GEOMETRIE ET PARADIGMES GEOMETRIQUES

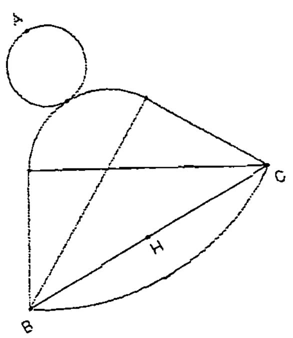
Catherine HOUDEMENT et Alain KUZNIAK,
IUFM de Haute-Normandie, IREM de Rouen,
DIDIREM de l'Université Paris 7

Résumé. Le propos de cet article est de réfléchir sur l'enseignement de la géométrie élémentaire et ceci à deux niveaux. Le premier prend en compte la formation des maîtres, qui nous semble essentielle dans le développement d'une conception cohérente de l'enseignement de la géométrie. Le deuxième niveau, moins traité ici, s'intéresse à la liaison entre la géométrie de l'école élémentaire et celle du collège.

1. Un exemple introductif : la cloche de Rouen

Ce problème a été donné au concours de recrutement des Professeurs d'Ecole de Rouen en 1998. Nous l'analysons pour dégager quelques malentendus autour de la géométrie et introduire notre approche de cet enseignement à partir de champs paradigmatiques différents.

Enoncé. La cloche
On souhaite agrandir la figure ci-dessous (ABCD) en (A'B'C'D') telle que A'H' mesure le double de AB.



Effectuez cet agrandissement à la règle non graduée et au compas, en laissant apparents les traits de construction.

Des élèves affirment que l'aire de la figure obtenue est 4 fois plus grande que celle de la figure initiale.
Ont-ils raison ? Justifiez votre réponse.
S'ils ont tort, trouvez le rapport exact entre les deux aires.

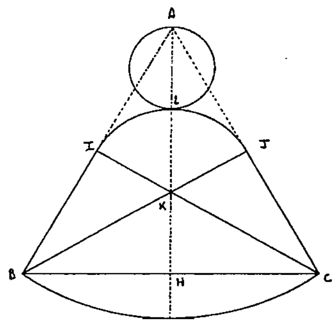
Le dessin fourni aux étudiants a été réalisé avec Cabri-Géomètre et les candidats doivent en réaliser un agrandissement à la règle non graduée et au compas.

Sur l'analyse de la figure

L'énoncé demande une analyse du dessin de type perceptif. Cette analyse fait appel à l'intuition dans son sens premier (appréhension d'un objet avec la vue). Cette intuition est mise en relation avec une première typologie des objets géométriques dépendante des connaissances de la personne qui analyse la figure.

Il faut noter qu'il n'y a, dans ce sujet de concours, aucune hypothèse explicitement fournie, c'est au candidat de dégager celles qui lui seront utiles pour une reproduction à une autre échelle.

Essayons de formuler un certain nombre d'hypothèses. Nous désignons par I, J, K et L les points suivants, non inscrits sur la figure originale.



H1 A est sur la droite (BI) et sur la droite (CJ).
H2 H est le milieu de [BC].
H3 Les angles IBC et JCB sont égaux à 60°.
H4 Les angles BIC et CJB sont des angles droits.
H5 L'arc IJ est un arc du cercle de centre K et de rayon KI
H6 Le cercle de diamètre AL est tangent en L à l'arc IJ
H7 BC est un arc de cercle de centre A et de rayon AB.

Sur la validation des hypothèses

Une fois ces hypothèses dégagées, se pose la question de leur validation. Celle-ci va dépendre du matériel autorisé et des connaissances mobilisées par l'observateur. Nous pouvons distinguer deux niveaux qui vont renvoyer à des conceptions de la géométrie différentes :
- le premier relève d'un champ d'expérience lié au monde sensible avec des outils de mesurage ;
- le second renvoie au monde plus abstrait des figures géométriques avec leurs propriétés mathématiques.

Dans le premier monde, celui de l'espace sensible, les outils privilégiés vont être la règle qui valide en particulier les alignements, l'équerre (avec ses angles de 90°, éventuellement de 30° et 60°) qui permet de confirmer les assertions relatives aux mesures des angles et enfin le compas pour vérifier les affirmations sur les arcs de cercle et les égalités de longueurs. L'utilisation du compas permet de constater que A n'est pas le centre de l'arc BC : en effet l'arc BC est centré sur le milieu du segment [AL].

Dans le monde des figures, certaines configurations apparaissent, comme le triangle équilatéral ABC. Le rôle joué par la règle non graduée et le compas est fondamental. En effet, à l'école, le nombre de figures constructibles reste limité. Dans le cas de la figure donnée au concours, l'indication des outils utilisés (et une appréciation de la grandeur) conduit à penser que les angles mesurent 90° et 60° et qu'il s'agit bien d'arcs de cercle.

Sur la construction de la figure

Cette construction dépend des outils utilisés.

On peut conserver la trousse à outil qui a servi à vérifier les hypothèses d'alignement et d'écart angulaire. Dans ce cas, le rôle joué par l'angle de 60° de l'équerre est fondamental. Il suffit en effet de tracer (AH), puis la droite perpendiculaire en H à (AH). Enfin par glissement de l'angle à 60° de cette équerre, on obtient le triangle équilatéral.

Si toutes les opérations se sont effectuées dans le cadre de l'observation du dessin, puis de sa validation avec des instruments qui servent ensuite à la construction, le problème est résolu dans un paradigme géométrique homogène, où l'espace mis en jeu et les outils utilisés participent du monde sensible des objets matériels. Ce premier cadre, où jouent le raisonnement, l'expérience et l'intuition, constituera la géométrie élémentaire naturelle (géométrie I).

Mais l'énoncé demande une construction uniquement à la règle non graduée et au compas. Dans ce cas, le raisonnement sur le dessin ne suffit plus et il est nécessaire de prélever des propriétés de la figure. Il faut ensuite relier ces propriétés avec des constructions standards d'objets géométriques particuliers. Suivant les constructions choisies, il peut être nécessaire d'appliquer le théorème de Thalès ou les propriétés des médianes d'un triangle équilatéral.

Cette fois, le champ paradigmatique mis en jeu change et une nouvelle géométrie apparaît qui privilégie d'autres modes de raisonnement, d'expérience et d'intuition. Il s'agit de ce que nous appellerons la géométrie élémentaire axiomatique (géométrie II).

Dans le cadre du sujet présenté, le changement de paradigme n'est pas explicite et est source de malentendu. Le sujet est donné dans la géométrie I, mais les attentes des correcteurs se situent dans la géométrie II. Il nous semble qu'il y a là une source permanente de problèmes liés à une non-explicitation du cadre géométrique dans lequel se placer.

Avant de tirer les conséquences de cette affirmation, nous allons présenter plus en détail les différentes géométries que nous distinguons et le cadre théorique qui est à la base de notre réflexion.

2. Un exemple de cadre conceptuel

Dans la scolarité, de la maternelle à l'enseignement supérieur, force est de constater que le mot géométrie ne recouvre pas le même type d'activités, ni de raisonnement. Les figures n'ont pas un statut identique, puisqu'elles peuvent disparaître dans certaines conceptions de la géométrie. Le lien avec l'espace physique s'amenuise pour faire la place à une géométrie plus abstraite.

Il nous semble qu'une grande partie de la confusion qui règne dans l'enseignement autour de la géométrie résulte de la diversité de points de vue qui renvoient finalement à des conceptions et à des approches méthodologiques différentes. Or, dans une perspective de formation d'enseignants, il est nécessaire de s'interroger : *« pourquoi faire de la géométrie ? »* et *« pourquoi faire faire de la géométrie ? »*. Cela suppose un détour épistémologique, mais ce détour peut envisager de multiples chemins. Dans le cadre de notre étude, qui concerne des enseignants apprenant les mathématiques pour les enseigner ensuite à des élèves, il nous semble important de privilégier les approches épistémologiques qui valorisent la relation entre le sujet et l'objet de connaissances.

2.1 Intuition, expérience et déduction[1]

Nous avons choisi comme première approche des problèmes posés précédemment d'utiliser les travaux de Ferdinand Gonseth en les interprétant en fonction de notre position de formateur d'enseignants[2] .

Ferdinand Gonseth est né en 1890 dans le Jura bernois et est mort en 1974 à Lausanne. C'est un mathématicien, contemporain de Piaget (1896-1980). Il a été professeur à l'Ecole Polytechnique de Zurich ; il a aussi formé des enseignants, ce qui a donné naissance à son ouvrage *Les fondements des mathématiques* (1926, éditions Blanchard)[3].

Gonseth intègre ses travaux sur la géométrie dans le cadre plus vaste d'une réflexion sur la démarche scientifique. Son approche est dialectique ; elle vise à mieux comprendre l'effort qui construit la géométrie dans son rapport à l'espace et au monde sensible. Pour cela, il dégage différentes synthèses dialectiques de la géométrie qui s'organisent précisément autour de trois piliers essentiels : intuition, expérience et déduction.

Dans la perspective pédagogique qui est la nôtre, il importe de bien comprendre l'évolution et les rapports existants entre géométrie et réalité. Pour un sujet confronté à l'apprentissage de la géométrie, cette articulation passe par une meilleure définition des trois modes de connaissances de l'espace que constituent l'intuition, l'expérience et la déduction.

Nous allons maintenant préciser le sens que nous attribuons à ces trois termes en revisitant ces expressions. Puis nous développerons notre propre synthèse qui résulte d'une adaptation à notre sujet d'étude des travaux de Gonseth.

---

[1] Le sens *particulier* que nous attribuons à ces termes sera précisé par la suite.

[2] rencontrant sur ce point l'équipe genevoise de F.Conne et F.Ruhal.

[3] Autres écrits : *Les mathématiques et la réalité* (1936, éditions Blanchard), *La géométrie et le problème de l'espace* (1945-55), Editions du Griffon, Lausanne)

2.1.1. L'intuition

Prendre en compte l'intuition nous semble fondamental dans l'approche de la géométrie. Mais le premier embarras que l'on éprouve en mettant l'accent sur l'intuition provient de la difficulté à définir précisément ce qu'englobe ce terme. A moins d'admettre que tout le monde a une intuition de ce qu'est l'intuition. Mais il nous importe ici d'être opératoire.

L'approche de l'intuition relève, sans doute, de différents champs de connaissance comme la logique ou la psychologie. Nous suivrons Gonseth lorsqu'il reprend l'idée kantienne de forme intuitive comme forme a priori de la connaissance de l'espace. L'intuition apparaît comme le réceptacle interprétatif de nos sensations, elle structure la pensée en terme d'évidence. L'intuition peut se caractériser alors comme une prise de contact immédiate, directe, concrète. Mais ce contact direct réalise en même temps la compréhension la plus intime avec son objet, le saisissant dans son essence et dans sa singularité. L'intuition s'opposerait ainsi à tout ce qui est pensée discursive, « chaîne de raisons, détours de la démonstration, mise en œuvre formelle, application minutieuse d'une méthode. » (Mouy 1952)[4]

Dans notre conception, l'intuition peut évoluer avec le sujet grâce à un ensemble d'expériences et donc de connaissances a posteriori. La contradiction n'est qu'apparente : il faut voir l'intuition structurée au niveau de l'individu en un ensemble de strates qui se superposent et font oublier les premières intuitions. Certaines de ces strates seraient communes à tous les individus ; c'est le travail des psychologues de les mettre en évidence (théorie des stades), d'autres dépendraient de la pratique du sujet et seraient dépendantes du passé scolaire ou professionnel.

E.Fischbein (1920-1998) a spécifiquement étudié le rôle que joue l'intuition dans les mathématiques

> « Intuition summarizes experience, offers a compact, global representation of a group of data, helps overcome the insufficiency of information, introduces behaviorally meaning interpretations in a reasoning process (...). But, at the same time, intuition remains a potential source of error because it does not represent a simple duplicate of practically given conditions. Its role is to offer behaviorally meaningful representations, internally structured, of intrinsic credibility, even if these qualities do not, in fact exist in the given situation. » [5]

---

[4] Mouy P (1952) *La logique.* Editions Hachette.

[5] « L'intuition résume l'expérience ; elle propose une représentation compacte et globale d'une série de données et permet de pallier l'insuffisance des informations ; elle introduit des interprétations de type comportemental dans un processus de raisonnement (...). Mais simultanément, l'intuition reste une source possible d'erreurs parce qu'elle n'est pas une simple copie des conditions pratiquement données. Son rôle est d'offrir une représentation de type comportemental, structurée de l'intérieur, intrinsèquement crédible, même si, en fait, ces qualités font défaut à la situation de départ. » Traduit de E.Fischbein (1987) *Intuition in Science and Mathematics. An Educational Approach.* Kluwer Academic Publishers. Second printing 1994.

Cette intuition est reconnue par certains mathématiciens comme composante de leur raisonnement. Ainsi Dieudonné[6] précise :

> « Tous les grands mathématiciens qui ont parlé de leurs travaux se sont toujours plu à insister sur le rôle que joue ce qu'ils appellent généralement leur 'intuition' (insight). (...) mais il faut renoncer à prendre le mot 'intuition' au sens qu'on lui donne d'ordinaire. La difficulté est que ce que le mathématicien appelle « l'intuition » est pour lui une expérience psychologique tout à fait personnelle, à peu près incommunicable et il y a tout lieu de croire que les 'intuitions' de deux mathématiciens sont le plus souvent très différentes. »

Il ajoute encore « et bien que cela puisse paraître paradoxal, l'abstraction peut être utile à la formation de 'l'intuition' plutôt qu'elle ne la paralyse ».

2.1.2. L'expérience

L'expérience permet d'approcher la géométrie en restant proche de l'action et d'une certaine réalité physique. La nature de l'expérience géométrique va dépendre des objets sur lesquels elle s'exerce.

Ainsi, dans un premier cas, faire une expérience en géométrie consistera à vérifier matériellement ce que l'on avance. Si le fait que *deux points distincts déterminent une seule droite* peut s'accepter intuitivement, *la somme des angles intérieurs d'un triangle est un angle plat* n'est pas une propriété intuitive (a priori), mais on peut le constater en rapprochant des gabarits des trois angles du triangle. Pliages, découpages et constructions à la règle et au compas constituent la base de cette approche expérimentale qui peut être développée dès l'école primaire. Cette approche se développe dans un espace mesurable, grâce à la perception ou à des instruments.

Aux moyens traditionnels d'expérimentation, s'ajoutent désormais les possibilités offertes par l'informatique avec certains logiciels (Cabri-géomètre[7] ou Logo[8]). Il s'agit ici de simulations qui opèrent sur des objets virtuels. Ainsi peut-on découvrir certaines intersections de droites, certains alignements de points ou des lieux géométriques. Les fractales sont l'illustration la plus contemporaine de ce lien entre géométrie et expérience par l'intermédiaire de la simulation.

Enfin une dernière forme d'expérience peut être mentale, experimental thought, elle consiste à mettre en œuvre mentalement des déplacements, des découpages sans les effectuer réellement.

2.1.3. La déduction ou *ratio*

On peut définir la déduction en disant que, certaines connaissances étant considérées comme acquises, elle consiste à en tirer d'autres qui en sont les conséquences. La déduction permet d'atteindre de nouvelles informations à partir de celles déjà acquises,

---

[6] Dieudonné (1987) *Pour l'honneur de l'esprit humain - Les mathématiques aujourd'hui.* Editions Hachette.

[7] Capponi B. et Laborde C. (1991) "Cabri Géomètre, un environnement pour l'apprentissage de la géométrie élémentaire". *Actes de la VI école d'été de didactique des mathématiques.* Plestin les Grèves.

[8] Par exemple Mendelsohn (1985) "L'enfant et les activités de programmation" dans la revue *Grand N n°35*, Grenoble.

sans recours à l'expérience ou à toute autre source extérieure. Elle permet de réorganiser les apports de l'expérience. Nous employons le mot **déduction,** mais l'usage que nous en faisons est plus vaste et proche du raisonnement dans son ensemble. Il peut dans certains cas recouper l'argumentation de R.Duval[9].

Le pôle déductif et logique est certainement le plus naturel quand on pense à la géométrie. Certains ne justifient le maintien de l'enseignement de la géométrie que pour les apports logiques qu'elle est censée apporter. Mais il est important de ne pas réduire ces aspects déductifs à la démonstration basée sur des axiomes bien définis et en nombre réduit. L'enfant peut aussi faire des déductions et prouver des affirmations déduites de ses observations et basées sur des constructions. C'est le rôle (complexe) du professeur de le faire passer d'une démarche argumentative à une démarche démonstrative à partir de certaines propriétés des figures qui auront été définies avec lui. Ces figures deviennent alors le support adapté pour guider l'intuition, mais elles ne suffisent plus à fournir une preuve.

2.1.4. Une première articulation entre intuition, expérience et déduction

Gonseth propose trois synthèses dialectiques de la géométrie, en réorganisant les trois composantes précédentes, tout en les différenciant [10] :

« être géomètre c'est ne pas confondre une évidence issue de l'intuition avec un renseignement issu de l'expérience.et le résultat d'une expérience avec la conclusion d'un raisonnement ».

Nous avons repris son idée et l'avons transformée pour l'adapter à notre propos. La synthèse que nous présentons dans le paragraphe suivant nous est personnelle et ne doit pas être comprise comme une présentation fidèle des idées de Gonseth.

René Thom[11] illustre la nécessaire relation entre intuition et déduction par cette audacieuse métaphore :

« La déduction est à l'aveugle ce que l'intuition est au paralytique, l'une avance et ne voit pas, l'autre voit mais n'avance pas ».

2.2. Nos propres synthèses

Plutôt que de voir l'évolution de la géométrie comme une suite de ruptures irréconciliables, nous adoptons une vision unificatrice de la géométrie grâce à cette idée de synthèse dialectique évolutive entre divers pôles. Nous présentons dans ce paragraphe notre proposition des trois synthèses que nous appellerons **géométrie naturelle** (géométrie I), **géométrie axiomatique naturelle** (géométrie II) et **géométrie axiomatique formaliste** (géométrie III). Ce point de vue nous parait fondamental dans une perspective de formation des maîtres. Comme nous allons l'illustrer, chaque synthèse géométrique (géométrie I, II ou III) peut contenir les trois pôles (intuition, expérience,

---

[9] Duval R. (1992) : "Argumenter, démontrer, expliquer...". dans *Petit x n°31,* Grenoble.

[10] Gonseth F (1945-1955) *La géométrie et le problème de l'espace.* Editions du Griffon, Neûchatel .

[11] Cité par Largeault J (1993) *Intuition et Intuitionnisme.* Vrin.

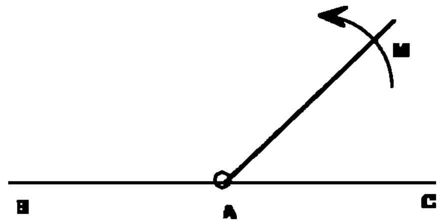
déduction) ; il y aurait même malaise si l'un des pôles était perdu (par exemple, en cas d'hypertrophie du pôle déductif).

2.2.1. La géométrie naturelle ou la confusion entre la géométrie et la réalité

La géométrie naturelle a pour source de validation la réalité, le sensible. Elle comprend les trois aspects, intuition, expérience, déduction, mais la déduction s'exerce prioritairement sur des objets matériels à l'aide de la perception et de la manipulation d'instruments. En ce sens la géométrie d'Euclide n'est pas naturelle ; il s'agit plutôt de celle de Clairaut[12] (ou dans certains cas de Legendre) où la déduction peut être liée à une expérience mécanique et où on ne doit pas encombrer l'esprit en démontrant des choses évidentes. La démonstration suivante de Legendre illustre ce propos.

Par un point pris sur une droite, on peut élever une perpendiculaire sur cette droite, et on ne peut en élever qu'une.

Legendre base son raisonnement sur la figure « matérialisable » suivante :



La droite AM d'abord couchée sur AC tourne autour du point A. L'angle MAC d'abord petit devient grand contrairement à son angle adjacent MAB qui devient petit pour atteindre 0. Ainsi l'angle MAC d'abord plus petit que MAB devient plus grand que cet angle : par conséquent il y aura une position AM de la droite mobile où ces deux angles seront égaux et il est évident qu'il n'y en aura qu'une seule.

Cette idée de preuve dynamique et mécanique diffère des démonstrations statiques de la géométrie axiomatique euclidienne, mais elle semble par contre très proche de la perception que peut avoir l'enfant de l'espace. Elle peut par exemple résulter de l'usage d'un pliage ou d'une superposition.

Ainsi, que ce soit par pliage ou par « mouvement virtuel », la construction et la perception sont au cœur d'une géométrie naturelle de type expérimental. Le raisonnement que privilégie cette approche est le raisonnement de type constructif qui est fréquent dans la résolution de problèmes.

2.2.2. La géométrie axiomatique naturelle ou la géométrie comme schéma de la réalité

Dans la synthèse axiomatique euclidienne, les aspects « non rigoureux » et les appels à l'intuition de l'espace cèdent la place à la déduction logique et à la démonstration au sein d'un système axiomatique le plus précis possible. Gonseth pose un certain de nombre de questions sur cette géométrie. Quelle est la place de l'axiomatique ? Peut-on

---

[12] Voir l'étude d'E. Barbin (1991) Les éléments de géométrie de Clairaut : une géométrie problématisée, *Repères IREM,* n°4.

choisir n'importe quel type d'axiomes ? Quelle est la place de la réalité quand on axiomatise ?

L'axiomatisation est certes une formalisation, mais elle n'est pas nécessairement formelle ; la syntaxe n'est pas nécessairement coupée de la sémantique. La deuxième synthèse dialectique propose une géométrie qui n'est pas réduite au naturel, mais qui conjugue les notions d'horizon de la réalité, de schéma et de modèle. Cette géométrie ne prétend pas comme la géométrie naturelle qu'elle est la réalité, mais elle aspire à être un schéma de la réalité. La géométrie euclidienne classique est basée sur ce pas de côté, mais tout l'effort de schématisation est dissimulé et reste implicite.

2.2.3. La géométrie axiomatique formaliste ou l'indépendance de la géométrie et de la réalité

Cette fois, à la suite de l'apparition des géométries non-euclidiennes, le cordon ombilical qui liait la géométrie et la réalité est coupé. Les axiomes ne sont plus fondés sur le sensible et la primauté du raisonnement logique s'impose. L'approche axiomatique formaliste est bien explicitée par la rude affirmation de Wittgenstein[13] qui clôt le débat entre géométrie et réalité :

« Les axiomes d'une géométrie peuvent ne contenir aucune vérité. »

Dans l'enseignement, cette conception a permis d'introduire une géométrie élémentaire basée sur l'algèbre linéaire dont l'espace sous-jacent est l'espace R^3 muni d'un produit scalaire. Poussant jusqu'au bout les conséquences de cette vision algébrique de la géométrie, Dieudonné peut affirmer dans l'introduction de son traité[14] :

« Je me suis permis de n'introduire *aucune* figure dans le texte, ne serait-ce que pour faire voir que l'on s'en passe fort bien ».

3. Deux exemples pour illustrer

Pour éclairer notre propos, nous allons illustrer notre approche de ma géométrie sur des exemples volontairement choisis de l'école primaire au lycée.

3.1 Un exemple de propriété

Dès le cycle trois de l'école élémentaire, les deux premiers niveaux de géométrie (I et II) se côtoient. Prenons par exemple l'extrait du manuel scolaire *Nouvel Objectif Calcul CM2* (p. 34) : dans la situation dite de *Découverte*, les auteurs proposent aux élèves de construire (sur leur table) tous les triangles possibles en juxtaposant trois pailles parmi des pailles de trois longueurs fixées (4 cm, 5,5 cm et 8 cm). Cette activité propose une **expérience** dans le cadre de la **géométrie I**. Les élèves peuvent constater que les assemblages proposés ne sont pas toujours possibles.

---

[13] Wittgenstein (1918) 1961 *Tractatus logico-philosophicus*. Editions Gallimard.

[14] Dieudonne J. (1964), *Algèbre linéaire et géométrie élémentaire*, page 15, Hermann.

L'expérience permet donc de conclure à l'impossibilité d'assembler dans tous les cas un triangle à partir de trois pailles, et cela est lié aux longueurs choisies par le maître pour les pailles. Il est alors possible d'expliciter les raisons de cette impossibilité : « ça ne marche pas parce que c'est trop court, parce que les pailles ne se joignent pas ». A condition de faire le passage des pailles aux longueurs, les élèves peuvent tirer de l'expérience un début d'explication du processus de *non-construction* d'un triangle donné par les longueurs de trois côtés : « on ne peut pas toujours construire un triangle à partir de trois longueurs fixées ». Ils peuvent aller jusqu'à expliquer dans quels cas la construction n'est pas possible : « si une des longueurs est supérieure à la somme des deux autres ».

C'est la voie indiquée dans le livre du maître (p. 66), pour terminer l'activité :

« Conclure que, pour construire un triangle, il faut que le plus grand côté soit inférieur à la somme des deux autres. »

Mais la conclusion du livre du maître correspond à ce que nous appelons un aspect *déductif* de la géométrie I : elle fait passer à la généralisation du processus de *construction* de triangles : « pour pouvoir construire un triangle à partir de trois longueurs fixées, il est nécessaire que chacune des trois longueurs (ou la plus grande) soit inférieure à la somme des deux autres ».

Le rôle du maître est essentiel pour passer à cette conclusion, beaucoup plus riche que la constatation de départ : il doit au minimum formuler la question qui poussera à la généralisation.

Ainsi cet exemple nous permet d'illustrer qu'à l'école élémentaire, se rencontrent expérience et déduction, souvent liées, le maître jouant un rôle essentiel dans le passage vers la déduction. Mais continuons notre analyse pour montrer un passage possible à la **géométrie II**.

L'activité telle qu'elle est proposée se situe dans la géométrie I. Cependant le passage de l'expérience de construction de triangles avec des pailles au processus absolu d'existence des triangles à partir de trois longueurs arbitraires donne du sens à l'axiome du plus court chemin de la géométrie axiomatique II. On pointe là, un processus **possible** de fabrication d'un axiome de la géométrie axiomatique II à partir de la géométrie naturelle : l'activité commence dans la géométrie naturelle, l'expérience fait naître un questionnement qui permet de déduire l'énoncé du plus court chemin, qui ensuite existe comme point de départ dans la géométrie II sous la nouvelle forme suivante :

Si A, B et C sont trois points du plan, l'inégalité suivante $AB \leq AC + BC$ est toujours vérifiée.

Ce même dessin « triangulaire » donne lieu à une nouvelle interprétation dans la **géométrie III**. En effet, de l'inégalité triangulaire dérive en géométrie III une nouvelle propriété, cette fois ci liée aux vecteurs :

Si A, B et C sont trois points du plan, les trois vecteurs vérifient la propriété, $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CB}$.

Ainsi apparaissent trois interprétations géométriques différentes d'un même « dessin », ces interprétations se situant dans différents paradigmes :

• en géométrie I, on lit le dessin au premier degré ; c'est le dessin qui est objet ;

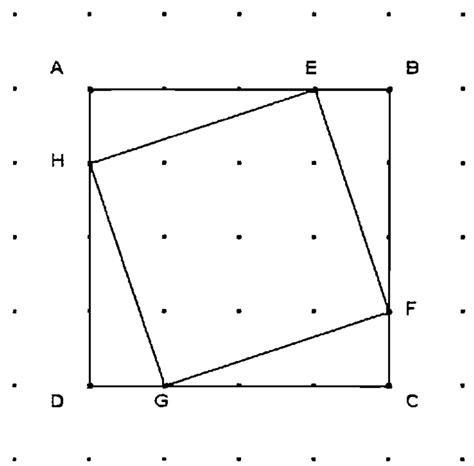
• en géométrie II, le dessin n'illustre plus l'existence effective du triangle : le triangle peut se voir, mais son existence n'est validée que par un axiome ; le dessin n'est que le support d'objets construits sur le sensible, les segments ; il n'est plus objet d'étude ;

• en géométrie III, le dessin est support d'une relation entre des objets virtuels, les vecteurs ; le dessin permet des conjectures qui sont validées par les règles algébriques liées aux vecteurs.

Bien entendu le passage, en particulier sur cet exemple, d'une problématique de géométrie I à une problématique de géométrie II n'est ni automatique, ni facile (Arsac, Mante 1997). La construction de situations didactiques de « passage » constitue un sujet de recherche.

3.2 Un exemple d'exercice

Considérons le problème suivant : le point de départ est la figure ci-dessous et la question porte sur la nature du quadrilatère EFGH.



Dans un premier temps, les seules hypothèses (que nous appellerons hypothèses 0) sont la nature du support (réseau à mailles carrées) et le fait que les points nommés soient des nœuds effectifs de ce réseau.

3.2.1. Etude des hypothèses qu'il est possible d'associer à cette figure

Les hypothèses à saisir sont multiples, par exemple :

• hypothèses 1 : ABCD est un carré ; E, F, G, H quatre points situés sur les quatre côtés du carré, pris dans cet ordre [AB], [BC], [CD] et [DA] ;

• hypothèses 2 : les hypothèses 1 et les segments AE, BF, CG et DH ont même longueur ;

• hypothèses 3 : les hypothèses 2 et aussi AE = AB-EB.

Dans un problème de géométrie classique, il est usuel que celui qui pose le problème annonce les hypothèses, indiquant ainsi la façon « légale » de lire la figure. Ce faisant, il se libère du dessin et pose implicitement qu'il existe une autre validation que la validation par les sens ; les hypothèses écrites font donc entrer dans le cadre de la géométrie II (ou III). Remarquons que simultanément cette écriture des hypothèses dégage du dessin les éléments au moins nécessaires à la construction de la réponse.

Par contre, avec le dessin comme seules hypothèses, on peut dire que le problème est posé dans la géométrie I. Peut être alors considérée comme hypothèse tout ce qui se « lit » sur la figure.

Ainsi la présence ou non d'hypothèses écrites, le choix des hypothèses place implicitement le problème dans un certain paradigme géométrique.

Nous allons voir qu'il existe des résolutions relevant de chacune des géométries définies précédemment.

3.2.2. Résolution dans le cadre de la géométrie naturelle

Le problème peut se construire en suivant les étapes implicites de construction de la figure : d'abord un carré initial, puis de segments intérieurs particuliers [EF], [FG], [GH] et [HE], apparaît alors une nouvelle figure EFGH. Quelle est sa nature ?

Une première solution (**Solution 1**), purement *intuitive,* indique que EFGH est un carré, ça se voit, il a les cotés égaux et ses angles sont droits.

Cette appréhension intuitive de la figure sera à la base de toutes les solutions qui vont suivre. Elle est à rapprocher de la construction sur un géoplan ou planche à clous d'un carré avec un élastique. Il existe une justification purement perceptive et intuitive : on allonge plus ou moins l'élastique. Elle pose parfois des problèmes aux enfants qui n'ont pas acquis la conservation des longueurs (au sens de Piaget).

Une solution (**Solution 2**) basée sur *une expérience* va passer par la vérification de l'égalité des côtés avec un compas et de l'orthogonalité des cotés grâce à une équerre. On retrouve ici l'idée de Gonseth d'une première expérience liée à l'idée d'un espace mesurable. L'expérience doit rester proche de l'intuition pour garantir des résultats cohérents. Voici un exemple étonnant de dissociation chez une étudiante, Corinne, 23 ans, licence d'anglais, préparant le concours de professeur d'école.

Elle commence par constater l'égalité des longueurs des côtés EF, FG, GH et HE avec son compas. Puis elle vérifie toujours avec le compas que cette longueur est égale à BF. (EF mesure 3,18 unités contre 3 à BF). Elle superpose ensuite (par rotation de FE sur FB ?) EFGH avec le carré construit sur BF et intérieur à ABCD.

Ici, la confiance excessive dans des instruments de mesure lui fait négliger le fait « évident » que EF est plus grand que BF. Elle nie d'ailleurs cela et insiste sur le fait qu'elle a vérifié avec son compas l'égalité de ces deux côtés.

Nous avons donc là deux exemples de résolutions **dans la géométrie naturelle I**. En voici une autre.

La solution (**Solution 3**) qui suit lie *déduction et expérience* et se situe aussi dans la géométrie naturelle : par superposition du gabarit d'un triangle rectangle égal à AEH, les élèves vérifient leur idée que l'angle AHE est égal à BEF. Ils utilisent une expérience antérieure qui leur avait permis de constater qu'on obtient un angle plat en juxtaposant par collage les trois secteurs angulaires d'un triangle et en déduisent que HEF est un angle superposable à EAH, donc droit.

3.2.3. Résolution dans le cadre de la géométrie II

Nous partons d'hypothèses énoncées : par exemple les hypothèses 2. Le texte de départ doit dégager de la figure ce qui peut y être lu (sous-entendu tout ce qui n'est pas écrit ne doit pas y être lu directement sur le dessin, mais déduit).

Voici ce que serait une solution (**Solution 4**) dans la géométrie II. L'intuition nous dit que les triangles AEH, BFE, CFG et DHG sont superposables. Confirmons cette intuition grâce à une démonstration : par hypothèse AE=BF=CG=DH et EB=FC=GD=HA et par le théorème de Pythagore, les côtés HE, EF, FG et GH sont de même longueur. Notre intuition est confirmée.

Donc les angles AEH, BFE, CGF et DHG ont même mesure, qui correspond au complémentaire des angles AHE, BEF, CFG et DGH. Les angles du quadrilatère sont donc droits (comme dernière partie d'un angle plat)

Le quadrilatère EFGH est donc un carré.

Voici une autre solution (**Solution 5**) dans la géométrie II.

Les segments HE, EF, FG et GH sont des diagonales de rectangles (par exemple AEE'H). Par déduction des égalités des longueurs données par l'hypothèse, les rectangles sont superposables, donc les diagonales ont même longueur et font le même angle avec le côté correspondant. On obtient déjà que EFGH est un losange.

On considère la rotation de centre E et d'angle (EH, EA) : le point H se transforme en H' sur [EA) et simultanément F se transforme en F' sur la perpendiculaire à (AB) qui passe par E. G se transforme en G'.

On obtient un losange EF'G'H' avec un angle droit. C'est donc un carré. Par suite EFGH est aussi un carré.

Nous avons vu que le fait d'énoncer des hypothèses précises plaçait le problème dans une autre géométrie que la géométrie naturelle, mais ce fait n'est pas clair pour les élèves, il est souvent source de malentendus. Ainsi, rencontre-t-on, chez les élèves de collège (de 12 et 15 ans), une solution (**Solution 6**) mixte, entre géométrie I et II. Ils vérifient l'égalité des quatre côtés avec la règle graduée ou le compas, puis constatent l'existence d'un angle droit avec l'équerre, enfin ils concluent que « EFGH est un carré comme losange avec un angle droit ». Cette solution est à mi-chemin entre la géométrie naturelle (expérience) et la géométrie axiomatique. En effet elle s'appuie sur le sensible mesurable et sur un théorème connu (un losange avec un angle droit est un carré).

Cette preuve présente un défaut de cohérence, puisque certains résultats sont vérifiés sur la figure, et d'autres sont montrés comme connaissances d'une certaine axiomatique. Ce défaut de cohérence, très courant dans les productions des élèves de collège, résulte peut-être justement du fait que les cadres respectifs des géométries où on se place pour la preuve ne sont jamais suffisamment explicités.

3.2.4. Résolution dans le cadre de la géométrie axiomatique formaliste (géométrie III)

Dans le cadre de cette géométrie, les hypothèses doivent aussi être écrites, soulignant les propriétés effectives de la figure à prendre en compte pour l'étude de la question. L'énoncé est donné par exemple avec les hypothèses 2 et donc posé dans le cadre de la géométrie II.

La résolution dans la géométrie III peut s'illustrer ainsi : le choix d'un repère orthonormé d'origine D, d'axes [DG) et [DH) nous fait passer d'un cadre géométrique à un cadre numérique (Douady 1984) ; une première étape consiste à écrire les coordonnées des vecteurs EF, FG, GH et HE issues de la perception (seule concession nécessaire à l'intuition) et des hypothèses ; ensuite le calcul des normes des vecteurs et du produit scalaire permet de montrer que EFGH est un carré. On peut s'aider de la figure, mais on ne peut pas utiliser des données évidentes, comme les égalités des longueurs EF, FG, GH et HE. Là la figure n'est qu'un support pour les objets virtuels (en géométrie II) que sont les vecteurs.

3.3. Les paradigmes associés à un problème géométrique

L'existence de ces différentes façons d'envisager un même problème est une source constante de difficultés dans l'enseignement de la géométrie. De plus, elle nous semble spécifique de cette partie des mathématiques élémentaires. En effet, prenons le problème concret suivant : 9 objets coûtent 15 F, quel est le prix de 15 objets ? La résolution de ce problème passe par l'utilisation d'un modèle, celui de la proportionnalité. Il existe plusieurs procédures de résolution, mais un seul choix de modèle (tout autre modèle contient la proportionnalité).

Prenons maintenant un problème géométrique, dans quel paradigme se placer pour le résoudre : géométrie I, II ou III ? Si le problème est théorique au départ, on reste dans la géométrie théorique (II ou III). Dans l'exemple que nous venons de traiter, la nécessité d'expliciter les hypothèses place la résolution en géométrie II ou III. Par contre si la question à résoudre se présente dans le monde physique ou si même si elle l'évoque, il existe un véritable choix de traitement : reste-t-on dans la géométrie I ou passe-t-on dans la géométrie II ?

En résumé, il est en général attendu que l'élève traite un problème géométrique dans une géométrie de niveau égal ou supérieur (géométrie I, II ou III) à celui dans lequel le problème est posé. Mais cette demande n'est pas explicitée, il n'existe même pas de mot pour dire, en général, ce niveau de géométrie.

Cette distinction de niveaux est pourtant reconnue dans certains problèmes, ainsi la construction effective d'un pentagone ou d'un heptagone régulier convexe se place dans la géométrie I (avec de l'intuition, de l'expérience et de la déduction notamment pour travailler sur des mesures approchées d'angles), mais le problème de la constructibilité (à la règle et au compas) se place en géométrie II ou III. Pour ces problèmes de reproduction de figures, il existe bien deux expressions différentes pour désigner le paradigme dans lequel on se place : construction et constructibilité. Par contre, et c'est un peu l'objet de nos écrits, il n'existe pas, pour la géométrie en général, de double ou triple expression pour désigner le paradigme dans lequel on travaille.

4. Conclusion

A la lumière des exemples, le tableau suivant nous semble bien résumer les attributs de chacun des paradigmes géométriques.

	Géométrie naturelle I	Géométrie axiomatique naturelle II	Géométrie axiomatique formaliste III
Intuition	Sensible, liée à la perception, enrichie par l'expérience	Liée aux figures	Interne aux mathématiques
Expérience	Liée à l'espace mesurable	Schéma de la réalité	De type logique
Déduction	Proche du réel et liée à l'expérience par la vue	Démonstration basée sur des axiomes	Démonstration basée sur des axiomes
Type d'espace	Espace intuitif et physique	Espace physico-géométrique	Espace abstrait euclidien
Statut du dessin	Objet d'étude et de validation	Outil pour chercher, conjecturer	Outil heuristique
Aspect privilégié	Evidence et construction	Propriétés et démonstration	Démonstration Et lien entre les objets.

Nous avons dégagé trois synthèses possibles qui permettent d'articuler de manière cohérente la progression globale de l'enseignement de la géométrie : la géométrie naturelle (géométrie I), la géométrie axiomatique naturelle (géométrie II) et la géométrie axiomatique formaliste (géométrie III). Cette dernière, sans doute à cause du niveau d'enseignement étudié, est restée un peu à l'arrière-plan.

Pour nous, l'approche de la géométrie structurée autour de trois modes de connaissance identiques, intuition, expérience, déduction, mais évoluant dans le temps, peut constituer une source de clarification pour les futurs enseignants. Elle doit leur permettre d'enrichir leur propre conception de la géométrie et de la confronter avec le paradigme géométrique dans lequel leurs élèves doivent évoluer.

Des études que nous avons menées nous montrent que les manuels scolaires du cycle trois de l'école élémentaire (CE2, CM1 et CM2) proposent essentiellement des activités géométriques dans une géométrie naturelle où le mode de validation est le sensible. Il semblerait se dégager une épistémologie spontanée des auteurs de ces manuels, qui privilégie l'expérience dans le cycle trois, aux dépens de l'intuition et de la déduction. Les activités proposées rendraient possibles certaines incursions dans la géométrie II, mais celles-ci sont rarement menées à terme.

De nouvelles investigations sont nécessaires pour, d'une part, sensibiliser les professeurs stagiaires à cette approche de la géométrie, d'autre part, observer et favoriser la prise en compte par les enseignants de ces paradigmes dans leurs réalisations didactiques.

Bibliographie

ARSAC G. (1994) Vérité des axiomes et des théorèmes en géométrie. Vérification et démonstration. *petit x*, n°37, 5 - 33. IREM de Grenoble.

ARSAC G, MANTE M. (1997) Situations d'initiation au raisonnement déductif. *Educational Studies in Mathematics*, ,Vol 33, n°1.

BERGUE D. et al. (1991) De la figure vers la démonstration. *petit x*, n°27, 5 - 39. IREM de Grenoble.

BERTHELOT R. SALIN M.H (1994) L'enseignement de la géométrie à l'école primaire *Grand N* n°53, 39 - 56, IREM de Grenoble.

BROUSSEAU G. (1983) Etude des questions d'enseignement. Un exemple : la géométrie. *Séminaire de didactique des mathématiques et de l'informatique*, LSD, IMAG. Université Fourier. Grenoble.

CHEVALLARD Y. et JULLIEN M. (1991) Autour de l'enseignement de la géométrie, première partie, *petit x*, n°27, 41 - 76. IREM de Grenoble.

DOUADY R. (1984) *Jeux de cadre et dialectique outil objet dans l'enseignement des mathématiques*. Thèse soutenue à l'Université Paris 7. Paris : IREM de Paris 7.

DUSSUC M-P. (1994) *Du constat graphique à l'évidence géométrique : étude de démarches d'élèves de CM2 et de 5ème*. Mémoire de DEA de Didactique des Mathématiques. Université Lyon I.

DUVAL R. (1988) Approche cognitive des problèmes de géométrie. *Annales de Sciences Cognitives et de Didactiques de Strasbourg,* 57 - 74, IREM de Strasbourg.

FISCHBEIN E (1994) *Intuition in Science and Mathematics. An Educational Approach.* Reidel (1987) Kluwer Second printing.

FLORIS R. (1996) *Qui a tué la géométrie à l'école. Etude didactique, de la noosphère à la classe*. Mémoire de DESSE (direction J.Brun), FSPE. Université de Genève, Suisse.

FREGONA D. (1995) *Les figures planes comme milieu dans l'enseignement de la géométrie : interactions, contrats et transpositions didactiques.* Thèse de l'Université de Bordeaux I.

GONSETH F. (1945-1955) *La géométrie et le problème de l'espace*. Lausanne : Editions du Griffon.

HOUDEMENT C. et KUZNIAK A. (1996) Autour des stratégies utilisées pour former les maîtres du premier degré en mathématiques. *Recherches en didactique des mathématiques,* Vol. 16/3, 289 - 322. Grenoble : La Pensée Sauvage.

HOUDEMENT C. et KUZNIAK A. (à paraître) Un exemple de cadre conceptuel pour l'étude de l'enseignement de la géométrie en formation des maîtres. *Educational Studies in Mathematics.*

KUZNIAK A. et TAVEAU C. (1998) *Activités géométriques en classe de sixième.* Nathan.

LABORDE C. (1988) L'enseignement de la géométrie en tant que terrain d'exploitation de phénomènes didactiques. *Recherches en didactique des mathématiques*, Vol 9/3, 337 - 364. Grenoble : La Pensée Sauvage.

LAKATOS I. (1976) *Proofs and refutations* (*Preuves et réfutations*, Paris : Hermann 1984).

PARZYSZ B. (1991) Espace, géométrie et dessin. Une expérience didactique pour l'apprentissage, l'enseignement et l'utilisation de la perspective parallèle au lycée. *Recherches en Didactique des Mathématiques.* Vol 11/2-3, 211 - 240. Grenoble : La Pensée Sauvage.

PIAGET J. (1950) *Introduction à l'épistémologie génétique, tome 1 La Pensée Mathématique.* Paris : PUF.

RAUSCHER J.C. (1993) *L'hétérogénéité des professeurs face à des élèves hétérogènes : le cas de l'enseignement de la géométrie au début du collège*, Thèse de doctorat : Université de Strasbourg.