COURBES ET FONCTIONS AU COLLEGE

Gérard CHAUVAT
IUT de Tours, GEII

Résumé. Après avoir rappelé notre classification des fonctionnements du graphique et l'histoire conflictuelle des rapports entre courbe et fonction, nous essayons de montrer comment la transposition didactique de la notion de fonction au Collège, en particulier lors du chapitre « Applications linéaires et proportionnalité » peut renforcer les obstacles apparus historiquement, à travers notamment un recours *idéogrammatique* au graphique.

1. Introduction

L'expérience quotidienne des professeurs et de nombreuses observations didactiques montrent que les élèves ont des difficultés avec la notion de fonction. Ce constat a peut-être entraîné les auteurs des programmes français de mathématiques du collège à repousser de la classe de Quatrième à celle de Troisième la première rencontre officielle avec la notion de fonction, à savoir le chapitre intitulé « Applications linéaires et proportionnalité ».

L'étude qui suit, extraite de notre travail de thèse (Chauvat, 1997), cherche à montrer qu'une bonne part de ces difficultés sont dues à des obstacles d'origine à la fois épistémologiques et didactiques, renforcés sur le plan didactique par un recours idéogrammatique au graphique. Incidemment, elle vise à avertir les auteurs de programmes du fait que « rien ne sert de courir plus tard, de toutes façons il faut partir à point ! » (en parodiant une fable célèbre).

Après avoir rappelé notre classification des fonctionnements du graphique, nous parcourons l'histoire conflictuelle des rapports entre courbe et fonction, puis nous essayons de montrer comment la transposition didactique de la notion de fonction au

Collège peut renforcer les obstacles apparus historiquement, notamment à travers ce fameux chapitre intitul_ “ Applications linéaires et proportionnalité ”.

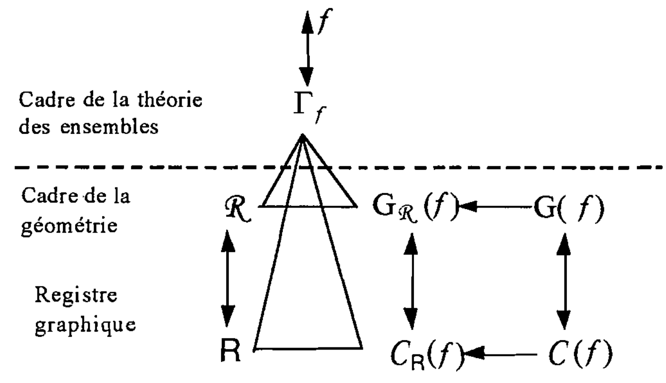
2. Les fonctionnements graphiques

Pour l'étude des savoirs en jeu dans la *manipulation* des représentations graphiques de fonctions numériques, nous avons identifié et distingué cinq objets mathématiques (deux relevant de la théorie des ensembles, les trois autres de la géométrie) et trois objets matériels perceptibles dans le registre graphique.

f : une fonction numérique ;
Γ_f : son graphe (fonctionnel) ensembliste ;
$R = (O; \vec{i}, \vec{j})$ un repère cartésien du plan affine ;
$G_R(f)$: le graphe géométrique de f relatif au repère R ;
$G(f)$: le graphe figural contenant $G_R(f)$;
$\mathfrak{R}$: une représentation graphique sur un support matériel du repère R ;
$C_{\mathfrak{R}}(f)$: une courbe représentative de f relativement à $\mathfrak{R}$;
$C(f)$: la courbe figurale contenant $C_{\mathfrak{R}}(f)$.

Par exemple, si f est la fonction numérique définie par $f(x)=2x+3$, $\Gamma_f=\{(x,2x+3)/x\in\mathbf{R}\}$ est son graphe, $G_R(f) = \{M \in P / \exists x \in \mathbf{R}, M = O + x\vec{i} + (2x+3)\vec{j}\}$ est son graphe géométrique dans le plan affine P rapporté au repère $R = (O; \vec{i}, \vec{j})$. Son graphe figural est l'ensemble des graphes géométriques équivalents à $G_R(f)$ (deux graphes géométriques sont équivalents s'ils se déduisent l'un de l'autre par un changement de repère *élémentaire* : changements éventuels d'origine et/ou de graduations[1]). La courbe figurale est définie de la même façon par conversion de la relation d'équivalence aux objets matériels correspondants.

Nous résumons les relations entre ces différents objets dans le schéma ci-après :



[1] Se reporter à la thèse (Chauvat, 1997) pour une définition plus précise des relations d'équivalence possibles.

Ce schéma permet de distinguer dans les situations mettant en jeu des représentations graphiques cartésiennes de relations numériques les objets géométriques, *non ostensifs*[2], des *ostensifs* graphiques qui leur sont associés et qui dépendent d'un certain nombre de choix et des conditions de production des tracés.

Dans de telles situations, les acteurs interagissent avec les matérialisations de $\mathfrak{R}$ et $C_{\mathfrak{R}}(f)$ (ou $C(f)$ lorsque $C_{\mathfrak{R}}(f)$ est considéré comme représentant d'une classe), et les savoirs et les connaissances en jeu concernent aussi bien les manipulations effectives de ces objets que tout ou partie des non ostensifs impliqués : graphes ensembliste, géométrique, figural, et repère cartésien.

Selon les objets majoritairement en jeu dans la situation (plus précisément, dans le *milieu* au sens de Brousseau (1986, 1988) ou Chevallard (1992), nous définissons, dans l'esprit des travaux de Lacasta (1995) trois modes de fonctionnement du graphique :

Le mode nomographique

Le milieu contient $G_R(f)$ ou une partie de $G_R(f)$. Au sein de ce milieu, les moyens et le lieu de l'action impliquent $\mathfrak{R}$ et $C_{\mathfrak{R}}(f)$.

Ce mode correspond au fonctionnement du graphique comme abaque et outil de calcul. Le graphique est alors un moyen effectif, algorithmisé, d'obtenir des résultats numériques (en général approchés) par des procédures locales. Il est construit de façon à contenir toute l'information nécessaire à l'action du sujet et à la production de la réponse.

L'efficacité du fonctionnement nomographique repose sur un rapport au graphique que nous qualifions d'*opaque* en référence à Récanati (1979) :

> (O)n peut considérer la chose représentante soit comme *chose*, soit comme *représentante*. La chose représentante est d'abord une chose, comme toutes les autres choses, mais elle se distingue des autres choses par une qualité supplémentaire elle est signe, elle représente autre chose qu'elle-même.
> (...)
> Considéré comme chose, le signe focalise sur lui-même la " vue de l'esprit ", il est l'objet propre de la considération, il ne " représente " rien mais se présente lui-même ($x \leftrightarrow x$). Au contraire, considéré comme signe, il se dérobe à la considération, et déplace la vue de l'esprit de lui-même à l'objet qu'il signifie($x \leftarrow y$).

Le rapport à ($x \leftarrow y$) est *opaque* si c'est la *chose* qui l'emporte, *transparent* si c'est le *signe* qui est considéré en priorité.

Dans le mode nomographique, le sujet doit engager un rapport effectif avec le dessin précis qu'il a sous les yeux, sans se soucier de ce qu'il représente.

---

[2] Pour la distinction ostensif/non ostensif, voir CHEVALLARD Y. (1996).

Le mode idéogrammatique

Le milieu contient $G(f)$. Au sein de ce milieu, les moyens et le lieu de l'action impliquent $C(f)$.

Ce mode correspond au fonctionnement du graphique comme idéogramme, c'est-à-dire comme signe graphique qui renvoie à une idée : dessin d'une parabole pour représenter des variations quadratiques, d'une sinusoïde pour des variations périodiques avec alternance de maximum et minimum... Le graphique est construit de façon à montrer les courbes sous la forme standard définie par l'institution dans laquelle il est utilisé.

C'est le mode privilégié de la communication, le graphique étant destiné à illustrer, résumer, mettre en évidence des propriétés déjà connues et obtenues dans d'autres registres.

Le mode idéogrammatique se caractérise par l'absence d'un recours effectif à $\Re$ lequel peut d'ailleurs lui-même être totalement absent du graphique. Les informations montrées ou lues sont celles qui sont conservées par les changements de repères équivalents, au sens défini plus haut, et qui concernent des propriétés topologiques, d'ordre, de complétude, dont on fait l'économie plus ou moins consciemment.

A l'opposé du précédent, l'efficacité du fonctionnement idéogrammatique repose sur un rapport au graphique que nous qualifions de *transparent.* Le sujet doit convertir le dessin qu'il a sous les yeux en la famille des dessins qui représentent la même idée (en particulier, le même processus fonctionnel), peu importe donc l'imprécision du dessin si elle ne travestit pas la forme standard attendue.

Le mode opératoire

Le milieu contient $G_R(f)$, $G(f)$ et Γ_f. Au sein de ce milieu, les moyens et le lieu de l'action impliquent $C_{\Re}(f)$ et $C(f)$.

Ce mode correspond au fonctionnement du graphique comme processus interactif, non algorithmisé : la tâche ne peut pas être effectuée sans le graphique, mais la réponse n'est pas *donnée directement* par le graphique, elle doit être *construite* par le sujet en interaction avec le graphique, sans disposer d'un algorithme standardisé.

Le fonctionnement opératoire repose sur un rapport au graphique ni trop opaque, ni trop transparent et nécessite des traitements graphiques particuliers.

Citons, sans viser l'exhaustivité, quelques tâches classiques qui, d'après nous, sollicite un tel fonctionnement :

- trouver le plus grand intervalle en x pour lequel f est croissante ; trouver les valeurs de x pour lesquelles la pente de la tangente à la courbe est la plus grande, reste positive, etc. ;
- trouver la fonction affine qui a telle représentation graphique donnée ;
- trouver la fonction polynôme du second degré qui admet une formulation algébrique donnée et qui a telle représentation graphique donnée ;
- étudier qualitativement et graphiquement des systèmes d'équations différentielles ;
- décomposer graphiquement une fonction en somme de fonctions *élémentaires*.

Notons pour conclure cette analyse que

- premièrement, la typologie du recours au graphique selon trois modes de fonctionnement, que nous proposons, peut sans aucun doute, être affinée ou complétée pour les besoins de l'analyse d'une situation impliquant un rapport au graphique cartésien ou pour tenir compte de points de vues différents. Elle nous suffit ici.
- deuxièmement, les classes de fonctionnements ainsi définies ne sont pas forcément disjointes. Les pratiques observées ne sont pas nécessairement purement nomographiques, purement idéogrammatiques ou purement opératoires. Le fonctionnement opératoire, en particulier, fait souvent appel au fonctionnement nomographique.

3. La notion de courbe comme obstacle à la notion de fonction

L'idée que la notion de courbe fut un obstacle à la notion de fonction est exprimée par Marc Parmentier (Parmentier, 1989 p. 102) dans une note de son introduction à *la Nova methodus pro maximis et minimis, itemque tangentibus, quae nec fractas nec irrationales quantitates moratur et singulare pro illis calculi*[3] de Leibniz à propos de la normalisation de toutes les variables, différentielles ou non :

> Cette normalisation est naturellement une étape décisive dans la constitution du continu mathématique. Il importe de remarquer ici qu'elle est franchie contre l'idée de *quantité* dotée d'une nature particulière, de même que **l'idée de fonction se construira contre l'idée de courbe**[4].

Parmentier ne développe pas cette affirmation qui lui paraît évidente, et nous nous proposons justement de montrer qu'il relève ici un véritable obstacle épistémologique au sens de G. Brousseau (Brousseau, 1983).

La notion de courbe comme connaissance *utile*

Au commencement était la courbe ! Pour les géomètres de l'antiquité grecque jusqu'à Descartes la notion de courbe était un outil de résolution (seules quelques courbes comme les coniques étaient objets d'étude), mais la notion de fonction relevait plutôt du *protomathématique* (Chevallard, 1985) n'ayant ni le statut d'objet d'étude ni même celui d'outil explicite.

Malgré leur classification rudimentaire des lignes géométriques, leur notion de courbe, en particulier en tant que lieu géométrique, est assez efficace pour résoudre un grand nombre de problèmes géométriques. Il est remarquable que, malgré la pauvreté du langage symbolique dont disposaient leurs auteurs, les travaux de Platon et ses disciples,

---

[3] Nouvelle méthode pour chercher les Maxima et les Minima, ainsi que les tangentes, méthode que n'entravent pas les expressions fractionnaires ou irrationnelles, accompagnée du calcul original qui s'y applique, Acta Eruditorum, Octobre 1684.

[4] C'est nous qui soulignons.

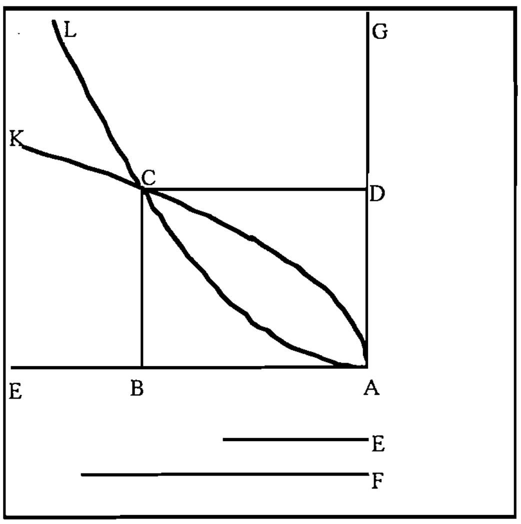
d'Euclide, d'Archimède et d'Apollonius de Perge, qui soulevèrent l'admiration de Montucla[5] ne furent guère dépassés avant le XVIIème siècle.

Cependant les connaissances attachées à cette conception *courbe = lieu géométrique* font obstacle à l'apparition de la notion de fonction.

Ménechme n'a pas besoin de la notion de fonction pour résoudre le problème de la duplication du cube, Descartes non plus d'ailleurs. Il lui suffit de concevoir la solution comme une intersection de lieux, ces lieux, c'est-à-dire ces courbes, étant considérés comme des ensembles de points possédant une propriété caractéristique qui est l'essence même de la courbe, qui la définit et donne toutes ses propriétés. Cette propriété particulière, appelée symptôme par Proclus, peut s'exprimer par une relation algébrique entre certaines *lignes* relatives à la courbe (équation représentant la courbe pour Descartes) ; elle résulte de procédés de construction géométriques ou mécaniques de la courbe.

La conception *courbe = lieu géométrique* conduit *de facto* à la *conception courbe = symptôme.*

Mais la relation potentielle de dépendance entre deux lignes est en fait occultée par le symptôme lui-même. Lorsque Ménechme considère une parabole comme le lieu géométrique des points C du plan tels que $F \times CB = CD^2$, il n'a aucune nécessité d'y *voir*, c'est-à-dire d'expliciter, une relation de dépendance entre CB et CD.



Il *sait* que s'il se donne CD, il peut en déduire CB puisque F est connu. Il pourrait même dresser des tables numériques pour différentes valeurs de CD et différentes valeurs de F, l'antiquité est prolixe en tables numériques, notamment en astronomie. Mais, outre le fait que ces tables constitueraient de pâles représentations incomplètes du symptôme, il ne se trouve aucune raison à l'époque de Ménechme pour qu'elles s'interprètent comme des cas particuliers de dépendances abstraites.

Youschkevitch écrit (Youschkevitch, 1981 p. 13-14) que les astronomes de l'époque savaient

> que les coordonnées des corps célestes en mouvement changent périodiquement avec le temps, ou que, dans un cercle donné, des cordes de longueurs inégales sont en relation avec des arcs de longueurs inégales. (...) Nonobstant tout cela, la littérature mathématique de l'Antiquité manque non seulement de mots équivalents au terme

[5] MONTUCLA J-E. (1799) : *Histoire des mathématiques*, Réédition A. Blanchard, Paris 1968.

fonction mais encore d'une allusion à cette idée plus abstraite et plus générale qui unifie des dépendances concrètes séparées, entre des quantités ou des nombres sous quelques formes que de soit (description verbale, graphe, table) ; ces dépendances sont considérées lorsqu'elles se présentent. La distance est grande entre « l'instinct de fonctionnalité » (Bell) et sa perception[6].

Tout ceci est confirmé par le fait que les premiers géomètres ont développé une théorie opératoire et performante de la mesure des grandeurs, basée sur la proportionnalité (voir la théorie des rapports d'Eudoxe de Cnide), indépendamment de toute idée de fonction linéaire. On constate d'ailleurs que cet entre « l'instinct de fonctionnalité » dont parle l'historien anglais E. T. Bell, restera enfoui sous ce *pattern* de base qu'est la proportionnalité jusqu'à Descartes.

Avec Descartes tous les *symptômes* sont mis sur le même plan, le linéaire comme le quadratique, etc. Mais la conception *courbe plane = équation à deux variables réelles*, bien qu'enrichissant la conception *courbe = symptôme*, se passe encore de toute idée de fonction.

Cependant, tandis que la notion de courbe devient de plus en plus objet d'études, avec Leibniz, Newton et J. Bernoulli, la notion de fonction accède au rôle explicite d'outil, puis à partir des travaux d'Euler elle devient à son tour objet d'étude.

En effet si l'on en croit d'Alembert dans l'article « Courbe » de l'Encyclopédie Méthodique[7] (Encyclopédie, p. 461) L'usage principal des courbes, dans la Géométrie, est de donner, par leur point d'intersection, « la solution des problèmes », mais les problèmes géométriques se sont déplacés et ne peuvent plus être résolus à l'aide de l'outil *courbe = lieu géométrique*. Les problèmes de minimum et de maximum, de tangentes, résolus encore, dans certains cas particuliers, par Descartes et Fermat, suscitent l'invention du calcul différentiel et intégral, fondent l'analyse infinitésimale et conduisent finalement à une notion de fonction numérique (i.e. de **R** dans **R**) où deux conceptions cohabitent sans forcément s'affronter : *fonction = expression analytique* et *fonction = courbe*. Ces deux conceptions, comme le note Sierpinska (Sierpinska, 1992), sont des obstacles à la notion générale de fonction.

La notion de courbe comme connaissance *obstacle*

C'est ce dernier avatar de la notion de courbe, la conception *fonction = courbe* qui nous intéresse ici.

Elle est à l'œuvre chez Euler :

→ à toute fonction correspond une courbe et inversement ;

→ puisqu'on peut imaginer qu'il existe des courbes complètement arbitraires, comme celles dessinées à main levée au gré de notre fantaisie, il faut imaginer qu'il existe des fonctions dont l'équation ne peut s'exprimer par un développement analytique ;

---

[6] Nous ajoutons *et son explicitation.*

[7] Encyclopédie Méthodique (1784) : Mathématiques par MM d'Alembert, l'Abbé Bossut, De la Lande, le marquis de Condorcet, etc. Réédition du bicentenaire, ACL-éditions, Paris, 1987, p. 461.

→ une fonction doit donc être conçue comme une relation de dépendance quelconque entre quantités variables.

Elle est manifeste aussi chez Lagrange qui, de plus, *institutionnalise* le recours *idéogrammatique* au graphique en situation didactique (voir Dhombres et alii, 1992).

C'est à Bernhard Bolzano (1781-1848) que nous devons la critique de cette conception. Bolzano invalide irrévocablement le recours au graphe géométrique et a fortiori le recours au graphique. Si, par définition, une fonction modélise une dépendance quelconque entre quantités quelconques, c'est-à-dire n'appartenant pas forcément à l'espace, il y a une faute de rigueur incontestable à en déduire ses propriétés dans le cadre particulier de la géométrie.

On sait que les travaux sur les fonctions qui suivirent et qui fondèrent l'analyse se libérèrent justement de toute problématique géométrique ; citons par exemple, U. Dini (1845-1918) : *Fundamenti per la teoria della funzione di variabili reali* (1878), K. F. Weierstrass (1845-1897) : *Abhandlungen aus des Funktionenlehre* (1886), E. Borel (1871-1956) : *Leçons sur la théorie des fonctions* (1897-1922), H. Lebesgue (1875-1941) : *Sur les fonctions de variable réelle* (1899), R. Baire (1874-1932) : *Leçons sur les fonctions discontinues* (1930).

Cependant le point de vue géométrique restant bien commode pour exprimer des propriétés analytiques (voire topologiques) subtiles des fonctions, on continuera à s'y référer. Il semble bien ici que l'élaboration des connaissances subisse l'influence des avantages perceptifs (perceptivo-gestuels) du registre graphique piloté par le cadre géométrique (cadre ancien et familier) par rapport au registre formel dans le cadre naissant de l'Analyse.

Cette difficulté à couper le cordon ombilical avec la géométrie se retrouve ainsi dans la définition d'une fonction continue (au sens moderne) que donne P. J. Lejeune-Dirichlet (1805-1859) dans son mémoire *Uber die Darstellung ganz willkürlischer Funktionen durch Sinus und Cosinusreihen (Sur la représentation de fonctions quelconques par des séries de sinus et de cosinus)* paru en 1837 :

> Si à tout x correspond une valeur finie $y=f(x)$ qui varie de façon continue lorsque x varie lui-même de façon continue de a à b, nous dirons que y est une fonction continue pour cet intervalle. Ici, il n'est pas du tout nécessaire que y s'exprime en fonction de x selon une même loi sur tout l'intervalle; il n'est même pas nécessaire d'envisager une expression algébrique explicite entre x et y. D'un point de vue géométrique, c'est-à-dire en envisageant x et y comme abscisse et ordonnée d'un point et où à chaque valeur de x de l'intervalle considéré correspond une valeur et une seule de y, la continuité d'une fonction est à mettre en parallèle avec le fait que la courbe soit d'un seul tenant. Cette définition ne prescrit en aucune façon aux différentes parties de la courbe une quelconque propriété commune et on peut se représenter les différents raccordements de manière totalement arbitraire, ou même s'imaginer une courbe simple tracée graphiquement, sans aucune contrainte préalable. Il résulte de cela qu'une telle

> fonction ne sera définie sur tout un intervalle que si chacune de ses parties est soit donnée graphiquement, soit mathématiquement[8]

Notons tout de même que l'approche géométrique n'est pas systématiquement exclue par la mise en garde de Bolzano qui concerne essentiellement les fondements de l'Analyse et de l'étude des fonctions. Il n'est pas interdit de traduire les propriétés des fonctions établies rigoureusement dans le cadre de l'Analyse, lorsque cela est possible, en des propriétés de leur graphe géométrique, éventuellement visibles ensuite sur un dessin. Il est seulement revendiqué de ne pas baser l'étude des fonctions sur des propriétés qui risquent d'être spécifiques au cadre géométrique.

C'est la non prise en compte de ce vice fondamental qui fait obstacle à une conception plus générale de la notion de fonction numérique, et au-delà à la notion abstraite et ensembliste de relation entre objets quelconques, et qui constitue plus précisément ce que nous avons désigné par conception *fonction = courbe.*

Mais d'une façon tout aussi subtile, cette conception véhicule une autre scotomisation d'un aspect fondamental de la notion de fonction numérique, son aspect *processus dynamique*, modélisation des changements : une quantité varie en liaison avec les variations d'une autre quantité. A confondre la fonction et sa courbe (son graphe géométrique), on perd la perception de cette dynamique relationnelle dans la statique du dessin achevé, même avec une conception *courbe = lieu géométrique.*

On va voir que sous cet aspect l'obstacle *fonction = courbe* d'origine épistémologique est alors très fortement renforcé par les pratiques d'enseignement liées à la transposition didactique de la notion de fonction.

4. Le renforcement didactique

Avant d'étudier le cas français, nous citons ci-dessous deux travaux menés auprès d'élèves de cultures différentes, mais subissant le même type d'enseignement, dont les conclusions s'expriment dans les mêmes termes.

Maggy Schneider (Schneider, 1990 p. 292) résume ainsi les observations qu'elle a pu faire pour sa thèse :

> Pour bon nombre d'élèves en fin d'enseignement secondaire, les courbes représentatives des fonctions semblent avoir perdu toute valeur de représentation, comme si elles étaient à la fois signifiant et signifié mais confondus en un tout indissociable, le signifié étant assimilé au signifiant. La fonction ne serait plus, pour eux, une relation entre deux grandeurs, x et y, une ordonnée positive ne serait plus la longueur d'un segment figurant l'une ou l'autre grandeur. Le concept de fonction serait en quelque sorte réduit à l'image visuelle qu'imprime sur la rétine sa courbe représentative, l'expression analytique $y=f(x)$ qui lui est associée servant uniquement à désigner cette

[8] Cité et traduit par Youschkevitch, art. cité p. 60

courbe, à l'identifier parmi d'autres de formes différentes, tout comme les coordonnées $(x, f(x))$ seraient le nom de tel ou tel point particulier de la courbe.

Dans son article de 1992 (p. 53), Sierpinska fait allusion à une étude sur les conceptions d'élèves âgés d'environ 16 ans sur la notion de fonction[9].

> For two students in the experiment the algebraic expression for the law of function played the role of the code or name of the function. Ag and Pr decided to work directly with a computer to solve the following problem : find functions f such that $f(2)=3$ and $f(3)=2$ and having an attractive fixed point in the interval (2,3). It seemed that, for them, the function was just a certain shape on the screen of the computer, appearing after the input of some algebraic expression. This algebraic expression did not describe the relationship between the coordinates of the points of the curve but was, for them, just a code, or name of the function. They did not conceive of this expression analytically. For example, they did not think of substituing 2 for x in the formula they proposed to check whether they would get 3 or not. They would just change (at random, at first) the parameters in the algebraic expression and see what effect it gives on the screen. (The students were 16 year-old mathematics-physics students).

Dans les deux expériences, les auteurs émettent l'hypothèse selon laquelle, pour les étudiants observés, l'expression analytique $f(x)$ qui définit la fonction étudiée serait une simple étiquette pour désigner la courbe (assimilée à la fonction) et non pas l'expression d'un procédé permettant de faire correspondre, à tout abscisse x d'un point de la courbe, son ordonnée y. L'aspect fonctionnel en jeu aurait justement disparu.

Remarquons que l'observation de Sierpinska a lieu dans une situation précise mettant en jeu des expressions algébriques et des courbes tracées sur l'écran d'un ordinateur. On peut penser que c'est cette situation qui génère les comportements observés et les conceptions dénoncées. En effet rien n'empêche d'imaginer que ces conceptions soient justement performantes ou suffisamment efficaces dans la situation donnée. Il peut être plus économique de procéder par essais-erreurs à l'aide de l'ordinateur que de vérifier *à la main* des solutions hypothétiques.

On peut ainsi imaginer le jeu suivant : l'ordinateur affiche à l'écran un repère cartésien et un point A fixé dont les coordonnées sont lisibles dans ce repère. Le jeu consiste à faire passer une droite par l'origine et le point A. On obtient un tracé de droite en proposant à l'invite du logiciel une expression du type $y=ax$ pour une certaine valeur de a. Ce jeu peut s'apparenter au jeu de la devinette d'un nombre décimal (dont le nombre de décimales est limité, contraintes *hardware* obligent...) compris entre deux bornes connues. La méthode essais-erreurs réussit dès que le joueur a associé *position* de la droite et étiquette $y=ax$, c'est-à-dire dès qu'il a perçu une relation de dépendance entre la *position* de la droite et la valeur de a qu'il propose. La position de la droite pouvant être appréhendée à partir de l'angle (orienté) qu'elle fait avec l'axe des x ou des y, ou à partir de la distance (signée) verticale qui l'éloigne de A ou d'un point arbitraire de l'axe des x,

[9] *On 15-17 years old students' conceptions of functions, iteration of function and attractive fixed points*, Warsaw, Poland : Institute of Mathematics, Polish Academy of Science, Preprint 454, 1989.

etc., c'est une relation fonctionnelle entre cette position et a qui se trouve alors en jeu et pas nécessairement la notion d'application linéaire.

La citation de Schneider laisse penser que pour elle le comportement observé et la conception qui le sous-tend sont généraux dès lors qu'une situation met en jeu une expression analytique et la courbe associée. Elle ajoute :

> Il y a lieu ici de se demander si ce n'est pas l'enseignement lui-même qui secrète cette conception tronquée de la notion de fonction. En effet, la fonction (ou plutôt sa courbe représentative) y est trop souvent considérée comme un objet d'étude en soi, non comme un mode de représentation d'une loi de variation.

Quelles sont donc ces situations d'enseignement qui contribuent à installer et à renforcer cette conception que nous schématisons ainsi : *f(x) = étiquette pour f et pour* C_f ? Quelles en sont les caractéristiques ?

Précisons que cette conception se caractérise par la confusion *fonction = courbe* dont nous avons vu l'origine épistémologique et par une appréhension globale du dessin de la courbe représentative dans la statique de son achèvement dont nous soupçonnons l'origine didactique. Cette appréhension globale se traduit au niveau local par un *étiquetage* des points de la courbe par le couple de leurs coordonnées et la perte de la relation *ordonnée = fonction(abscisse)*.

Dans l'enseignement français, la première fonction représentée graphiquement apparaissait officiellement en classe de Quatrième (élèves âgés d'environ 14 ans). Elle apparaîtra désormais en Troisième mais gageons que l'on pourra faire pour cette classe les mêmes observations que celles que nous faisons ci-dessous. Il s'agit de l'application linéaire en liaison avec la notion de proportionnalité. Notons qu'à ce niveau la notion de fonction n'est pas à proprement parler au programme.

Suivons un manuel de 4ème (Hachette 1992) dans sa présentation conforme à l'ancien programme : chapitre 7 : Applications linéaires et proportionnalité p. 99-112. Il s'agit pour les auteurs de

> - Mettre en place la notion d'**application linéaire** qui est le modèle mathématique d'une situation de proportionnalité.
> - Grâce à ce modèle et à sa **représentation graphique**, traiter plus rapidement et plus efficacement des problèmes relevant en particulier des **pourcentages** et des **vitesses**.
>
> en s'appuyant sur les connaissances acquises en 6^e et 5^e à propos de
> - La proportionnalité.
> - Le repérage d'un point dans le plan.

Les connaissances de base sont résumées de la façon suivante :

> 1. Application linéaire et proportionnalité
>
> Soit a un nombre. Le procédé qui à tout nombre x fait correspondre le produit de x par a s'appelle *application linéaire* de coefficient a.
>
> Si f désigne ce procédé, on note :

f(x) = ax

image de x   coefficient de linéarité

y = ax

2. Détermination d'une application linéaire

Une application linéaire est complètement *déterminée* dès que l'on connaît un nombre (non nul) et son image.

$$a = \frac{\text{image du nombre}}{\text{le nombre}}$$

3. Propriétés d'une application linéaire

- Images remarquables

Pour toute application linéaire $f(x)=ax$:
l'image de 0 est 0 $f(0) = 0$, $(a\times 0 = 0)$;
l'image de 1 est le coefficient de linéarité $f(1) = a$, $(a\times 1 = a)$.

- Les deux propriétés de la linéarité

Soit une application linéaire $f(x)=ax$.
L'image de la somme de deux nombres est égale à la somme des images de ces nombres. $f(x_1+x_2) = f(x_1) + f(x_2)$.
L'image du produit d'un nombre par k est égale au produit de l'image du nombre par $k.f(kx) = kf(x)$.

4. Représentation graphique

- Le résultat essentiel

La représentation graphique de l'application linéaire $y=ax$ est la droite qui passe par l'origine du repère et par le point de coordonnées (1 ; a). a est le coefficient directeur de la droite.

On peut remarquer que les auteurs

- insistent sur l'aspect procédé et correspondance de l'application linéaire,
- ne donnent pas d'interprétation graphique des propriétés énoncées au point 3,
- institutionnalisent le procédé standard de représentation graphique de l'application $x \rightarrow ax$ à l'aide du point de coordonnées (1 ; a).

À part le premier point (1. Application linéaire et proportionnalité) qui leur est plus spécifique, le reste de leur présentation est semblable à celle de tous les manuels de 1992.

Bien sûr ce résumé officiel des *choses à savoir et à savoir faire* qu'on trouve sous une forme ou sous une autre dans tous les manuels ne recouvre pas la totalité des connaissances abordées dans le livre et parfois nécessaires à la résolution de ses exercices et encore moins les pratiques des professeurs se référant au manuel.

Il se peut, par exemple, que dans la classe on ait représenté graphiquement certaines applications linéaires à l'aide de plusieurs points, ou à l'aide d'un point différent du standard (1 ; a) (on sait bien qu'en pratique ce point peut être mal adapté...).

En tous cas, ce qui risque de s'institutionnaliser c'est que la représentation graphique d'une application linéaire est une droite et qu'il suffit d'un point (d'abscisse non nulle) pour la tracer, l'utilisation de l'origine s'enfouissant dans les implicites de l'algorithmisation. Et on la trace à l'aide d'une règle.

Dès lors le *procédé* à représenter (l'application linéaire) disparaît dans la procédure de représentation (le tracé à la règle). Un point de la droite n'est pas vu comme un représentant, pour un certain x, de la correspondance $x \to ax$, mais comme un élément d'un objet géométrique familier, *aligné* (au sens de la perception sensible) avec deux points particuliers de la feuille.

C'est le paradoxe de la représentation graphique de l'application linéaire : il est hors de question de tracer la droite point par point, mais l'instrument-règle *tue* la relation entre les coordonnées.

5. Le renforcement idéogrammatique

Compte tenu de l'importance des notions de proportionnalité et linéarité, il paraît légitime d'initier les notions de fonction et de représentation graphique de fonction avec l'application linéaire, d'autant plus qu'elle est particulièrement facile à représenter graphiquement.

Mais la trop grande singularité de cette fonction, de son graphe géométrique et de sa *courbe* représentative peut justement poser problème en générant des conceptions trop particulières, d'autant qu'on contextualise son introduction dans des situations concrètes (ou pseudo concrètes) où le recours au graphique se fait dans des conditions parfois confuses.

Proportionnalité, fonction linéaire et droites

En poursuivant la lecture du manuel de 4ème cité plus haut (Hachette 1992), on lira :

> Nous avons admis depuis la 6^{e} que la représentation graphique d'une situation de proportionnalité est une droite passant par l'origine ; il en va donc de même pour une application linéaire.
> Nous admettrons aussi que, réciproquement, une droite passant par l'origine est la représentation graphique d'une application linéaire, donc d'une situation de proportionnalité. (p. 101)
> Toute situation de proportionnalité peut se traduire mathématiquement par une application linéaire.
> Toute application linéaire peut être considérée comme le modèle mathématique d'une situation de proportionnalité. (p. 102)
> La représentation graphique de l'application linéaire $y=ax$ est la droite qui passe par l'origine du repère et par le point de coordonnées (1 ; a) (p. 103).

Dans un manuel concurrent (Nathan 1992, p.256), on enseigne de même que :

> Toute situation de proportionnalité se " prolonge " par une fonction linéaire.
> Le coefficient de proportionnalité est le coefficient de la fonction linéaire.
> La représentation graphique d'une fonction linéaire est une droite qui passe par l'origine.

On possède alors un moyen graphique de reconnaître une situation de proportionnalité (op. cité p. 246) :

> Sur un graphique, on reconnaît une situation de proportionnalité à ce que les points de coordonnées $(a\ ;\ b)$ sont tous situés sur une droite qui passe par l'origine du repère.

Les situations de proportionnalité étant empruntées au domaine du *quotidien* ou de l'expérience physique, les auteurs du manuel ci-dessus sont limités, dans leurs exemples, à des tableaux numériques de *quelques* valeurs (six au plus) prises par des *grandeurs positives* donc à des représentations graphiques situées dans le premier quadrant. Pour récupérer les nombres négatifs et se débarrasser des unités de mesure, ils définissent les fonctions linéaires comme des *prolongements mathématiques* d'une situation de proportionnalité.

Par ailleurs, ils institutionnalisent (p. 258) le savoir faire suivant : pour tracer la représentation graphique d'une fonction linéaire, il suffit de déterminer un point A, différent de l'origine, appartenant à la droite représentative et tracer la droite (OA).

Ce chapitre conduit donc également à la première rencontre officielle avec la représentation graphique d'une fonction (ou application). Nous affirmons que cette rencontre se fait sous le mode idéogrammatique, la droite fonctionnant comme *emblème* de la linéarité et de la proportionnalité. En effet, compte tenu des propriétés spécifiques de la droite (forme constante, deux points suffisent pour la déterminer), les problèmes du choix de la fenêtre de tracé (pourvu qu'elle contienne l'origine du repère) et du pas du tracé (nombre de points nécessaires, distance entre eux) ne sont pas explicités.

On peut penser qu'une leçon réalisée selon l'approche choisie dans de tels manuels conduit à installer chez les élèves des rapports au graphique caractérisés par les *théorèmes-élèves* suivants :

- la représentation graphique d'une relation du type " y connu en fonction de x " est une droite passant par l'origine du repère.
- pour représenter graphiquement une relation du type " y connu en fonction de x ", il faut calculer *quelques* (moins de six) valeurs de y correspondant à quelques valeurs de x *positives* et *simples*, puis joindre les points de coordonnées $(x\ ;\ y)$ ainsi obtenus par des segments.

Un exemple au collège

Nous avons pu conforter ces hypothèses dans une classe de Troisième faible[10] d'un collège rural situé en Zone d'Education Prioritaire. Après avoir fait des rappels de

[10] Selon les critères : nombre de reçus au Brevet des Collèges et passages en Seconde.

Quatrième sur la fonction linéaire (le manuel en usage dans la classe étant celui de la collection Transmath/ Nathan cité plus haut), le professeur donna le devoir à la maison suivant :

Représenter sur deux graphiques différents les courbes définies par les équations y en fonction de x suivantes :
C_1 $y = x^2+4x+2$
C_2 $y = 1/x$.

18 élèves ont rendu le devoir. Nous avons consigné quelques uns des résultats dans les tableaux ci-dessous :

i) Courbe C_1 : $y = x^2+4x+2$

Elèves	Tableau[11]	x<0[12]	x=0[13]	Calculs[14]	tracé
E 1	4				droite passant par O
E 2					droite passant par O
E 3	4				droite passant par O
E 4					parabole + segments
E 5	5		y=0	4	4 segments
E 6		oui		2	droite ne passant pas par O
E 7		oui		2	droite ne passant pas par O
E 8			y=2*	3	2 segments
E 9	5		y=0	4	droite passant par O
E 10	4			4	droite passant par O
E 11	5		y=0	4	droite passant par O
E 12	4		y=2		3 segments + symétriques/y
E 13	3				droite passant par O
E 14	5		y=2		4 segments + symétriques/y
E 15			y=2*	3	2 segments
E 16		oui		7	6 segments
E 17		oui		7	6 segments
E 18		oui		9	6 segments

(* : calcul explicite exact)

On constate que 7 élèves sur 18 représentent $y = x^2+4x+2$ par une droite passant par O quitte à tricher sur l'alignement des points (en jouant sur l'épaisseur des traits et des points) ou sur l'expression algébrique donnée (E1 et E3). Cette tricherie est permise, voire encouragée, par le mode idéogrammatique puisque c'est l'idée qui prime sur la représentation matérielle (transparence maximale).

[11] Taille du tableau de valeurs lorsqu'il est reproduit sur la copie.

[12] Utilisation d'abscisses négatives.

[13] Valeur de y calculée ou indiquée sur la copie pour x=0.

[14] Nombre de calculs explicites reproduits sur la copie.

Les élèves E1, E2 et E3 sont parfaitement prisonniers d'un contrat implicite qui veut que les exercices donnés par le professeur immédiatement à la suite d'un cours se résolvent à l'aide des techniques exposées lors de ce cours.

Ainsi E2 détermine le point A d'abscisse $x=1$ (avec une erreur d'ailleurs : $y=6$!) et trace la droite (OA). Il récidive pour la deuxième courbe mais sans erreur de calcul cette fois.

E1 et E3 se rendent compte que l'expression algébrique donnée n'est pas de la forme $y=ax$ vue en cours. Alors ils font tout pour s'y ramener. Dans un premier temps E1 écrit :

$y = x^2+4x+2$
$y = x+x+4x+2$
$y = 2x+4x+2$
$y = 6x+2$
$y = x = 6/2$
$y = x = 3$
$y = 3x$

Il en déduit un tableau de proportionnalité avec l'opérateur x3 appliqué aux valeurs 3, 2, 1, 4, et trace la droite correspondante. Mais il se ravise et corrige sa deuxième ligne :

$y = x \times x+4x+2$
$y = 1x+4x+2$
$y = 5x+2$
$y = x = 2{,}5$
$y = 2{,}5x$

Il corrige alors l'opérateur, la deuxième ligne du tableau et la droite tracée.

Bien sûr les manipulations algébriques erronées qui apparaissent ici sont relativement courantes chez des élèves en difficulté comme E1, mais ici, elles sont fortement conditionnées par le désir d'obtenir une relation linéaire conforme à celle vue en cours. Cohérent avec le contrat qu'il s'est fixé, E1 récidive avec la seconde expression ;

E3 est *meilleure* en mathématiques que E1 (elle passera en seconde), mais assujettie au même contrat, elle abandonne ses moyens de contrôle habituels dans le registre algébrique et écrit :

$y = x^2+4x+2$
$y = 2x+4x+2$
$y = 6x+2$
$y = 8x$

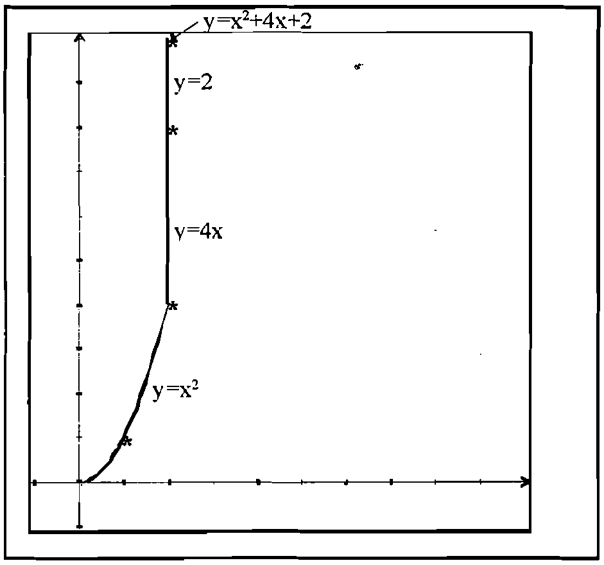
Ce qui lui permet d'établir un tableau de proportionnalité avec l'opérateur x8 et de tracer la droite correspondante. Pour la seconde expression elle fournit un tableau de proportionnalité avec l'opérateur x (-1) qui laisse supposer qu'elle identifie 1/x et -1x.

Prisonniers de la référence à la représentation graphique des applications linéaires, ces élèves transforment la situation en un jeu où le gain est obtenu dès que l'on a produit une expression du type $y=ax$. Mais les règles du calcul algébrique, qui permettent de jouer et autorisent, par exemple, à remplacer $x2$ par $x \times x$ ou $x1$ par $1x$, ne permettent pas de gagner ici. Les élèves abandonnent alors ces contraintes qui empêchent de gagner (et dont on peut penser qu'elles correspondent à des connaissances peu robustes) en reproduisant des erreurs de calcul fréquentes dans l'apprentissage du calcul algébrique.

Deux autres élèves, E6 et E7, représentent la relation donnée par une droite, mais ne passant pas par O. Ils déterminent deux points A et B en se donnant une valeur négative puis positive de x et en calculant les valeurs de y correspondantes. Ils tracent ensuite la droite (AB). Ils font de même pour la seconde relation. Ces élèves semblent fonctionner avec les *théorèmes* suivants :

- les représentations graphiques demandées ne peuvent être que des droites ;
- pour déterminer une droite, il suffit de déterminer deux de ses points suffisamment éloignés.

L'élève E4 produit le graphique *original* suivant :



Il semble qu'elle utilise les *théorèmes* implicites suivants :

- la représentation graphique demandée peut être composée de plusieurs morceaux représentant chacun un élément de la somme à représenter ;

- les graphiques commencent à l'origine du repère ;

- pour représenter x^2 il faut deux points (deux fois x ?), pour $4x$ ou 2 un seul point.

Pour ce type d'élèves, il semble bien que la représentation graphique ait à voir avec l'équation algébrique fournie, mais son rapport avec le procédé fonctionnel que l'équation définit n'est pas perçu et encore moins, vraisemblablement, l'utilité du dessin...

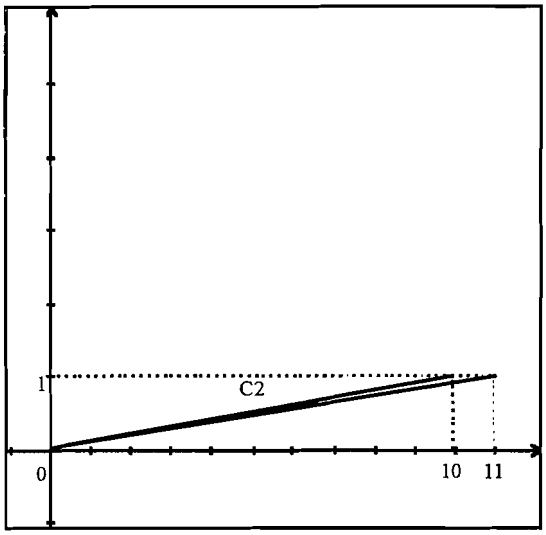
Courbe C_2 $y = 1/x$

Elèves	Tableau	x<0	x=0	Calculs	tracé
E 1	5				droite passant par O
E 2					droite passant par O
E 3	4				droite passant par O
E 4					2 segments d'origine O
E 5	3			3	3 segments
E 6		oui		2	droite ne passant pas par O
E 7		oui		2	droite ne passant pas par O
E 8			y=1/0=0	4	3 segments
E 9	4		y=0	3	3 segments

E 10	2			2	
E 11	3			3	2 segments
E 12	4		y=0		3 segments + courbe
E 13	8				7 segments
E 14	6		y=0		5 segments + symétriques/O
E 15	4		y=0		3 segments
E 16		oui		12	5 segments + symétriques/O
E 17		oui		12	5 segments + symétriques/O
E 18		oui		12	5 segments + symétriques/O

Cinq élèves tracent à nouveau des droites, les autres (sauf E4 et E10) calculent quelques points et les joignent par des segments. Mais seulement trois élèves prennent des abscisses négatives, évitent x=0 et obtiennent un *graphique* acceptable. Ce sont les mêmes qui ont réalisé *correctement* C_1 (notons toutefois, pour la rigueur statistique, que deux d'entre eux semblent s'être largement inspirés du travail du troisième).

E4 produit à nouveau un graphique original :



Elle ajoute sous son dessin cette phrase sibylline[15] :

la courbe 1/x peut être d'une grandeur infini car l'abscisse x peut mesure de 0,1mm à 100 km.

Conflit numérique/graphique

Contrairement au mode nomographique qui confère au graphique un statut d'outil qui en légitime l'usage, le mode idéogrammatique péjore le recours au graphique en ne lui assignant qu'un rôle d'illustration. Dans sa version la plus stricte, le graphique idéogrammatique est réduit au dessin de la courbe représentative ; les représentations graphiques du repère, du quadrillage, des projections de certains points de la courbe, n'ont plus aucune utilité. Il en résulte que seule une lecture globale et approximative peut

[15] Orthographe de l'élève.

être faite (variations...). En ajoutant des représentations du repère et/ou du quadrillage, le graphique peut retrouver sa fonction nomographique. Mais le plus souvent, ce fonctionnement restera dissymétrique, c'est-à-dire que les propriétés connues et établies du graphe géométrique seront reproduites, codées, dans la représentation graphique concrète et pourront être exploitées en tant que telles et produire des résultats acceptables, tandis que des propriétés lues sur la représentation graphique, des résultats établis dans le registre graphique, non déduits des propriétés du graphe géométrique, ne constitueront que des conjectures à propos de ce graphe.
Ainsi le théorème et sa réciproque (tous les deux admis au collège) qui relient une fonction linéaire et sa représentation graphique n'établit en fait une équivalence qu'aux niveaux fonction et graphe géométrique :
fonction *linéaire* de coefficient $a \Leftrightarrow$ graphe géométrique = *droite passant par* O de coefficient directeur a.

Aux niveaux fonction et représentation graphique matérielle, seule l'implication :
fonction *linéaire* $\Rightarrow$ représentation graphique = segment dont un prolongement passe par l'origine du repère
subsiste. Des points dont on a vérifié l'alignement à la règle sur un support matériel ne représentent pas forcément des points alignés *géométriquement.*

Si donc on se donne un tableau de proportionnalité de coefficient a, on peut le représenter graphiquement par des points placés dans un repère convenable et joindre ces points par une droite qui est une représentation graphique de la fonction linéaire définie par $y = ax$. On peut alors utiliser cette droite, sur le mode nomographique, pour enrichir le tableau de valeurs soit pour un x donné, soit pour un y donné. Par contre des points étant donnés, on peut conjecturer leur alignement sur le mode idéogrammatique mais la certitude n'est acquise que dans le registre numérique par des procédures calculatoires. Cependant si l'*idéogramme* constitué par les points effectivement ou fictivement reliés entre eux diffère *nettement* d'une droite, on postule la non linéarité du phénomène représenté (voir Nathan, 1992, exercice 35 p. 263).

Dès lors on pourrait croire que les rôles des deux registres sont clairement définis : le numérique prouve ou infirme la proportionnalité, la linéarité, tandis que le graphique ne peut que les suggérer ou non. En fait, dès qu'on contextualise cette question hors des mathématiques, la situation se complique et un conflit peut apparaître entre les deux registres. Dans ce cas, la conviction peut reposer sur une lecture graphique, idéogrammatique, *les calculs ne faisant plus la loi* ! Voyons, par exemple, Hachette, 1992, exercice 24 p. 109 :

Pour différentes masses suspendues à un ressort, on a mesuré l'allongement l correspondant.

On a obtenu les résultats suivants :

masse (g)	100	200	300	400	500	600	700	800
l (cm)	0,5	0,9	1,5	2	2,4	3	3,6	4,2

1°) Ce tableau de valeurs est-il un tableau de proportionnalité ?

2°) Représenter graphiquement ce tableau de valeurs (attention au choix des unités !).

3°) Peut-on donner un modèle mathématique qui rend compte cependant de cette expérience ?

Un calcul numérique permet de répondre non à la première question mais le graphique de la deuxième question incite à proposer le modèle $l = a\,m$ où m est la masse (en g) suspendue au ressort et a un coefficient dont la détermination est hors programme...

Il peut être intéressant de rapprocher cet exercice de l'activité n°1 (*Allongement d'un ressort*) de Nathan 1992, p. 248 où on peut lire :

Les expériences des physiciens leur ont permis d'affirmer que « l'allongement du ressort est proportionnel à la masse de l'objet suspendu ».

Quelques mesures ont donné les résultats suivants :

Masse (en Kg)	0,05	0,200	0,500	1,700
Allongement (en cm)	0,4	1,6	4	13,6

Les deux tableaux de valeurs sont parfaitement plausibles, bien que nous ne croyons aucunement que les auteurs aient réalisé effectivement les expériences évoquées. Mais comment gérer les deux situations sans un discours nécessairement idéologique et flou sur la *modélisation* ?

Ou bien on évite le conflit et on ne met les élèves qu'en présence de situations où le numérique et le graphique disent oui (ou non), simultanément, à la linéarité, ou bien on les confronte à des situations où le graphique dit oui alors que le numérique dit non. C'est seulement dans ce second cas qu'il est bon que le rapport au graphique fonctionne sur le mode idéogrammatique puisque, sous ce mode, il n'est pas nécessaire que les points soient effectivement alignés pour suggérer la linéarité.

Conclusion

L'enseignement des mathématiques au collège ne peut éviter la rencontre avec les notions de courbes et de fonctions. On sait que ces deux notions posent des problèmes d'origine épistémologique. Mais repousser l'échéance ne résout rien.

On a vu que le traitement didactique actuel de cette rencontre, en privilégiant la fonction linéaire et des recours idéogrammatiques ou nomographiques aux graphiques cartésiens, tout en privant les notions de *fonction* et *courbe* d'un statut d'objet de savoir à enseigner, n'est sans doute pas satisfaisant. La transposition didactique de la notion de fonction reposant pour une grande part sur la notion et l'usage de représentations graphiques, il nous semble nécessaire pour aider toute réflexion sur le sujet de

- Dénoncer l'illusion de l'évidence graphique et le recours naïf ou systématique au graphique (« le graphique n'a pas de vertu didactique per se », voir Lacasta, 1995)

- Plaider pour une étude approfondie du rapport au graphique en situation didactique et a-didactique et pour une ingénierie intégrant de manière raisonnée le recours au graphique sous ses différents modes.

Qu'en pense les lecteurs de « petit x » ?

Bibliographie

BROUSSEAU G. (1983) : Les obstacles épistémologiques et les problèmes en mathématiques, *Recherches en Didactique des Mathématiques*, Vol. 4/2, 164-198, La Pensée sauvage éditions, Grenoble.

BROUSSEAU G. (1986) : Fondements et méthodes de la didactique des mathématiques, *Recherches en Didactique des Mathématiques*, Vol. 7/2, 33-115, La Pensée sauvage éditions, Grenoble.

BROUSSEAU G. (1988) : Le contrat didactique : le milieu, *Recherches en Didactique des Mathématiques*, Vol. 9/3, 309-336, La Pensée sauvage éditions, Grenoble.

CHAUVAT G. (1997) : *Etude didactique pour la réalisation et l'utilisation d'un logiciel de représentations graphiques cartésiennes des relations binaires entre réels dans l'enseigne-ment des mathématiques des DUT industriels*, Thèse, Université d'Orléans.

CHEVALLARD Y. (1985) : *La transposition didactique, du savoir savant au savoir enseigné*, La Pensée sauvage éditions, Grenoble.

CHEVALLARD Y. (1992) : Concepts fondamentaux de la didactique : perspectives apportées par une approche anthropologique, *Recherches en Didactique des Mathématiques*, Vol. 12/1, 73-112, La Pensée sauvage éditions, Grenoble.

CHEVALLARD Y. (1996) : Les outils sémiotiques du travail mathématique, *petit x*, n°42, 33-57.

DHOMBRES J. et alii (1992) : L'école normale de l'an III, leçons de mathématiques, Laplace-Lagrange-Monge, 240-242, Dunod.

LACASTA E. (1995) : *Les graphiques cartésiens de fonctions dans l'enseignement secondaire des mathématiques : illusions et contrôles*, thèse, Université de Bordeaux I.

PARMENTIER M. (1989) : *Leibniz ; la naissance du calcul différentiel*, Vrin, Paris.

RECANATI F. (1979) : *La transparence et l'énonciation, pour introduire à la pragmatique*, Editions du Seuil.

SCHNEIDER M. (1990) : Aux confins de l'analyse et de la géométrie : un obstacle épistémologique, *Actes de la Quatrième Université d'été d'histoire des mathématiques*, IREM de Lille, 1994.

SIERPINSKA A. (1992) : On understanding the notion of function, *in MAA Notes n°25 (The concept of function : Aspects of Epistemology and Pedagogy)*, p. 25-58, Mathematical Association of America.

YOUSCHKEVITCH A. P. (1981) : Le concept de fonction jusqu'au milieu du XIXe siècle, in *Fragments d'histoire des mathématiques*, brochure APMEP n°41.

Manuels scolaires :

HACHETTE (1992), DELORD R., TERRACHER P-H., VINRICH G. : Mathématiques 4^{e}.

NATHAN (1992), BARRA R., BORION G., JARDONNET M., LAMPIN M., MALAVAL J. : maths 4^{e}, coll. Transmath.