthode de résolution des équations* repose, principalement, sur les invariants opératoires vus précédemment :

- *deux principes de nature conceptuelle : la conservation de l'égalité et le respect des opérations prioritaires ;*
- *un invariant de procédure : le contrôle algébrique.*

Ces invariants opératoires ont été identifiés à partir des classes d'erreurs construites empiriquement.

La *méthode de résolution des équations* repose aussi sur la bonne organisation et le contrôle des opérations numériques ainsi que sur des concepts mathématiques tels que ceux d'équation et d'inconnue qui donnent du sens à la conservation de l'égalité.

L'enseignement que nous avons construit et la réussite au post-test

La classification des équations (voir annexe) nous a permis de confronter nos élèves, progressivement et rapidement, aux multiples difficultés que la résolution des équations comporte. Les principes dont nous parlons n'ont pas été utilisés explicitement car ils ont été identifiés à partir de l'analyse des erreurs, c'est à dire, après la fin de l'enseignement.

Ainsi, la conservation de l'égalité a été introduite implicitement à partir des règles de transformations citées précédemment :

1. *On additionne ou on soustrait le même nombre à chaque membre de l'équation et on obtient une nouvelle équation équivalente.*
2. *On multiplie (ou on divise) par le même nombre chaque membre de l'équation et une nouvelle équation équivalente est obtenue.*

Au moment de l'enseignement, nous avons considéré ces règles comme autosuffisantes, c'est-à-dire, qu'elle fournissent aussi la justification de la transformation. Or, l'expérience montre que ces règles sont souvent remplacées par des règles plus économiques (*« un terme passe de l'autre côté en changeant de signe »*) et que la justification mathématique se perd. Par conséquent, un enjeu majeur de l'enseignement est le maintien des justifications, car celles-ci permettent à l'élève de généraliser sa méthode à d'autres tâches de résolution (systèmes d'équations, inéquations....).

Au début du processus d'apprentissage nos élèves organisent leur conduite en essayant d'appliquer les règles données ou en construisant des fausses règles. Au fur et à mesure que le sujet rencontre des situations de plus en plus complexes, sa méthode s'enrichit en s'adaptant à ces situations. C'est ainsi que les difficultés concernant *la priorité des opérations* ont été surmontées.

A la fin du processus d'apprentissage, et même avant, nous remarquons que la plupart de nos élèves travaillent vite et bien, c'est-à-dire que les connaissances acquises ont été structurées. On peut dire qu'ils ont construit une méthode de résolution et qu'ils ont conceptualisé les théorèmes énoncés dans les deux règles vues précédemment qui deviennent ainsi des invariants opératoires efficaces.

Les erreurs au post-test, dans nos classes, concernent, presque exclusivement, les opérations de contrôle et les calculs numériques. Dans le tableau suivant nous avons reporté le pourcentage des réussites au post-test. La première et la deuxième colonne concernent nos classes et la troisième colonne concerne une classe de 4ème considérée comme « forte » :

	5ème	**4ème**	**4ème**
4y+49 = 93	88	82	100
5t = 95	100	100	100
3x+12 = -48	75	68	87
60 = -3m -9m +96	79	75	67
78 -m = 33	88	93	80
25 -9y = 124	79	86	60
11x+24 = 3x +48	79	75	87
y+3y-5y+7y+30 = 8y+88	71	82	60
32 + 1,6w +w = -32 -3,4w	42	50	53
7z +30 = 4z +30	63	79	47
2 (12-2t)+72 = 180 +2t	-	75	40
(-4)(3-6x) + 30 = x (3-3,5+2,5)+100	-	75	40

Les résultats sont satisfaisants et le taux de réussite dans nos classes est souvent meilleur que ceux des autres classes de 4ème testées, dans la résolution des exercices les plus difficiles. Notamment le taux de réussite aux deux derniers exercice qui se réduit à 40% dans d'autres classes comparables à la notre qui n'ont pas travaillé suffisamment ce type d'exercice. Les élèves de la classe de 5ème n'ont pas été testés sur ces deux dernières équations car elles débordent largement leur programme. Dans certaines classes de 4ème les erreurs sur la priorité des opérations sont fréquentes (en plus de toutes les autres classes d'erreurs).

Conclusion

Dans les pages précédentes nous avons explicité une bonne partie de ce qui reste souvent implicite voir non-conscient dans le comportement de l'élève et du maître. Les analyses et classifications proposées ainsi que la modélisation cognitive de la méthode de l'expert, se veulent *un outil quotidien de travail pour le maître* .

En effet, le rôle de médiation du professeur passe fréquemment par l'analyse et la correction des erreurs. Il est donc capital pour lui de pouvoir inférer en profondeur ce qui manque ou est erroné dans la représentation mentale que l'élève se donne du problème particulier qu'il traite, et plus largement, de la méthode algébrique de résolution qu'il utilise. Par ailleurs, pour la préparation de ses cours et contrôles, l'enseignant a besoin d'analyser les problèmes qu'il proposera aux élèves. L'enseignant a besoin aussi de prendre conscience des filiations et ruptures conceptuelles entre chapitres s'il veut donner de la cohérence à son enseignement. Prenons comme exemple la conservation de l'égalité, et plus largement la conservation de la valeur de vérité qui recouvre plusieurs significations selon le chapitre que l'on étudie.

Les significations construites par les élèves au cours des apprentissages vont influencer les performances actuelles et futures et il est évident que l'acquisition d'un « habillage conceptuel », riche au départ, ouvre des possibilités dans l'abord des programmes des classes supérieures. On peut se poser alors les questions suivantes :

- Faut-il enseigner le calcul littéral en termes de conservations ?

Les règles de transformation autojustifiées présentés dans les manuels se perdent avec l'abandon des écritures explicites de ces règles. Ces notations sont trop lourdes pour être conservées en permanence et sont substituées par des règles plus « économiques » au risque de perdre leur justification. Or ces justifications sont nécessaires pour pouvoir généraliser ces transformations à d'autres tâches (résolution de systèmes d'équations, des inéquations...). Le maintien ou le rappel des justifications mathématiques ne peut se faire que sur le rappel de la conservation de l'égalité ou de l'inégalité, voire même de la conservation de la valeur de vérité des expressions intermédiaires, quand on utilise des notations abrégées.

- Faut-il analyser en classe la priorité des opérations ?

L'analyse des opérations permises et non permises en termes de priorité des opérations nous semble important car nous constatons un grand nombre d'erreurs concernant la priorité des opérations chez les élèves faibles dans les classes de lycée.

- Faut-il expliciter les contrôles nécessaires à la réussite des tâches de résolution ?

Vu le nombre d'erreurs que nous avons constatées lors du post-test, il nous semble évident que les différents types de contrôle doivent être enseignés explicitement et rappelés tout le long de la scolarité.

Le niveau des connaissances très bas que nous constatons dans certaines classes de lycée nous fait penser qu'effectivement un enseignement conceptuel et structuré est nécessaire car autrement un grand nombre d'élèves finissent par se représenter les mathématiques comme une juxtaposition de règles (correctes et parfois fausses) sans que jamais ils ne se posent des questions sur la justification des règles utilisées.

L'expérience montre que les comportements des élèves peuvent être très différents. La modélisation de l'organisation du comportement de l'expert, en termes de principes qui guident sa conduite, permet de mieux éclairer les comportements individuels des élèves. Le comportement de l'expert constitue le but à atteindre.

Bibliographie

BODIN A. (1992) Réflexions sur les représentations les conceptions et les compétences. *petit x,* n°30, , Irem de Grenoble, 17 - 40.

CHEVALLARD Y. (1989) Le passage de l'arithmétique à l'algèbre dans l'enseignement des mathématiques au collège. *petit x*, n° 19, Irem de Grenoble, 43 - 72.

CHEVALLARD Y 1996) Les outils sémiotiques du travail mathématique. *petit x,* n°42, , Irem de Grenoble, 33 - 57.

CORTES A.,KAVAFIAN N, VERGNAUD G. (1990), From arithmetic to algebra: negotiating a jump in the learning process. *Proceedings of the fourteenth PME Conference*. Mexico, Vol II, 27-34.

CORTES A. (1993); Analysis of errors and a cognitive model in the solving of the equations. *Proceedings of the seventeenth PME Conference.* Japan, Vol I; 146-153

CORTES A. (1994) Modélisation cognitiviste : invariants opératoires dans la résolution des équations, in Artigue M., et al. (eds) *Vingt ans de Didactique des Mathématiques en France.* La pensée sauvage, Editions. 210 - 217.

DUVAL R. (1996) Quel cognitif retenir en didactique des mathématiques. *Recherches en didactique des mathématiques,* Vol. 16/3, 349 - 382.

KIERAN C. (1990) Cognitive processes involved in learning school algebra. Nescher & Kilpatrick(Eds). *Mathematics and cognition.* 96 - 112, Cambridge University press.

MATZ M. (1982). A process model for high school algebra errors. In Sleeman & Brown(Eds), *Intelligent tutoring systems*, London: Academic.

PAYNE S. & SQUIBB H. R. (1990). Algebra Mal-rules and congitive account of error. *Cognitive science*, 14, 445 - 481.

PIAGET J. (1950) *Introduction à l'épistémologie génétique*, La pensée physique, PUF.

SCHUBAUER-LEONI M. (1997) Entre théories du sujet et théories des condition de possibilité du didactique : Quel « cognitif ». *Recherches en didactique des mathématiques*, Vol.17, n° 1, 7 - 27.

SLEEMAN S (1984). An attemt to understand students' understanding of basic algebre. *Cognitive Science,* 6, 387 - 412.

VERGNAUD G (1990), La théorie des champs conceptuels. *Recherches en Didactique des Mathématiques.* Vol.10/23, 133-170.

ANNEXE : Classification des équations

La classification des équations peut se faire à partir *des tâches élémentaires auxquelles* les étudiants sont confrontés. Dans la résolution des équations du premier degré nous distinguons cinq tâches qui sont à l'origine de la plupart des erreurs au début de l'apprentissage:

1. Des transformations algébriques concernant des nombres négatifs.

2. Des calculs numériques concernant des nombres négatifs.

Au début de l'apprentissage les équations du type ax+b=c (a, b et c sont des nombres réels) sont résolues par les enseignants et les élèves en traitant d'abord le terme indépendant b et ensuite le coefficient a (traiter d'abord le coefficient a conduit souvent à des erreurs).

La première transformation algébrique est donc la soustraction du même nombre dans les deux membres de l'équation si b>0 (ax+b-b=c-b) ou bien une addition (ax-/b/+/b/=c+/b/) si b<0. Le traitement des équations avec b<0 pose problème au début des apprentissages. Cette première transformation conduit à une équation du type ax=d ; et le calcul du nombre d conduit aux quatre types d'addition de nombres relatifs (par exemple 17+3; 15-5 ou -12+22; 13-33 ou -11+7; -18-16. Les deux dernières étant les plus difficiles).

La transformation additive est suivie d'une transformation multiplicative (ax/a=d/a) qui conduit à la solution du problème (x=e) ; le traitement de coefficients négatifs (a<0) pose problème.

Le coefficient a et le nombre d peuvent être positifs ou négatifs, par conséquent le calcul du résultat **e** conduit a quatre types de quotients (par exemple, la division de deux nombres négatifs pose des problèmes aux élèves de 5ème et 4ème). La résolution des équations du type ax+b=c conduit donc à huit situations de calcul numériques dont certaines s'avèrent difficiles au début de l'apprentissage.

En ajoutant d'autres termes à l'équation ax+b=c on peut construire des équations présentant d'autres difficultés :

3. Factorisation et réduction des termes contenant l'inconnue. Par exemple : 52x+5x-6, 6x+68=556 ; x(52+5-6,6)+68=556. La plupart des élèves utilisent une règle « le comptage des x » où la factorisation est implicite.

4. La multiplication de facteurs. Par exemple : (-4)(5x+44-2x)=955 ; -20x-176+8x=955.

5. Le passage des termes contenant l'inconnue dans l'autre membre de l'équation. La résolution des équations du type ax+b=cx+d, dans lesquelles l'inconnue apparaît dans les deux membres de l'équation, nécessite cette transformation fondamentale qui est perçue au début de l'apprentissage comme une transformation additive particulière.

Nous avons construit des équations dont la résolution nécessite une ou plusieurs des tâches mathématiques élémentaires vues précédemment. Cette sélection de tâches répond à un souci particulier: proposer aux élèves des équations dont la résolution implique des transformations algébriques et des calculs numériques concernant des nombres entiers ou décimaux *négatifs* (les fractions sont peu abordées).