
PROBLEME OUVERT PROBLEME POUR CHERCHER

Roland CHARNAY
IUFM de Lyon, Centre Local de Bourg en Bresse
Equipe de didactique des Mathématiques, INRP

Le terme "problème ouvert" a été introduit par une équipe de l'IREM de Lyon pour évoquer une catégorie de problèmes destinés à mettre en route, avec les élèves, une démarche scientifique : faire des essais, conjecturer, tester, prouver. Les activités proposées par l'équipe lyonnaise s'adressent à des élèves de collège ou lycée. Elles peuvent être rapprochées, dans leurs objectifs et dans leur mise en oeuvre, d'autres propositions faites pour l'école primaire (ERMEL, par exemple).

QU'EST-CE QU'UN PROBLEME OUVERT ?

L'équipe de l'IREM de LYON propose la définition suivante :

Un problème ouvert est un problème qui possède les caractéristiques suivantes :

- l'énoncé est court.

- l'énoncé n'induit ni la méthode, ni la solution (pas de questions intermédiaires ni de questions du type "montrer que"). En aucun cas, cette solution ne doit se réduire à l'utilisation ou l'application immédiate des derniers résultats présentés en cours.

- le problème se trouve dans un domaine conceptuel avec lequel les élèves ont assez de familiarité. Ainsi, peuvent-ils prendre facilement "possession" de la situation et s'engager dans des essais, des conjectures, des projets de résolution, des contre-exemples.

Exemple 1 (emprunté à "Rencontres Pédagogiques", n°12, INRP)

Dans ma tirelire j'ai 32 pièces de monnaie.

Il n'y a que des pièces de 2 F et de 5 F.

Avec ces 32 pièces, j'ai 97 F.

Combien y a-t-il de pièces de chaque sorte ?"

Exemple 2 (emprunté à "Situations problèmes", APMEP, Elem-math IX).

Quel est le plus grand produit de deux nombres que l'on peut faire en utilisant une fois et une seule les chiffres 1, 2, 3, ... 9 pour former ces nombres ?

La fiche "Le journal" publiée dans le précédent numéro de Grand N fournit un autre exemple de problème ouvert.

Les textes officiels pour l'école primaire évoquent le même type de problèmes. Ainsi, dans la brochure "Les cycles à l'école primaire", trouve-t-on exprimées les compétences suivantes :

cycle 2 : *"analyser des problèmes de recherche simples"*.

cycle 3 : *"élaborer une démarche originale dans un véritable problème de recherche, c'est-à-dire un problème pour lequel on ne dispose d'aucune solution déjà éprouvée"*.

Il faut cependant souligner que la pratique de ce type de problèmes est encore peu répandue, ce qui peut s'expliquer par au moins trois sortes de raisons :

- le caractère inhabituel de ces problèmes à l'école primaire, en rupture avec les pratiques existantes concernant les problèmes, ceux-ci étant le plus souvent conçus sous forme d'énoncés évoquant des situations "de la vie courante" et dont la résolution implique l'utilisation (l'application!) de connaissances étudiées récemment,

- la difficulté à percevoir les objectifs spécifiques, et donc l'intérêt, de tels problèmes,

- et surtout, le fait que les manuels scolaires ne proposent pas de tels énoncés.

PROBLEMES OUVERTS ET AUTRES PROBLEMES

Pour mieux comprendre l'enjeu de tels problèmes, essayons de les resituer dans une typologie caractérisée par les objectifs d'apprentissage poursuivis. On peut ainsi distinguer :

- les problèmes destinés à engager les élèves dans **la construction de nouvelles connaissances** (souvent appelés "situations-problèmes"),

- les problèmes destinés à permettre aux élèves **l'utilisation des connaissances déjà étudiées** (souvent appelés "problèmes de réinvestissement"),

- les problèmes destinés à permettre aux élèves **l'extension du champ d'utilisation d'une notion déjà étudiée** (parfois appelés "problèmes de transfert", avec toute l'ambiguïté liée à ce dernier terme),

- les problèmes plus complexes dans lesquels les élèves doivent **utiliser conjointement plusieurs catégories de connaissances** (parfois appelés "problèmes d'intégration ou de synthèse"),

- les problèmes dont l'objectif est de permettre au maître et aux élèves de **faire le point sur la manière dont les connaissances sont maîtrisées** ("problèmes d'évaluation"),

- les problèmes destinés à **mettre l'élève en situation de recherche et donc de développer des compétences plus méthodologiques** ("problème ouvert").

Si une telle catégorisation est sans doute utile à l'enseignant pour repérer des choix possibles et guider son action pédagogique, elle a cependant des limites qu'il convient de souligner. Tout d'abord, il n'est pas certain que tous les problèmes y trouvent place. Et, plus fondamentalement, un même énoncé peut, selon le moment où il est proposé, selon les connaissances initiales des élèves, relever de l'une ou l'autre des catégories. Ainsi le premier énoncé (les pièces) donné en exemple peut être celui d'un problème ouvert au CM₂, celui d'une situation-problème en troisième pour l'enseignant qui veut l'utiliser pour amener les élèves à travailler sur les systèmes d'équation, ou encore un problème de réinvestissement pour les élèves de troisième ou de lycée qui ont déjà étudié ce thème.

Au travers de cette catégorisation, apparaît le caractère original du problème ouvert. Tous les autres types de problèmes sont d'abord centrés sur l'acquisition et la maîtrise de notions mathématiques. **Le problème ouvert est, lui, principalement destiné à développer un comportement de recherche et des capacités d'ordre méthodologique** : faire et gérer des essais, faire des hypothèses, imaginer des solutions, éprouver leur validité, argumenter, ...

LE PROBLEME OUVERT, POURQUOI ?

Sans les développer, nous proposons quatre types d'arguments en faveur de la pratique du problème ouvert, à tous les niveaux de l'école.

1) **Le problème ouvert permet de proposer à l'élève une activité comparable à celle du mathématicien confronté à des problèmes qu'il n'a pas appris à résoudre.** Problème ouvert et situation-problème pourraient ainsi renvoyer à deux aspects du travail du mathématicien :

- dans le cas du problème ouvert, il s'agit d'abord de chercher une solution originale, personnelle, avec les moyens du bord, mais la solution générale n'est pas à portée de main ;

- dans le cas de la situation-problème, il s'agit, à partir d'un problème particulier, d'élaborer une connaissance (notion, procédure, ...) de portée plus générale et destinée à être institutionnalisée, reconnue socialement, maîtrisée par chacun.

2) **Le problème ouvert permet de mettre l'accent sur des objectifs spécifiques, d'ordre méthodologique**, déjà évoqués plus haut. Il exige en effet de l'élève, la mise en oeuvre de méthodes et de compétences peu travaillées par ailleurs : essayer, organiser sa démarche, mettre en oeuvre une solution originale, en mesurer l'efficacité, argumenter à propos de sa solution ou de celle d'un autre, ...

3) **Le problème ouvert offre une occasion de prendre en compte et même de valoriser les différences entre élèves**. En effet, si l'énoncé est le même pour tous les élèves, les solutions peuvent être diverses, plus ou moins rapides, utilisant des connaissances et des stratégies variées (du dessin des pièces à des essais de multiples de 2 et de 5, dans l'exemple du problème des pièces). C'est précisément cette diversité qui est ici intéressante, pour permettre l'échange, la confrontation et le débat.

4) **Le problème ouvert permet à l'enseignant de faire connaître aux élèves quelles sont ses attentes en matière de résolution de problèmes**. En effet, pour résoudre de tels problèmes, l'élève perçoit rapidement qu'il est inefficace d'essayer d'appliquer directement des connaissances déjà étudiées. Au contraire, il s'agit de chercher (plutôt que de trouver rapidement), il faut prendre des initiatives, on peut essayer pour voir, l'originalité est encouragée et reconnue, ... La responsabilité de la solution appartient entièrement à l'élève. Ainsi, dans une classe de CE₂, l'enseignante a choisi, pendant les deux premières semaines de l'année, d'axer les séquences de mathématiques sur la résolution de problèmes ouverts. Mieux que par des discours, elle leur a ainsi fait savoir ce qu'elle attendait d'eux en mathématiques. Cela rejaillit sur l'attitude des élèves dans les autres activités mathématiques (en calcul mental, par exemple).

LE PROBLEME OUVERT, COMMENT ?

Il est difficile de fournir des indications précises de mise en oeuvre, qui seraient valables quel que soit le problème et quel que soit le niveau de classe. L'énoncé ne peut pas être présenté de la même manière à des élèves de CP et à des élèves de CM₂.

Osons cependant quelques recommandations.

1) **La difficulté ne doit pas résider dans la compréhension de la situation**. La recherche ne doit commencer que lorsque les termes et l'enjeu du problème sont appropriés par tous les élèves. Facile à dire, ... plus difficile à réaliser : il faut donner toutes les indications pour que le problème soit clairement défini et aucune indication qui puisse esquisser une procédure possible de résolution. Ajoutons que le problème n'est pas nécessairement présenté sous la forme d'un énoncé écrit; il peut être formulé oralement ou même illustré matériellement (par exemple, tirelire présente qu'on ouvrira pour vérifier lorsque tout le monde sera d'accord sur une réponse)

Exemple 1 : Au CP, un problème de partage peut être un exemple de problème ouvert. Supposons qu'il s'agisse de partager 18 objets entre 3 personnes.

Le problème peut être présenté de la façon suivante. Le maître dispose de 18 images qu'il montre aux élèves en début de séquence, puis range dans une boîte. Il remet à chaque enfant (ou à chaque groupe) 3 enveloppes et donne la consigne suivante : "Je dois envoyer ces 18 images à 3 enfants. Pour cela, je vous ai donné 3 enveloppes, une par enfant. Vous devez écrire sur l'enveloppe le nombre d'images que je devrais mettre dans l'enveloppe. Attention, les 3 enfants doivent recevoir le même nombre d'images. Vous avez une feuille blanche pour chercher".

On notera que, dans cette présentation, les élèves sont dispensés du contrôle de l'une des variables : le nombre de parts.

Il reste encore à faire comprendre aux élèves les autres contraintes du problème :

- il faut répartir la totalité des images (ici 18),
- chaque enfant doit en avoir le même nombre (partage équitable).

Si les échanges avec les élèves n'y suffisent pas, on peut suggérer, dans une situation comparable (par exemple 6 images, 3 enveloppes) de présenter diverses solutions et de demander si elles respectent les contraintes, par exemple (3 images, 3 images), (6 images, 6 images, 6 images), (2 images, 1 image, 3 images).

Exemple 2 : Le problème donné en exemple au début de cet article (les pièces) peut être proposé à des élèves de cycle 3.

Ici un échange avec les élèves peut suffire à assurer la compréhension de la situation proposée. Le respect des contraintes (type de pièces, nombre total de pièces, somme totale) n'est pas assuré pour autant, certaines contraintes sont souvent oubliées en cours de recherche. C'est le rôle du débat de validation que de le mettre en évidence.

2) La phase de recherche doit appartenir aux élèves. Les interventions de l'enseignant doivent se limiter à des encouragements, des réponses à des questions portant strictement sur la compréhension de l'énoncé, mais en aucun cas, sur la validité d'une procédure, sur le fait que la voie choisie est bonne ou mauvaise, ... Par contre, il est important, pour l'enseignant, d'observer le travail des groupes, en particulier pour recueillir des informations qui l'aideront à préparer la phase de mise en commun.

Le plus souvent, la recherche sera faite en petits groupes. Mais il est utile que, auparavant, chaque élève ait pu se faire sa propre idée par une courte phase de travail individuel.

3) La mise en commun est avant tout une phase d'échanges et de débat autour des solutions proposées par les élèves.

Le plus souvent, elle pourra se réaliser autour des affiches (ou des transparents) que les élèves auront réalisées à l'issue de leur recherche. Le rôle de l'enseignant est d'abord de permettre un échange véritable entre les élèves, et non entre les élèves et lui, avec l'idée permanente qu'il s'agit de confronter des solutions, de les discuter, de les défendre, de les valider ... et non d'arriver à exhiber "la bonne solution", celle à laquelle avait pensé l'enseignant ou celle des élèves considérée comme la plus efficace.

4) **La même situation peut être proposée à nouveau aux élèves**, après la phase de mise en commun, avec des nombres différents par exemple. Cela permet à certains élèves d'essayer une solution qu'ils n'ont pas élaborée eux-mêmes, mais dont ils ont perçu l'intérêt au cours des échanges. Mais ce choix doit rester à leur initiative!

SIX EXEMPLES ... POUR COMMENCER

cycle 2

1) (emprunté à ERMEL CP, 1991).

Avec des pièces de 1F, 2F et 5F, trouvez plusieurs façons d'avoir 17F.

2) *Dans ma tirelire, il n'y a qu'une seule sorte de pièces. En tout, il y a 20 F. Combien de pièces y a-t-il dans la tirelire ?*

3) (emprunté à Apprentissage à la résolution de problèmes au CE).

Je pense à deux nombres qui se suivent. Je les additionne, je trouve 23.

Quels sont ces deux nombres ?

cycle 3

1) (emprunté à "Aides pédagogiques pour le CM").

On dispose de pièces de 50 c, de 20 c et de 5 c. Peut-on constituer une somme de 5 F avec exactement 20 pièces ?

Ce problème n'a pas de solution... A partir de ce constat, on peut relancer la recherche en se demandant quels sont les sommes possibles et les sommes impossibles à réaliser, avec les mêmes conditions.

2) (emprunté à "Des problèmes pour apprendre en CM2 et en sixième").

On a une ficelle de 26 cm de longueur.

On veut construire, avec cette ficelle, un rectangle dont l'aire soit la plus grande possible.

Quelles seront les dimensions de ce rectangle ?

3) (emprunté à "30 problèmes glanés pour les élèves de 6ème et 5ème").

Où placer le point M pour que les triangles ABM et ACM aient le même périmètre ?

POUR UNE RUBRIQUE "PROBLEME OUVERT"

Grand N se propose d'ouvrir une rubrique sur le problème ouvert, qui serait alimentée par les propositions et les essais de ses lecteurs.

Envoyez-nous vos propositions d'énoncés, vos compte rendus d'expérimentations, des exemples de travaux d'élèves, des points de vue sur cette pratique, ...

Voici d'ailleurs une première contribution de Rirette Guillermand :

- . . . Tracer le plus possible de triangles
- . . . différents ayant leurs sommets en l'un
- . . . des neuf points. Deux triangles sont
- . . . différents si le calque de l'un ne peut pas
- . . . coïncider avec l'autre.

BIBLIOGRAPHIE

- APMEP (1987). *Elem-math IX, Situations problèmes. Brochure n° 64.*
- ARSAC G., GERMAIN G., MANTE M. (1988). *Problème ouvert et situation-problème.* IREM de Lyon.
- BOUVIER A. (1986). *30 problèmes glanés pour les élèves de 6ème et de 5ème.* IREM de Lyon.
- CHARNAY R. (1987). "Apprendre par la résolution de problèmes". Grand N, n° 42, IREM de Grenoble.
- CHARNAY R. (1987). *Des problèmes pour apprendre en CM2 et en 6ème.* IREM de Lyon.
- Equipe de didactique des mathématiques (1984). "Comment font-ils ? L'écolier et le problème de mathématiques". *Rencontres Pédagogiques*, n° 4, INRP.
- Equipe de didactique des mathématiques (1987). *Apprentissage à la résolution de problèmes au CE.* INRP (diffusé par le CRDP de Grenoble).
- ERMEL (1990). *Apprentissages numériques, cycle des apprentissages fondamentaux, Grande Section de Maternelle.* Paris, Hatier.
- ERMEL (1991). *Apprentissages numériques, cycle des apprentissages fondamentaux, Cours Préparatoire.* Paris, Hatier.
- ERMEL (1981). *Apprentissages mathématiques à l'école élémentaire, cycle moyen, tome 1.* Paris, Hatier.
- Groupe mathématique du Service de la Recherche Pédagogique (1991). *Sur les pistes de la mathématique.* SRP, Genève.