LA VALIDATION EN GEOMETRIE AU COLLEGE AVEC CABRI-GEOMETRE

MESURES EXPLORATOIRES ET MESURES PROBATOIRES

Lucile VADCARD
Equipe EIAH, Laboratoire Leibniz, Grenoble

Résumé
Dans cet article nous présentons les résultats d'une recherche issue de la problématique du rôle de la mesure dans la preuve en géométrie. Nous reprenons les distinctions entre composantes publiques et privées du travail de l'élève pour distinguer deux types de mesures qui interviennent dans les processus de résolution observés : *exploratoire* et *probatoire*.

1 - INTRODUCTION

L'introduction dans les classes de collège et de lycée de logiciels d'aide à l'enseignement des mathématiques pose de nouvelles questions aux didacticiens, notamment en géométrie où la manipulation directe des figures devient possible, permettant l'appréhension d'une multiplicité de dessins rattachés à la figure et reposant ainsi le statut de la perception visuelle dans la démarche géométrique (Laborde 1994 pp.543-546). Le problème s'accroît encore si les élèves accèdent par la mesure à une perception instrumentée du dessin (Rolet 1996). Par mesure nous entendons ici et dans tout le texte un nombre obtenu par mesurage.

Une équipe de chercheurs japonais (Shimizu *et al.* 1995) a noté que l'utilisation de Cabri-géomètre[1] dans leurs classes révélait une divergence de conception de la preuve entre les enseignants et les élèves. Des élèves qui mettaient en œuvre des preuves « satisfaisantes » du point de vue des professeurs se sont mis à employer la mesure dans leur travail, sans remettre en doute la validité de leur démarche. Ce logiciel de manipulation directe d'objets géométriques offre un faible coût des expérimentations par rapport à l'environnement papier-crayon. C'est cette caractéristique qui a permis aux chercheurs de repérer chez les élèves des conduites qui étaient occultées jusque-là par le type d'environnement dans lequel ils agissaient. Dans une autre publication ces mêmes chercheurs précisent que la mesure et le déplacement permettent aux élèves de repérer des invariants de la figure et de se convaincre de certains résultats. Ils soulignent qu'une nouvelle approche de l'enseignement de la preuve pourrait alors s'appuyer sur l'usage de la mesure dans les environnements de géométrie dynamique tels que Cabri-géomètre (Kakihana et Shimitzu 1996).

C'est à partir de cette remarque et dans le cadre d'une collaboration avec les chercheurs en didactique de l'Université de Tsukuba que nous nous sommes penchés sur la problématique des rapports entretenus entre la mesure et la preuve chez les élèves. Nous nous sommes attachés à examiner le rôle de la mesure dans les processus de validation en géométrie, en partant de l'hypothèse que l'empirisme dans une démarche de preuve peut avoir différents rôles. En particulier, la mesure peut être présente dans des processus de résolution qui aboutissent à l'élaboration de preuves formelles correctes du point de vue mathématique. Elle a dans ce cas le caractère privé de la phase heuristique d'une résolution (Coppé, Arsac et Guichard 1996).

Avant d'apporter quelques éléments de validation à ces hypothèses nous allons rappeler rapidement la problématique de la preuve en mathématique, puis présenter les outils théoriques que nous utilisons.

2 - LE CADRE THEORIQUE

2.1 Le problème de la preuve

La démonstration

La démonstration tient une place très importante en mathématiques. Elle est son outil de validation, le moyen d'en assurer la cohérence. De plus, elle permet la communication entre mathématiciens, joue un rôle dans la socialisation du savoir mathématique. Son apprentissage est indispensable à tout enseignement de mathématiques.

1 Cabri-géomètre est un logiciel de construction et de manipulation d'objets géométriques, développé par le Laboratoire LSDD, à Grenoble (Laborde, 1988).

Mais l'apprentissage de la démonstration ne va pas « de soi ». Dans de nombreux domaines, et notamment dans les processus de validation sociaux, le mode d'expression propre à soutenir et défendre une thèse est l'argumentation. Or celle-ci est distincte de la démonstration. Des propositions de natures diverses (théoriques, pragmatiques, autoritaires) peuvent y être utilisées, alors que la démonstration se construit selon des règles précises, qui définissent et régissent le corpus des propositions qui peuvent être employées. Et, en plus d'apparaître très tôt dans le développement de l'enfant, l'argumentation est un modèle qui possède un large domaine de validité. Un élève mis en situation de prouver une assertion va ainsi le mobiliser plus facilement. Mais il entraîne la mise en œuvre de moyens pragmatiques de validation, tels que la perception et la mesure, qui ne sont pas valides lorsqu'il s'agit de prouver la vérité d'une proposition mathématique : le caractère particulier de la mesure et de la perception s'oppose à celui de généralité de l'énoncé théorique.

L'accès au sens et la mise en œuvre de la preuve se posent alors en termes de relations entre validations pragmatiques et théoriques.

Les rapports pragmatique / théorique

Fischbein (1982, p.16) observe des élèves qui, ayant mis en œuvre une preuve formelle correcte en algèbre (celle de la proposition n^3-n est divisible par 6 quel que soit n entier positif), affirment dans le même temps pouvoir accroître leur conviction dans ce résultat par l'examen de cas particuliers. Pour le mathématicien, la compréhension des règles de construction de la démonstration devrait logiquement entraîner celle de son caractère de généralité. L'auteur explique ce phénomène par une dissymétrie entre les fonctionnements de l'empirique et du logique chez l'individu :

> « the two basic ways of proving - the empirical and the logical - are not symmetrical, they do not have the same weight in our practical activity. » (op cit, p 17)

Cet exemple illustre la difficulté qu'il y a à comprendre et à évaluer le rôle de l'empirisme dans une démarche de validation.

Preuve pragmatique et preuve formelle sont des étapes d'un processus d'évolution complexe dans lequel l'empirisme peut jouer différents rôles, selon le niveau d'évolution du sujet, sur les plans de la formulation langagière et de la conceptualisation des connaissances engagées (Balacheff 1987). En particulier l'usage de la mesure dans l'élaboration d'une preuve en géométrie peut dans ce cadre être interprété plus finement que la simple manifestation d'une démarche de preuve pragmatique.

Le cas de la géométrie

Le problème des rapports entre pragmatique et théorique dans la preuve en mathématiques est plus marqué encore en géométrie, en raison du statut particulier de la figure géométrique (Arsac et al., 1992). La figure est un support à la réflexion et au raisonnement, elle donne au géomètre une représentation des objets qu'il étudie. Mais le géomètre considère une figure géométrique, c'est-à-dire qu'il ne considère du dessin que ce qui est propriété géométrique. Le géomètre novice qu'est l'élève ne peut pas d'emblée (sans apprentissage) faire cette distinction entre les propriétés qui relèvent de la figure géométrique et celles qui sont liées au caractère particulier du dessin considéré (les réalités spatio-graphiques, Capponi et Laborde 1996). Car c'est une distinction délicate : des informations des deux natures cohabitent dans le dessin, certaines propriétés pouvant y être lues par les élèves (les propriétés spatiales, certaines propriétés implicites (Bazin 1993, p.65)), d'autres étant exclues des processus de validation mathématique (notamment les informations obtenues par la mesure). Cette frontière entre éléments « autorisés » et « interdits » dans la preuve mathématique a varié au cours de l'histoire (on en trouve un exemple dans la preuve chinoise du théorème de Pythagore, Martzloff 1989), et varie au cours de la scolarité de l'élève : de la pratique d'une géométrie expérimentale on passe en classe de 4ème à l'enseignement d'une géométrie théorique. De plus, comme le précise Arsac (ibid., p167), selon la nature du problème posé certaines pratiques seront tolérées ou non dans la classe (lecture de graphes, reproductions à l'échelle).

Méthodologie

Parmi les difficultés liées à l'apprentissage de la démonstration que nous avons évoquées dans cette première partie, nous nous attachons plus particulièrement à examiner le fonctionnement de la mesure dans une démarche de validation en géométrie. Nous supposons que ce fonctionnement est lié à l'évolution (cognitive, langagière, sociale) du sujet, et qu'il peut être ainsi très variable d'un sujet à un autre. Pour tenter d'en déterminer quelques-uns des aspects, nous regarderons la place et le rôle de la mesure dans l'élaboration d'une solution à un problème de géométrie par des binômes d'élèves de Collège (4ème et 3ème). Dans ce but nous regardons le processus de cette élaboration, et le rôle que jouent les différentes mesures effectuées par les élèves au cours de leur travail sur le statut des propositions qu'ils énoncent.

Nous serons alors amenés à distinguer deux types de mesures, selon qu'elles auront une origine exploratoire ou qu'elles seront guidées par la mobilisation d'un argument de nature théorique.

2.2 Les outils théoriques

Statut opératoire et statut épistémique

Nous utiliserons dans nos analyses la notion de statut opératoire (Duval 1991). Cette notion prend sa place dans l'étude d'un pas de déduction dans la preuve, et se distingue du contenu informationnel de la proposition. Duval (ibid. p.235) présente la structure d'un pas, et montre ainsi les trois statuts opératoires que la proposition peut prendre au sein de ce pas : proposition d'entrée, règle d'inférence ou conclusion.

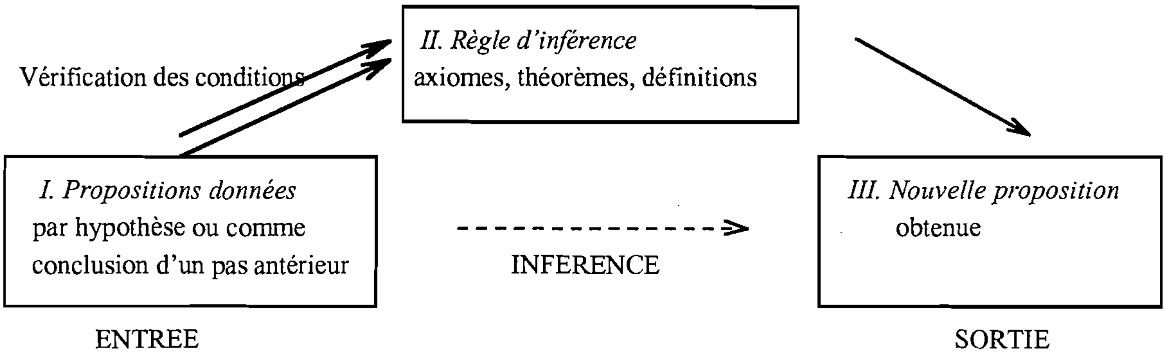


fig.1. Diagramme représentant le fonctionnement ternaire d'un PAS de déduction

Ce statut opératoire est indépendant du contenu de la proposition, en revanche, il est lié au statut épistémique que le sujet lui accorde, c'est-à-dire au degré de certitude ou de confiance qu'il place en la proposition (évidente, plausible, ...). Selon sa propre conviction, il pourra placer une proposition en position de conclusion, ou d'hypothèse à valider.

Nous distinguons, pour l'analyse de l'heuristique d'une résolution, les statuts de spéculation, de conjecture et d'énoncé vrai. La *spéculation* est pour nous une proposition (vraie ou fausse) que le sujet considère comme vraie, sans pour autant avoir de moyens de s'en assurer. Il fait en quelque sorte un pari sur sa validité. La *conjecture* est une proposition que le sujet considère comme vraie, en ayant cette fois de « bonnes » raisons de le croire. Soit qu'elle résiste fortement à la réfutation, soit qu'elle ait été validée de façon pragmatique, par exemple. Encore une fois, cette proposition peut être vraie ou fausse, seul nous importe le statut que le sujet lui accorde. Enfin nous considérons comme *propriété vraie* une proposition qui est soutenue par une démonstration. Une proposition admise mais non démontrée est une hypothèse, ou un axiome.

Types de preuve

Lors de la résolution, les propositions émises vont évoluer d'un statut à un autre : de spéculation à conjecture, de conjecture à proposition vraie ou bien au rejet par la découverte d'un contre exemple. Cette analyse en termes de statuts conduit à distinguer les différents types de démarches de résolution mis en évidence par Balacheff (1987). La nature des règles d'inférences utilisées pour passer d'un statut à un autre est directement liée au type de preuve dans lequel les élèves sont engagés. Les notions d'empirisme naïf et d'expérience cruciale nous permettent alors de mieux cerner la position des élèves vis-à-vis de la preuve. Rappelons que l'*empirisme naïf* est une preuve pragmatique, qui consiste « à assurer la validité d'un énoncé après sa vérification sur quelques cas », et que l'*expérience cruciale* est une expérimentation qui permet de décider « entre une proposition et sa négation », dans le but de trancher un débat où le problème de la généralisation est explicitement pris en compte.

Nous verrons dans l'exposé des résultats (§4) comment ces outils ont été opératoires pour notre travail, et ont effectivement permis de repérer quels étaient la place et le rôle de la mesure dans les processus d'élaboration de preuve que nous avons observés.

3 - LE DISPOSITIF EXPERIMENTAL

3.1. Le problème

Afin de pouvoir exploiter les résultats de cette recherche en collaboration avec l'équipe de chercheurs de Tsukuba, nous voulions partir d'observations similaires aux leurs. Mais les différences culturelles (de démarche d'enseignement, de culture mathématique) associées aux difficultés de communication (qui passe par deux traductions, du français à l'anglais et de l'anglais au japonais) avaient déjà été repérées comme un obstacle à une recherche commune (Balacheff 1991b). Parmi les quatre problèmes proposés au Japon lors des expérimentations, un seul correspondait au cursus français :

« Prove the inscribed angle is half of central angle »

Pour notre expérimentation en classe de 4ème, nous avons modifié l'énoncé de cet exerciceÊ:

« Construisez un cercle de centre O. A, B et C sont trois points du cercle et de plus [AC] est un diamètre.

- *Comparez les angles $\widehat{OAB}$ et $\widehat{BOC}$.*
- *Notez vos constatations.*
- *Justifiez soigneusement votre réponse. »*

D'une part, nous avons choisi de présenter ce problème sous la forme d'un cas particulier de celui d'origine. Ce choix est conforme à la présentation de ce théorème en classe de 3ème dans les manuels (Pythagore 1993, par exemple). D'autre part, nous avons introduit le résultat à justifier (la mesure de l'angle au centre $\widehat{BOC}$ est le double de celle de l'angle inscrit $\widehat{OAB}$) par une phase de comparaison des mesures des deux angles. Cette étape est le résultat d'une négociation avec l'enseignant, et tient compte d'une part de la coutume en vigueur dans la classe, d'autre part d'une volonté d'assurer un engagement des élèves dans le problème : une première étape réussie pouvait assurer un meilleur investissement des élèves dans la suite de la résolution. Enfin, l'énoncé a été rédigé de façon à susciter l'apparition de comportements pragmatiques. En d'autres termes, nous voulions les voir mesurer. Mais le contrat généralement en vigueur en classe de 4ème invalide l'utilisation de l'expérimentation dans la résolution de problème en géométrie : c'est à ce niveau scolaire que les élèves doivent évoluer d'une géométrie pratique à une géométrie théorique. L'énoncé du problème introduit donc explicitement l'usage de la mesure : la comparaison, par contrat, implique une relation plus complexe qu'une relation d'ordre, et des élèves de ce niveau scolaire sont probablement peu capables de comparer des angles sans avoir recours à la mesure (cela impliquerait une recherche théorique d'un lien entre ces deux angles). Les élèves devaient ainsi s'engager dans un processus de résolution où le recours à la mesure est en quelque sorte « autorisé » par les caractéristiques de la situation.

Nous avons observé 3 binômes d'élèves de classe de $4^{ème}$ et 3 binômes de classe de $3^{ème}$ en situation de résolution de ce problème avec Cabri-géomètre (version I pour Macintosh). Nous avons recueilli leurs dialogues (enregistrement audio), leurs productions écrites et leur travail dans Cabri (enregistrement de sessions). Les élèves sont issus de classes qui utilisent régulièrement Cabri-géomètre en mathématiques.

Les protocoles sont assez homogènes du point de vue des résultats. Les élèves de troisième ont moins recouru à la mesure exploratoire que ceux de $4^{ème}$. En effet d'une part ils connaissaient le résultat (ils avaient étudié ce théorème en début d'année, et les révisions pour un BEPC blanc le leur avait remis en mémoire), d'autre part le contrat en vigueur en $3^{ème}$ en classe de géométrie invalide plus la mesure qu'en $4^{ème}$.

Dans ce texte nous illustrerons nos résultats par quelques extraits de protocoles pris parmi ceux recueillis en classe de $4^{ème}$.

3.2. Analyse a priori

Nous avons d'une part examiné différentes résolutions correctes accessibles (au niveau des notions nécessaires) à un élève générique. Ces résolutions sont organisées sous forme de diagrammes, précisant tous les pas de déduction de leur déroulement :

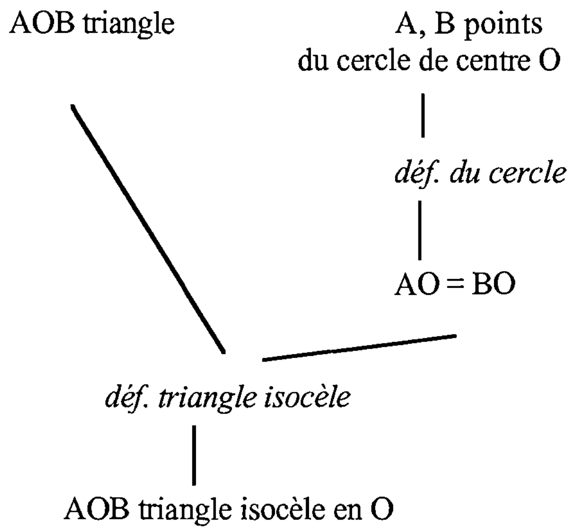
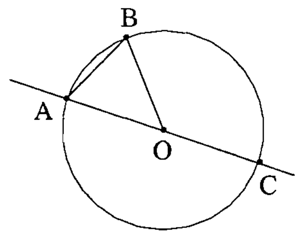


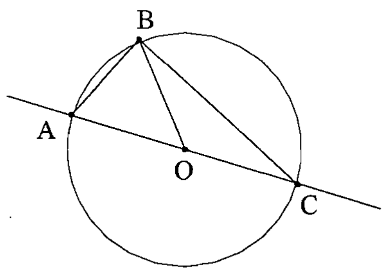
fig.2. Extrait d'un diagramme de résolution (Vadcard 1996 p.21)

Cette présentation en diagramme comme outil d'analyse des productions permet d'identifier comment la mesure a remplacé ou accompagné un pas de déduction dans la démarche de résolution des élèves.

D'autre part, nous avons examiné les diverses possibilités de construction de la figure géométrique associée à l'énoncé, en nous reposant sur les conceptions des objets géométriques en jeu, et sur les outils de construction disponibles dans Cabri-géomètre. Nous nous sommes appuyés sur les travaux de Artigue et Robinet (1982) pour les différentes conceptions du cercle, et sur ceux de Barbin (1993) et Balacheff (1991a) en ce qui concerne l'angle. Ce travail débouche sur la mise en relation des appréhensions possibles de la figure (en fonction du couple conception / construction) avec les résolutions : l'appréhension opératoire suit l'appréhension perceptive (Duval 1988). Cette analyse des liens entre conception et construction nous a permis de « classer » les résolutions en fonction de leur congruence avec la construction. Ainsi pour chaque type de construction nous avons déterminé quelles résolutions étaient les plus susceptibles d'être mises en œuvre. Par exemple, construire le point C par intersection de la droite (AO) avec le cercle, puis matérialiser les angles $\widehat{BOC}$ et $\widehat{OAB}$ par la construction des segments côtés de ces angles favorise une résolution utilisant l'angle plat $\widehat{AOC}$ (diamètre du cercle) et les propriétés du triangle AOB (propriété des angles à la base du triangle isocèle et théorème de la somme des angles du triangle).



En revanche un élève ayant mobilisé une conception de l'angle engagé dans le triangle de même nom aura plus facilement accès aux propriétés des deux triangles isocèles (AOB et BOC). Par homogénéité (Duval 1988) il percevra peut-être aussi le triangle ABC qui pourtant ne correspond à aucun angle mentionné dans l'énoncé. Ce deuxième cas favorise donc plus la résolution qui utilise les propriétés de ces trois triangles.



Ce travail qui met en relation les constructions possibles de la figure associée à l'énoncé, les conceptions des objets géométriques en jeu, et les résolutions accessibles permet de définir un cadre rigoureux pour l'analyse des données.

4 - Mesure Exploratoire et mesure probatoire

Il est ressorti de nos analyses de protocoles (ensemble organisé des données) que les mesures effectuées par les élèves observés en situation de résolution de problème dans Cabri-géomètre étaient de deux natures. On distingue alors la mesure exploratoire, qui joue un rôle heuristique dans la démarche des élèves et qui est utilisée dans l'empirisme naïf, de la mesure probatoire, qui répond à une anticipation théorique de la part des élèves, et qui est employée comme expérience cruciale.

Nous présentons dans la suite quelques résultats qui permettent d'illustrer les conclusions avancées.

4.1. La mesure des angles $\widehat{OAB}$ et $\widehat{BOC}$

Les mesures des angles $\widehat{OAB}$ et $\widehat{BOC}$ ne peuvent évidemment pas être analysées de la même façon que les autres mesures qui sont apparues au cours de la résolution du problème, puisqu'elles sont demandées par l'énoncé. Tous les élèves observés accordent directement un statut d'énoncé vrai à cette relation (statut épistémique, qui concerne le degré de certitude) qu'ils découvrent et valident sur l'examen de quelques cas. C'est ensuite l'énoncé qui place la proposition au niveau de conjecture (statut opératoire), en demandant de « *Justifier soigneusement votre réponse* ».

Cependant on va voir par la suite que si tous les élèves ont fonctionné par empirisme naïf (démarche pragmatique qui consiste à valider une proposition par l'étude de quelques cas particuliers) pour cette question, ce n'est pas pour autant qu'ils ont tous gardé ce mode de réflexion dans la deuxième partie du travail.

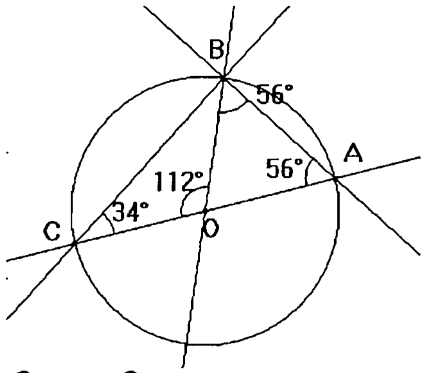
4.2. La mesure exploratoire

Sofien et Angélique

Sofien et Angélique ont utilisé la mesure comme un outil heuristique qui leur permet de repérer des relations et des invariants de la figure. Ces « découvertes » sont alors considérées comme des propositions vraies par les élèves dès lors qu'elles sont validées par la mise en œuvre d'une preuve de type empirisme naïf (vérification sur quelques cas). Aucune justification d'une autre nature ne sera donnée.

Sofien mesure, rapidement après la phase de comparaison des angles, les angles $\widehat{BCO}$ (34°), et $\widehat{ABO}$ (56°). Les valeurs affichées des angles $\widehat{BOC}$ et $\widehat{OAB}$ sont toujours 56° et 112°. Ces valeurs permettent à ces élèves d'émettre des hypothèses sur des relations entre les trois angles $\widehat{ABO}$, $\widehat{BOC}$ et $\widehat{OAB}$.

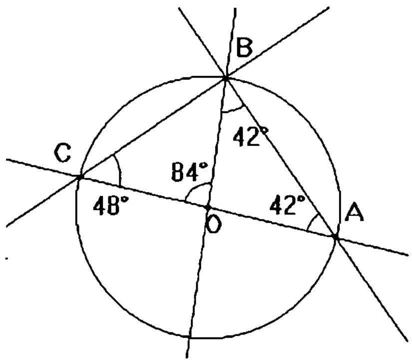
39 A : En fait ça c'est 56. C'est celui-là plus celui-là, non ?



(Il s'agit de : $\widehat{BOC} = \widehat{OAB} + \widehat{OBA}$)

Cette spéculation ne sera relevée que plus tard par Sofien, qui pour le moment teste par le déplacement sa propre spéculation :

48 S : Quarante et un soixante. Donc A et B sont égaux.



Les valeurs que nous possédons indiquent que $\widehat{OAB}$ et $\widehat{OBA}$ mesurent 42°. Il s'agit de la valeur approchée de 41.60, dont parle Sofien (différences d'affichages entre l'écran élève et les sessions récupérées). Un deuxième couple de valeurs égales lui a donc permis de confirmer sa spéculation, et de l'énoncer ($\widehat{OBA} = \widehat{OAB}$). Il s'agit bien ici d'une preuve pragmatique de type empirisme naïf, puisque Sofien procède à la généralisation de la proposition après sa vérification sur deux cas.

Puis il énonce et teste sur cette nouvelle configuration la spéculation d'Angélique :

50 S : ... Et leur somme est égale à...

...

52 S : ... A celle de O. Tu vois là regarde, quarante et un soixante, plus quarante et un soixante, égale quatre vingt trois vingt. Ouais, dix neuf, c'est pareil.

La relation d'égalité entre $\widehat{OAB}$ et $\widehat{OBA}$ ne sera pas justifiée théoriquement.

Dans leur production écrite, ces élèves écrivent toutes les propositions qu'ils ont accumulées au cours de la séance, mais sans plus d'effort de justification :

« $\widehat{BOC}$ est le double de $\widehat{OAB}$

$\widehat{ABO}$ est égale à 90° et $\widehat{BCA}$ et $\widehat{BAC}$ font 45°

$\widehat{ABO}$ et $\widehat{OAB}$ sont toujours égaux »

Ils s'appuient donc sur le Cabri-dessin (Laborde et Capponi 1994) en considérant des mesures relevées dans une configuration particulière, et en même temps marquent un empirisme accepté dans sa manipulation : « *toujours égaux* ». Cette opposition est une marque du niveau pragmatique de preuve que ces élèves mobilisent.

Conclusion

La mesure exploratoire joue un rôle heuristique dans la résolution de problème. Mais les propositions qu'elle entraîne sont considérées comme des propositions vraies, elles ne sont pas justifiées : les élèves qui y ont recours sont engagés dans un processus de preuve pragmatique, et gardent tout au long de la séance ce mode de validation. Ils font intervenir la mesure dans des validations de type empirisme naïf.

4.3. La mesure expérience cruciale

Raphaël et Michaël

La démarche de ce binôme lors de la résolution du problème se compose de trois phases :

- une phase de comparaison des angles, où la démarche est pragmatique, l'utilisation de la mesure y relève d'un l'empirisme naïf. Cette démarche est, rappelons-le, introduite et sollicitée par l'énoncé.

- une phase d'exploration de la figure. Le début de cette phase est marquée par la reconnaissance du contrat (« *Ah d'accord, là faut faire une démonstration* »). Ils cherchent alors à établir des liens entre le dessin et leurs connaissances. Durant cette phase la mesure est utilisée comme expérience cruciale, servant à valider une spéculation dans le cadre d'un déséquilibre entre les deux élèves, ou une spéculation commune.

- une phase de rédaction, qui est une organisation des éléments rassemblés lors de l'exploration de la figure. Les élèves reconnaissent qu'il s'agit d'une explication qui ne doit plus rien à la mesure ou à la perception : « *c'est obligatoirement ça* ».

Tout en étant engagés dans un premier temps dans une démarche pragmatique (sollicitée par l'énoncé, voir §4.1. ci-dessus), Raphaël et Michaël modifient donc leur mode de raisonnement et semblent bien être conscients du caractère de généralité de ce qui leur est demandé. Tout au long de cette exploration de la figure (qui passera par de nombreux liens avec des connaissances, et plusieurs essais de constructions supplémentaires), la mesure vient valider les spéculations émises par les élèves. On observe alors les deux cas de figures décrits dans Balacheff (1988, p118) à propos de l'expérience cruciale :

> « L'expérience cruciale... comme un moyen de validation, soit pour valider une proposition, soit comme instrument dans le débat de validation entre les deux élèves d'un même binôme. »

i. L'expérience cruciale comme instrument dans le débat de validation

L'exemple suivant illustre comment la mesure apparaît comme un argument pour convaincre, après d'autres essais (argument d'autorité, tentative de justification théorique). Le débat porte sur la validité de la proposition suivante :

127 M : ... Cet angle droit on sait qu'il est droit

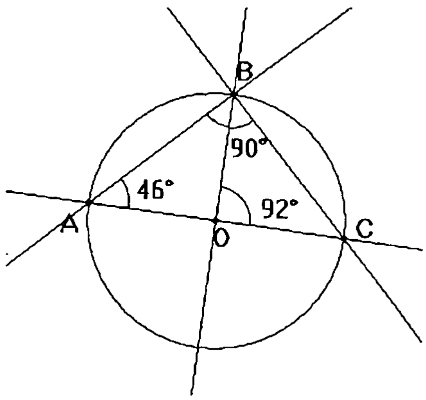
(il s'agit de l'angle $\widehat{ABC}$, inscrit dans un demi-cercle car AC est un diamètre)

Pour convaincre Raphaël, Michaël va utiliser divers arguments:

129 M : Mais tu te rappelles pas ce qu'il nous a dit !
...
141 M : Ben tu te rappelles pas ce qu'on nous a dit ? C'est une propriété du cercle. Quand tu traces...
...
145 M : C'est le prof qui nous l'avait dit, tu te rappelles pas ?

Il va finalement se placer dans le même registre que son camarade (pragmatique), qui a commencé à marquer l'angle pour le mesurer :

147 M : Tu peux le bouger ça sera...
148 R : Ca sera tout le temps le même ?
149 M : Tout le temps 90.
150 R : Mais non, pas 90... ah si ! Il nous l'avait dit.



Raphaël s'appuie sur le critère de robustesse des propriétés dans la manipulation de la figure dans Cabri-géomètre. Le problème de la généralisation est explicitement pris en compte.

L'apparition de la mesure de l'angle met un terme au débat : il s'agissait de trancher entre deux possibilités, l'angle $\widehat{ABC}$ est droit ou ne l'est pas. La mesure joue bien ici le second rôle de l'expérience cruciale énoncé plus haut, celui où un déséquilibre apparaît entre les deux partenaires. Elle est un moyen pour l'un d'emporter la conviction de l'autre.

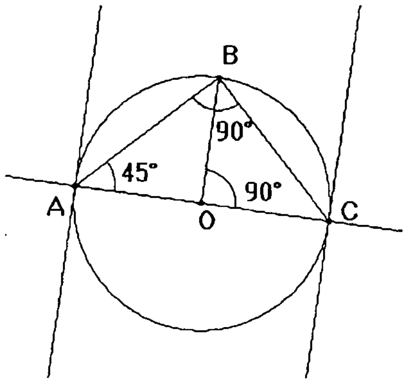
ii. L'expérience cruciale comme moyen de validation

Le même type de démarche (expérience cruciale) apparaît aussi en l'absence de conflit ou de déséquilibre. La spéculation peut être commune, et dans le cas de ce binôme, sa validation par la mesure en entraîne une justification théorique : la connaissance est mobilisée a posteriori. Par exemple à propos des deux triangles OAB et OBC, « *Je regarde si... ils ont la même aire.... Ah oui, c'est un truc qu'on a fait, ils ont la même base et... la même hauteur* ». La spéculation validée par la mesure prend le statut de conjecture, et les élèves mettent alors en œuvre une justification théorique de cette proposition. Elle prend alors le statut de propriété vraie, et peut être utilisée dans la preuve (ici elle ne le sera pas car les élèves vont se rendre compte que cette proposition y est inutile).

281 M : Attends peut-être...
282 R : Qu'est-ce tu fais?
283 M : Je regarde si..
284 R : si elles ont la même aire?
285 M : oui, si...
286 R : Ben oui, normalement oui. Attends, oui, ils ont la même aire.

[mesure des aires]

287 M : Ils ont la même aire
288 R : Ben oui, c'est logique. Puisque la médiane ça coupe le truc en deux.
289 M : Ah oui, c'est un truc qu'on a fait, ils ont la même base, et ils ont un point en commun.
290 R : Hein ?
291 M : Ils ont la même base et la même hauteur...



Les échanges 285 et 286 montrent bien que la spéculation est commune : les deux élèves sont d'accord, ces deux triangles devraient avoir la même aire. La mesure amène alors d'abord la confirmation de cette spéculation (287), puis une validation théorique de la proposition en 288 - 290.

On remarque que la mesure des aires n'est pas accompagnée d'un déplacement qui pourrait leur fournir d'autres cas : une seule mesure suffit, car le problème de la généralisation est pris en compte avant que la mesure ne soit utilisée.

Conclusion

Ces élèves n'utilisent pas la mesure de façon heuristique, comme le faisaient Sofien et Angélique (§4.2.). Dès la reconnaissance du contrat (*« ...Ah d'accord, là faut faire une démonstration »*), ils utilisent la mesure comme un outil de validation, qui sert à confirmer des propositions qu'ils énoncent. On observe cette démarche d'expérience cruciale dans deux cas différents : elle correspond soit à un besoin commun de validation (comme pour la mesure des aires), soit à celui d'un seul des deux élèves lors d'un conflit ou d'un déséquilibre entre les deux partenaires. Le mode de validation employé dans les deux cas est l'expérience cruciale. On note que cette validation pragmatique garde un caractère privé par rapport à la production dans laquelle aucune mesure n'est mentionnée (voir Vadcard 1996, p.11 des annexes).

Nous proposons d'appeler ces mesures *probatoires* en référence à leur rôle de tests par lesquels les élèves s'assurent qu'ils peuvent poursuivre leur raisonnement, que les arguments qu'ils possèdent déjà sont bien valides. Le choix de ce terme permet en outre de garder à l'esprit le rôle de preuve que jouent ces mesures.

5 - CONCLUSIONS

Nous avons pu montrer dans ce texte que la mesure peut être d'au moins deux natures lorsqu'elle intervient dans une démarche de résolution de problème en géométrie. Nous les avons nommées *mesure exploratoire* et *mesure probatoire*.

La mesure exploratoire joue un rôle heuristique dans la résolution du problème. Elle est employée par des élèves qui sont engagés dans un processus de preuve pragmatique, et les propositions qu'elle leur permet de découvrir ne sont pas justifiées. Le mode de validation employé est l'empirisme naïf, qui consiste à s'assurer de la validité d'un énoncé par l'examen de quelques cas.

Les mesures qui font suite à la mise en œuvre d'une connaissance viennent valider la proposition émise. Elles ont un caractère privé et n'apparaissent pas dans les productions des élèves. Elles sont souvent employées pour résoudre un conflit entre les deux partenaires, ou ôter le doute de l'un des deux : les connaissances des élèves, même si elles sont à peu près les mêmes, ne sont pas disponibles dans les mêmes conditions. Certains reconnaissent aisément une configuration leur permettant d'appliquer un théorème qu'ils connaissent, d'autres ont plus de difficultés. Sans que le conflit donne forcément lieu à un débat, il arrive fréquemment que face à l'affirmation de l'un des partenaires, l'autre vérifie immédiatement ses dires par la mesure. Ce comportement nous semble pouvoir être qualifié de conflit socio-cognitif (Perret-Clermond 1979) : les deux élèves sont dans la même classe, et la différence des conditions de mobilisation d'une connaissance qui leur est forcément commune joue le rôle de déclencheur du conflit. L'élève qui n'a pas mobilisé la connaissance va chercher à le faire sans avoir à solliciter son partenaire pour qu'il lui fournisse des explications. Dans les cas où un élève met explicitement en doute l'affirmation de son camarade, il est arrivé aussi que ce soit ce dernier qui, sans mettre en œuvre d'explication théorique, l'invite à employer la mesure pour se convaincre du résultat : *« ...non mais vas-y, vérifie cette propriété »*. Elle est alors bien une expérience cruciale, permettant de décider entre une proposition et sa négation par une expérimentation dans laquelle le problème de la généralisation est explicitement pris en compte.

Finalement, on peut dire au terme de ce travail que la mesure n'est pas forcément l'indice d'une démarche de preuve pragmatique. Le changement de statut épistémique (conviction) d'une proposition que la mesure entraîne provoque dans le même temps une évolution du statut opératoire (passage de proposition d'entrée à conclusion) par la mobilisation de connaissances qui n'ont rien de pragmatique (cf. Raphaël et Michaël, §4.3 *: Ils ont la même base et la même hauteur...*). Elle garde dans ce cas un caractère privé par rapport à la preuve communiquée (ici, la preuve produite par écrit) qui témoigne d'un niveau de preuve plus élevé au sens de la typologie de Balacheff, c'est-à-dire une preuve plus proche des preuves intellectuelles.

D'autres élèves au contraire ont une démarche de preuve pragmatique tout au long de leur travail, et la mesure intervient alors dans la mise en œuvre de l'empirisme naïf, qui consiste à valider une proposition par l'examen de quelques cas particuliers (Sofien et Angélique, §4.2.).

Il semble donc qu'il faille distinguer deux niveaux de preuve : la preuve publique et la preuve privée, en reprenant les termes de (Coppé, Arsac et Guichard 1996). Les résultats que nous avons exposés montrent que chez certains élèves , la preuve publique, mathématique, est correcte, ils semblent en avoir compris le sens. Mais pour la preuve privée, personnelle, ces mêmes élèves peuvent faire appel à la mesure, moyen efficace et peu coûteux de valider ou d'invalider des propositions. Les démarches mises en jeu dans ces deux types de preuve sont tout à fait distinctes. A la suite de Fishbein on voit donc qu'un élève peut élaborer une preuve formelle correcte, et dans le même temps se convaincre du résultat en testant empiriquement la proposition, sur un seul cas. La mesure sert dans ce cas d'expérience cruciale.

Pour approfondir ce point, nous aimerions maintenant étudier comment réagissent les élèves lorsque la « traduction » des propositions en termes de mesures n'est plus si évident (parallélisme, alignements). Nous comptons examiner ce point lors d'expérimentations portant sur la recherche d'indices de conceptions d'élèves de la notion d'angle.

Bibliographie

ARSAC G. et al. (1992), *Initiation au raisonnement déductif au collège* - Lyon : Presses Universitaires de Lyon.

ARTIGUE M., ROBINET J. (1982), Conceptions du cercle chez des enfants de l'école élémentaire, *Recherches en Didactique des Mathématiques 3.1*, pp. 5-64.

BALACHEFF N. (1987), Processus de preuve et situations de validation, *Educational Studies in Mathematics*, 18/2, pp. 147-176.

BALACHEFF N. (1988), *Une étude des processus de preuve en mathématiques chez des élèves de Collège*, Thèse de l'Université Joseph Fourier.

BALACHEFF N. (1991a), Construction et analyse d'une situation didactique. Le cas de « la somme des angles d'un triangle », *Journal fur Mathematik - Didaktik 12.2/3*, pp. 199-264.

BALACHEFF N. (1991b), *Le rôle des conjectures dans la résolution de problème en géométrie* Rapport Japon.

BARBIN E. (1993), Quelles conceptions épistémologiques de la démonstration pour quels apprentissages ?, *Repères IREM n°12*, pp. 93-113

BAZIN J.M. (1993), *GEOMUS : Un résolveur de problèmes de géométrie qui mobilise ses connaissances en fonction du problème posé*, Thèse - Paris : Université Paris VI.

CAPPONI B., LABORDE C. (1996), Modélisation à double sens, *Atelier à la huitième école d'été de didactique des mathématiques,* Actes, Editions IREM de Clermont-Ferrand, pp.265-278.

COPPE S., ARSAC G., GUICHARD Y. (1996), Vérifications en devoir surveillé, *Petit x* 22, pp.13-32

DUVAL R. (1988) Approche cognitive des problèmes de géométrie en termes de congruence, *Annales de didactique et de sciences cognitives*, IREM de Strasbourg, pp.57-74

DUVAL R. (1991) Structure du raisonnement déductif et apprentissage de la démonstration, *Educational Studies in Mathematics*, 22(3), pp. 233-261.

FISHBEIN E. (1982), Intuition and Proof, *For the Learning of Mathematics* 3/2, pp. 9-18 et 24.

KAKIHANA K, SHIMITZU K (1996), From measurment to conjecture and proof in geometry problems ; student's use of measurments in the computer environment, *PME 20ème*, Vol III pp. 161-168.

LABORDE C. (1994), Enseigner la géométrie : permanences et révolutions, *Bulletin APMEP 396*, pp. 523-548.

LABORDE C., CAPPONI B. (1994), Cabri-géomètre constituant d'un milieu pour l'apprentissage de la notion de figure géométrique, *Recherches en didactique des mathématiques* 14/1.2, pp.165-210

LABORDE J.M. (1988), *Projet Cabri-géomètre.* Rapport interne LSD (IMAG). Grenoble.

MARTZLOFF J.C. (1989), Quelques exemples de démonstrations en mathématiques chinoises, *La démonstration mathématique dans l'histoire*, Actes du 7ème colloque inter IREM Epistémologie et histoire des mathématiques, Besançon 12 & 13 mai 1989 - Ed. IREM Besançon et Lyon.

PERRET-CLERMOND A.N. (1979), *La construction de l'intelligence dans l'interaction sociale*, Berne : Peter Lang.

ROLET C. (1996), *Dessin et figure en géométrie : analyse des conceptions de futurs enseignants dans le contexte Cabri-géomètre*, Thèse - Lyon : Université Claude Bernard.

SHIMIZU K., KAKIHANA K., NOHDA N. (1995), *Measurements vs./ and Proof - Students' Activities in Cabri Geometry and Teachers' Attitude toward Measurements*, University of Tsukuba, Japon.

VADCARD L. (1996), *L'usage de la mesure et la validation dans Cabri-géomètre*, DEA, Grenoble : Université Joseph Fourier.