LE POIDS D'UN RECIPIENT
ETUDE DES PROBLEMES DU MESURAGE EN CM

Guy BROUSSEAU
Laboratoire de Didactique des Sciences
et des Techniques, Université Bordeaux I
Nadine BROUSSEAU
Centre d'Observation et de Recherche
sur l'Enseignement des Mathématiques
Ecole Jules Michelet, Talence

Environnement des deux leçons

Les deux activités décrites ci-après s'inscrivent dans une progression de 30 leçons sur la mesure au CM_1*. Ce sont les 15ème et 16ème séances de cette progression.

1. Les quatorze premières ont trait aux mesures de **longueurs**, de **masses** et de **temps** (les mesures de capacités et de surfaces ont été laissées pour le CM_2).

Il s'est agi essentiellement, dans ces premières leçons, de développer des pratiques de mesurage dans des domaines nouveaux, avec des instruments nouveaux et avec des unités nouvelles.

Il s'agit aussi de faire sentir :

- l'intérêt de disposer d'un système d'écritures pour représenter, contrôler et anticiper par le calcul, les manipulations des grandeurs,
- la nécessité pratique d'utiliser pour une même grandeur des unités différentes,
- l'intérêt de disposer pour chacune d'une écriture canonique simple,

et donc l'avantage de choisir entre les unités des rapports constants entiers et universels.

Traditionnellement, ces études sont l'occasion de revisiter et de renforcer les connaissances sur le système décimal de numération des naturels par l'exposé du système décimal de mesure. Il n'est pas inutile pour cette visite d'utiliser de nouveaux parcours.

---

* Cette progression est décrite dans "La mesure au CM_1, compte rendu d'activités", N. Brousseau, IREM de Bordeaux, 1987.

«Grand N» n° 50 pp. 65 à 87, 1991-1992

Effectuer un mesurage est la réalisation concrète d'une suite de sortes de divisions où les diviseurs successifs sont les unités décroissantes utilisables et où les dividendes sont les restes successifs. Cette représentation est tout à fait utile pour comprendre les changements d'unités et de relations entre la taille des unités choisies pour un mesurage et celle des nombres obtenus.

Ainsi, ces quatorze séances permettent de revoir, en même temps que l'étude des unités légales, les bases de la numération de position et les principes de changements d'unités et des conversions. Elles permettent également d'introduire presque parallèlement la base 10 et la base 60, en application de cette réflexion fondamentale.

2. Les leçons qui suivent ces deux activités vont permettre d'étendre les conceptions obtenues dans des rapports effectifs des élèves avec un "micro espace" à la conception de mesures directes ou indirectes d'objets de grande taille (longueur : dam, hm, km ; poids : quintaux, tonnes) et à des échelles d'ordre de grandeurs beaucoup plus étendues : de 1 à 10^8 pour les longueurs, de 1 à 10^{11} pour les poids.

La virgule est introduite trois leçons plus tard comme repère permettant d'écrire une mesure en n'indiquant qu'une seule "unité". Il ne s'agit pas, bien entendu, de croire que l'usage de ces écritures de mesures à virgule dispense les élèves d'une véritable construction des décimaux. A l'école Jules Michelet, la construction des décimaux comme ensemble de nombres, de rapports et d'applications linéaires s'effectue au CM_2 à la suite de ces leçons suivant un processus bien connu*.

Les trois dernières leçons de cette progression sont consacrées à la comparaison et à l'ordre dans ces mesures décimales.

L'étude se termine en CM_1 par des leçons classiques dans lesquelles des problèmes d'addition, de multiplication par un entier, de soustraction sont proposés aux enfants. (On en trouvera le compte rendu dans "Rationnels et décimaux dans la scolarité obligatoire" de N. et G. Brousseau - activités 1, 2, 3 du module 6, de la page 100 à la page 106).

3. Les deux leçons décrites ci-après ont deux objets :

a) Le premier est de faire trouver aux enfants le poids d'un récipient vide, connaissant le poids du récipient plein et celui du contenu. Nous avions constaté, au cours de nombreux exercices et durant plusieurs années, que beaucoup d'enfants de ce niveau avaient des difficultés à résoudre ce problème dans le cas bien particulier où le récipient est indissociable de son contenu : par exemple, un verre plein d'eau, et plus généralement tout récipient contenant un liquide, des graines, du sable...

Les résultats dans la deuxième étape de l'activité 15 nous ont confortés dans cette idée.

---

* Cf. Les deux articles de G. Brousseau : "Problèmes de l'enseignement des décimaux", G. Brousseau RDM 1980 vol. 1.1, et "Problèmes de didactique des décimaux", RDM 1981 vol. 2.1, ainsi que l'ouvrage "Rationnels et décimaux dans la scolarité obligatoire", N. et G. Brousseau, IREM de Bordeaux, 1987.

Il est évident que le problème est différent pour les enfants lorsqu'on peut peser des objets indépendamment d'un contenant (par exemple des pommes dans un panier). Au cours de cette expérience, les enfants ont eu beaucoup de mal à dissocier le récipient vide de l'eau et à prendre en considération le poids de ce récipient.

b) Le second, plus général, est de présenter aux élèves le problème de l'écart entre :

- d'une part, les manipulations et les observations,
- d'autre part, les prévisions et les calculs numériques.

Cet écart entre les prévisions calculées d'une mesure et le résultat effectif du mesurage correspondant est un indice à prendre en compte dans une situation d'action. Pour le sujet, la question qui se pose est celle-ci : "cet écart remet-il en cause ou non mon modèle d'action et les décisions qui en découlent ?".

Nous l'examinerons ensuite comme un problème de validation : "un fait curieux à expliquer ou à ignorer".

Cet examen devrait avoir lieu bien avant que la construction des décimaux ne permette de disqualifier la question et de l'évacuer par la fuite habituelle.

On permet aux élèves de penser que, puisqu'on peut exprimer avec les décimaux des différences aussi petites qu'on veut, les erreurs (de mesures, d'arrondis) peuvent être rendues aussi petites que nécessaires pour être négligeables (l'expression décimale représente à la fois la mesure et sa précision).

Cette question ne devrait pas pouvoir être évitée dans un processus d'apprentissage a-didactique.

Dans la suite de ces activités, on retrouve le schéma, maintenant classique, des situations a-didactiques avec les phases

- d'action (ici des situations de mesurage, d'anticipation),
- de communication (qui mettent en évidence des stratégies),
- de comparaison et de choix de stratégies qui amènent à la validation des résultats obtenus,
- d'institutionnalisation, au cours desquelles l'enseignant révèle aux enfants le caractère culturel des savoirs qu'ils se sont déjà appropriés (au cours des différentes expériences qu'ils ont faites) et qu'ils devront dorénavant utiliser.

Ces méthodes permettent de mettre en place progressivement les mécanismes du mesurage et du calcul, cet apprentissage étant accompagné de réflexion et de raisonnements.

Description des deux activités

LA MESURE : 15ème ACTIVITE

TROUVER LE POIDS D'UN RECIPIENT VIDE (1ère partie)

I - MATERIEL

- 1 balance Roberval,
- 1 seau rempli d'eau,
- 1 récipient vide léger en matière plastique (60 g environ)
  (boîte de glace achetée dans le commerce),
- 1 boîte de poids en laiton,
- 1 verre.

II - PREPARATION DE LA CLASSE

1. Le tableau.

Avant la leçon, l'enseignant prépare ainsi le tableau :

<table>
<tr><td colspan="4">calcul sur les poids</td><td>Nombre de verres d'eau   Poids total</td><td>Explication schéma</td><td>Prévisons</td></tr>
<tr><td>100 g
hg</td><td>10 g
dag</td><td>1 g
g</td><td>Total</td><td rowspan="4">1...

2....
3....</td><td rowspan="4"></td><td rowspan="4">1.–|–|–|–|

2.–|–|–|–|
3------------
4------------</td></tr>
<tr><td></td><td></td><td></td><td></td></tr>
<tr><td></td><td></td><td></td><td></td></tr>
<tr><td></td><td></td><td></td><td></td></tr>
</table>

2. Le matériel est disposé devant les enfants :

- sur une table face aux élèves, l'enseignant a posé :
  - la balance Roberval et les poids,
  - le récipient en matière plastique,
  - le verre.
- par terre, le seau plein d'eau.

III - DEROULEMENT DE L'ACTIVITE

Elle comprend quatre étapes :

1. Première étape

Consigne

"Vous allez avoir à deviner le poids d'un récipient avec de l'eau".

L'enseignant prend le récipient vide et le verre qu'il remplit d'eau. Il vide l'eau du verre dans le récipient.

"Nous allons peser le récipient. Quel poids pensez-vous que nous allons trouver ? Vous marquerez votre prévision sur le cahier de brouillon".

Déroulement

- Prévision (le récipient et un verre d'eau).
  Chaque enfant fait une prévision qu'il inscrit sur son cahier.

- Vérification.

Lorsque tous les enfants ont terminé, l'enseignant demande à l'un d'entre eux de venir faire la pesée à l'aide de la balance Roberval et des poids en laiton et ce, devant tous ses camarades.

Lorsque la balance est en équilibre, l'enfant qui vient de faire la pesée dicte le résultat (en énumérant la liste des poids dans le plateau) à un camarade qui marque ces poids sur la partie gauche du tableau préparée à cet effet : "calcul sur les poids".

Exemple

calcul sur les poids			
100 g hg	10 g dag	1 g g	Total
2	2	8	228 g

- Recueil et présentation des estimations.

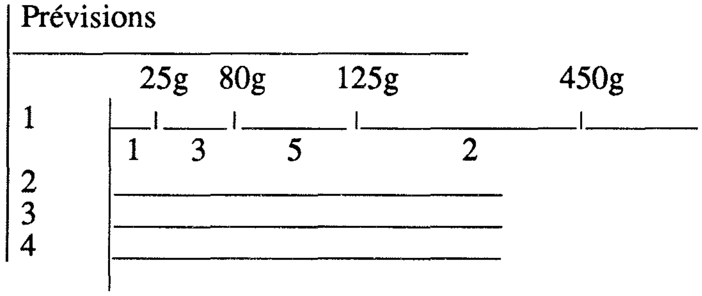
L'enseignant écrit 228 g et demande :

"Qui a trouvé la valeur exacte ?".

"Qui a trouvé plus ? Qui a trouvé moins ?".

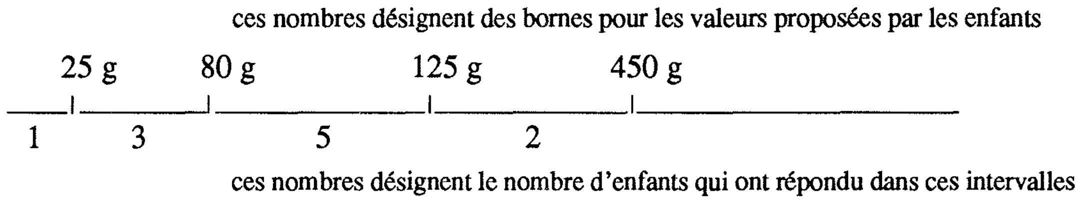
et il inscrit lui-même les valeurs données par les enfants sur la partie droite du tableau : "prévisions", ligne 1, dans un ordre croissant, ainsi que le nombre d'enfants qui ont prévu ces valeurs.

Exemple



"Qui avait prévu entre 80 g et 125 g ?" (5 enfants).
"Qui avait prévu entre 125 g et 450 g ?" (2 enfants)....

ligne 1



Remarque. Les enfants sont surpris lors de cette première étape : en effet, ils disent qu'il leur a été très difficile, voire impossible, de trouver le poids du récipient avec l'eau et qu'ils ont donné un nombre au hasard.

2. Deuxième étape

Cette deuxième étape se déroule comme la première : l'enseignant remplit à nouveau le verre (il faut qu'il soit bien plein) et le vide dans le récipient qui contient toujours le premier verre d'eau.

Consigne

“Quel poids prévoyez-vous maintenant pour le récipient ? Marquez ce poids sur votre cahier de brouillon”.

Déroulement

- Prévision (le récipient et deux verres d'eau).
Les enfants inscrivent leurs prévisions.

- Recueil et présentation des estimations.
Comme dans l'étape précédente, l'enseignant recueille les estimations (avant le contrôle de la pesée) :
"Combien as-tu trouvé ?" demande-t-il à un enfant.
"Qui a trouvé moins ? Combien ?"

"Qui a trouvé plus ? Combien ?"
et il inscrit les nombres sur la partie droite du tableau, ligne 2 (sous la ligne 1 précédente).

ligne 1

25 g 80 g 125 g 450 g

ligne 2

On obtient ainsi un histogramme grossier.

- Vérification

Comme dans la première étape, l'enseignant demande à un enfant de venir peser le récipient tandis qu'un autre inscrit sur la partie gauche du tableau (calcul sur les poids) les poids énumérés par son camarade.

Ces poids sont marqués sous ceux de la première pesée, lors de la première étape.

Exemple

calcul sur les poids			
100 g hg	10 g dag	1 g g	Total
2	2	8	228 g
3	8	3	383 g

Comportements observés : Beaucoup d'enfants ont doublé le premier poids (228 x 2), mais d'autres essaient de corriger leur prévision. Pas de commentaires... la pesée indique cette fois 383 g. Comparaison des anticipations des élèves... quelques-uns s'éclairent et disent : "j'ai compris !".

Remarque. L'enseignant ne relève aucun des commentaires faits par les enfants. Il leur dit : "Ne dites rien, chacun va essayer de faire une bonne prévision. Laissez les autres avoir le plaisir de découvrir et de comprendre tout seuls ! Au début, c'était une devinette, mais bientôt, vous allez pouvoir prévoir exactement. Continuons !".

3. Troisième étape

Le déroulement est le même que celui de la deuxième étape :

a) L'enseignant verse un troisième verre d'eau dans le récipient.

b) Les enfants font des prévisions qui sont recueillies sur la partie droite du tableau (ligne 3).

Comportements observés

i) Déjà, une dizaine d'élèves retranchent le premier résultat du second et lui ajoutent la différence :

383 - 228 = 155
155 + 383 = 538

ii) Quelques autres "bricolent leurs nombres".

iii) Deux ou trois multiplient imperturbablement par 3 la première valeur.

c) Vérification par la pesée.

Un enfant vient faire la pesée avec inscription des poids et du total sur la partie gauche du tableau, ligne 3 : 553 g !

Les enfants qui avaient fait les calculs i) ci-dessus et qui étaient presque sûrs d'avoir bien calculé sont étonnés, puis déçus. Ils ont un sentiment d'injustice.

Un élève a proposé la valeur exacte ; les autres le pressent de dire comment il a fait :

"J'ai vu que l'aiguille était plutôt par là, alors j'ai réfléchi..."

Il est le meilleur, il a gagné ! L'enseignant résiste à l'envie de lui infliger "l'explication".

Le jeu de devinette continue.

4. Quatrième étape

a) L'enseignant verse un quatrième verre plein d'eau dans le récipient.

b) Les enfants font des prévisions écrites.

c) ***Recueil des prévisions***

L'enseignant recueille une première prévision d'un enfant et demande : "avez-vous tous prévu le même poids ?".

Il recueille une deuxième prévision d'un autre enfant. "Qui prévoit pareil ?".

d) ***Débat***

Avant de recueillir les autres estimations, l'enseignant demande aux enfants quels sont ceux qui sont sûrs de leur prévision et pourquoi ils ont choisi ce nombre.

Il leur propose de discuter, pour essayer de savoir qui a raison, et d'exposer leur méthode avant la pesée. Il leur dit également qu'après le débat, ils pourront changer leur prévision s'ils le veulent. Les enfants discutent : à ce stade, beaucoup ont trouvé UNE prévision, un nombre unique mais par un raisonnement correct, et savent l'expliquer. Mais un certain nombre d'enfants (très peu) ne sont pas convaincus : ils disent encore qu'ils prévoient au hasard et que "ça marche" et ils ne veulent pas se laisser convaincre par le raisonnement de leurs camarades.

e) ***Rectification des prévisions***

L'enseignant arrête la discussion : les enfants qui le désirent rectifient le poids qu'ils avaient marqué sur leur cahier de brouillon.

f) ***Vérification***

Un enfant vient faire la pesée avec inscription des poids et du total sur la partie gauche du tableau, ligne 4.

Remarque. Les élèves comprennent progressivement que le calcul ne donne pas forcément la valeur trouvée avec la balance. Les élèves qui ont utilisé cette méthode de prévision viennent l'expliquer et s'insurgent de ne pas la voir réussir. Elle prend en compte tous les éléments essentiels du problème d'une façon qui paraît rationnelle, elle se communique bien.

Les élèves qui ne l'avaient pas trouvée, l'utilisent pour comparer, la comprennent.

5. Prévision du poids du récipient vide

a) L'enseignant propose d'abord de vider un cinquième verre pour les enfants qui désirent utiliser la méthode énoncée ci-dessus par leurs camarades...

(même processus)

b) "Maintenant, je vais vider l'eau et peser le récipient. Qu'est-ce que je vais trouver ?".

Les enfants font leur prévision sur leur cahier de brouillon.

Mais le récipient n'est pas pesé : il n'y a pas de vérification dans cette séance.

Certains sont déjà sûrs de leur prévision ; la conviction des autres enfants se fera petit à petit au cours de l'activité suivante et ce n'est qu'à ce moment qu'ils pourront vérifier leur prévision. Pour accorder le résultat du raisonnement et celui du mesurage, il faudra expliciter le fonctionnement des erreurs et des approximations, mais les élèves n'en ont pas encore pris conscience.

LA MESURE : 16ème ACTIVITE

TROUVER LE POIDS D'UN RECIPIENT VIDE : DEFIS

(2ème partie)

I - RECUEIL DES PREVISIONS

L'enseignant recueille les prévisions (poids du récipient vide) que les enfants avaient faites à la fin de l'activité précédente.

Ces prévisions sont inscrites sur une droite. L'enseignant place une barre dans la région proposée et indique le nombre d'enfants qui ont prévu la même valeur :

```
                    4 (enfants)          3 (enfants)
- - - - - -|- - - - - -|- - - - - -|- - - - - -|- - - - - - - - - - - - - - - -
        valeur      valeur                  valeur
```

"Qui a trouvé moins ?"
"Qui a trouvé plus ? etc."

II - RECENSEMENT DES "METHODES"

Les élèves qui ont utilisé des méthodes de prévisions par le calcul viennent les expliquer.

L'enseignant les recense. Il y en a deux.

1. Calcul avec les deux premiers nombres obtenus par la pesée

R : récipient
V : verre

383	-	228	=	155
↓		↓		↓
R+2V		R+1V		1V

228	-	155	=	**73**
↓		↓		↓
R+1V	-	1V		R

Le maître écrit ces opérations et ces formules au tableau sans commentaire. Les élèves en comprennent parfaitement le sens pour les besoins de la leçon.

2. Calcul avec le premier, le deuxième et le troisième nombres obtenus par la pesée

553 - 383 = 170
↓ ↓ ↓
R+3V R+2V 1V

228 - 170 = **58**
↓ ↓ ↓
R+1V 1V R

Les poids sont différents ! 73 g dans un cas, 58 g dans l'autre ! Les enfants sont très surpris et déçus et ils ne comprendront que très progressivement que le calcul ne donne pas forcément la valeur indiquée par la balance. L'enseignant leur demande alors d'essayer de trouver d'autres méthodes de calcul qui permettraient de trouver le poids du récipient vide. Et c'est en les encourageant, en leur lançant des défis, qu'il les amène petit à petit à en essayer d'autres qui sont élaborées en commun et inscrites sur le tableau.

3. Calcul avec le premier et le troisième nombres obtenus par la pesée

553 - 228 = 325
↓ ↓ ↓
R+3V R+1V 2V

Les enfants comprennent qu'il faut trouver la moitié de 325 pour avoir le poids d'un verre.

Ils procèdent par décomposition car il s'agit d'une division par 2. Ils ne ressentent pas la nécessité de poser l'opération. Il en aurait sûrement été autrement s'il avait fallu partager en 3, 4, 5...

la moitié de 300 → 150
la moitié de 20 →10
la moitié de 5 → 2 1/2
la moitié de 325 → 162 1/2

228 - 162 1/2 = **65 1/2**
↓ ↓ ↓
R+1V 1V R

4. Autres calculs avec le troisième nombre :

553 - 383 = 170 (cf. le calcul 2)
↓ ↓ ↓
R+3V R+2V 1V

$$\begin{array}{ccccc} 3 & \times & 170 & = & 510 \\ & & \downarrow & & \downarrow \\ & & 1V & & 3V \end{array}$$

$$\begin{array}{ccccc} 553 & - & 510 & = & \mathbf{43} \\ \downarrow & & \downarrow & & \\ R+3V & & 3V & & \end{array}$$

$$\begin{array}{ccccc} 2 & \times & 170 & = & 340 \\ & & \downarrow & & \downarrow \\ & & 1V & & 2V \end{array}$$

$$\begin{array}{ccccc} 383 & - & 340 & = & \mathbf{43} \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ R+2V & & 2V & & R \end{array}$$

5) Autres calculs avec le troisième et le deuxième nombres :

$$\begin{array}{ccccc} 383 & - & 228 & = & 155 \text{ (cf. le calcul 1)} \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ R+2V & & R+1V & & IV \end{array}$$

$$\begin{array}{ccccc} 155 & \times & 3 & = & 465 \\ & & & & \downarrow \\ & & & & 3V \end{array}$$

$$\begin{array}{ccccc} 553 & - & 465 & = & \mathbf{88}\text{ g} \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ R+3V & & 3V & & R \end{array}$$

III - RECENSEMENT DES EXPLICATIONS SUR LES ECARTS

Les enfants comparent tous les résultats obtenus pour le poids du récipient.

R : 73 g, 58 g, 43 g, 65 1/2 g, 43 g, 88 g.

L'enseignant leur demande s'ils peuvent donner des explications et trouver des raisons à ces différences. Ils disent :

"la balance n'est pas très juste !"
"l'aiguille n'était pas toujours exactement au milieu !"
"le verre n'était pas toujours plein de la même manière !"
"les pesées n'étaient pas assez précises !"

Ils vont de plus en plus loin dans l'analyse des erreurs de mesure.

Remarque. Il existerait des moyens d'arrêter cette chaîne de raisonnements; Il suffit de remplacer l'eau par du sable bien sec, et la balance Roberval par une balance à ressort : la précision de la lecture est de l'ordre du gramme et le poids des verres de sable, d'une pesée à l'autre, varie de moins d'un gramme.

IV - DEBAT SUR LA REPONSE AU "HASARD"

1. L'enseignant recense maintenant la prévision des enfants qui se targuent de l'avoir faite au hasard.

Il fait constater à tous les élèves que, sur l'ensemble de ces prévisions, très peu - une ou deux seulement chaque fois - se rapprochent des résultats obtenus par le calcul et que ce ne sont jamais les mêmes élèves qui les font.

Malgré cela, quelques enfants qui avaient bien calculé commencent à douter de l'efficacité de leur méthode et ils demandent à leurs camarades comment ils ont fait pour donner leur résultat. Bien entendu, ces derniers ne peuvent pas exhiber une méthode de prévision et pourtant ils essaient de les impressionner par une assurance exagérée. En fait, ils ne donnent pas leur résultat au hasard mais ils utilisent des encadrements pour en diminuer l'incertitude.

2. L'enseignant lance alors un défi :

"Nous allons faire un grand nombre de pesées (une quinzaine) avec un autre récipient et chaque fois, vous ferez une prévision :
- soit toujours par le calcul,
- soit toujours au hasard.

Je noterai pour chacun de vous les prévisions que vous aurez faites. Puis nous pèserons le récipient vide. Nous compterons ensuite le nombre de prévisions qui seront le plus près de ce poids.

Ceux dont le nombre total de prévisions se rapprocheront le plus de ce poids auront gagné !
Qui prévoit par le calcul ?
Qui prévoit par le hasard ?"

Stupéfaction dans la classe : personne ne veut prévoir au hasard.

V - POIDS DU RECIPIENT

Les pesées n'ont pas eu lieu : le temps de l'activité était écoulé. Cependant, on procède solennellement à la pesée du récipient vide. Deux enfants viennent faire cette pesée devant leurs camarades : entre 51 et 52 grammes !

Les enfants qui ont trouvé 58 g jubilent (voir le calcul 2 du paragraphe II ; recensement des méthodes). Ceux qui ont trouvé 73 g redonnent les explications du paragraphe III. Ils sont tout de même à peu près sûrs que leur méthode est correcte.

L'enseignant propose de refaire l'activité en remplaçant l'eau par du sable fin.
(cette expérience n'a pas eu lieu par manque de temps)

Mais en attendant, ils formulent les conclusions que l'on peut tirer de ces expériences : "il semblerait que le poids du récipient est probablement compris entre 43 et 88 grammes.

Des manipulations plus soigneuses devraient permettre d'avoir des écarts moins énormes (du simple au double). Mais il resterait toujours une certaine erreur. Si l'on prend deux mesures seulement, et qu'on les suppose exactes, le calcul que vous avez appris donne une réponse, elle aussi supposée exacte".

Remarque. Au cours de ces activités et de ces débats, le modèle mathématique a été utilisé implicitement et explicitement comme moyen de prévision, comme moyen de comparaison des résultats, comme argument dans le débat, finalement comme évidence logique par tous les élèves, à plusieurs reprises. Sans formalisation excessive, les bases d'un écriture algébrique ont même été introduites par le maître. Il resterait à institutionnaliser son usage par des petits problèmes de résolution de systèmes de deux équations à deux inconnues conformes aux exemples que nous venons de montrer.

Exemple : un camion chargé de douze fûts pèse 7 tonnes. Après avoir déchargé 6 fûts, il ne pèse plus que 4 tonnes Quel est le poids d'un fût et celui du camion vide ? Ce genre de situations a été bien présenté dans un article de Grand N n° 37 "Les aimants" (A. Bessot, M. Eberhard et C. Chevrot).

VI - RESULTATS

Les objectifs visés ont été atteints : la plupart des enfants ont su résoudre par la suite les problèmes classiques de recherche du poids du contenu ou du poids du récipient.

Ils ont aussi pris conscience des écarts entre les résultats des manipulations et ceux des calculs numériques, ils ont accepté de les prendre en considération et ont su les commenter.

Beaucoup d'entre eux étaient capables de trouver un intervalle et de donner une valeur centrale, de choisir des valeurs voisines, de rejeter les valeurs trop éloignées et surtout d'accepter celles de leurs camarades lorsqu'elles étaient différentes des leurs mais dans des écarts raisonnables.

VII - COMMENTAIRES SUR LES RESULTATS DES 15ème ET 16ème ACTIVITES

Contrairement à l'idée que l'on pourrait avoir, les enfants de ce niveau ont une forte tendance à oublier que le contenant pèse, dans le cas où ce contenant est indissociable du contenu (liquide, poudre...). Et pour certains d'entre eux, il ne suffit pas qu'ils y pensent pour manipuler le poids du contenant sans erreurs (ils le comptent deux fois dans les sommes). Lors des explications, il n'est pas du tout évident pour les enfants qu'il faille enlever le poids du récipient vide pour obtenir le poids du contenu (eau, sable...).

Ce phénomène nous a paru suffisamment général et suffisamment résistant (presque un obstacle épistémologique ; voir page suivante la partie "Problèmes de didactique de la mesure : Exemples de quelques difficultés importantes") pour mériter les deux leçons que nous lui avons consacrées.

1. Cette activité a permis à chacun de prendre conscience que tout pèse dans le plateau d'une balance : le récipient et l'eau. Dans des exercices ultérieurs, nous ferons rappeler ce principe dans des cas semblables, par exemple le sac et la farine qu'il contient, et même dans des cas plus difficiles, la baudruche vide et pleine d'air.

Ce fait a été explicité et est devenu un savoir de la classe.

2. On estime qu'après cette expérience, les élèves seront mieux armés pour résoudre et comprendre les problèmes de fonctions affines, c'est-à-dire les problèmes dans lesquels des sommes (ou des produits) portent sur des éléments composés de deux parties dont l'une est répétée et l'autre ne doit pas l'être : allées qui se croisent, prise en charge et coût kilométrique dans un taxi, abonnement et tarif progressif, etc.

3. Dans la connaissance de la mesure, les élèves ont confirmé leur intuition qu'une valeur observée (obtenue dans un mesurage) est entachée d'une erreur ; c'est-à-dire qu'un certain intervalle peut lui être associé tel que :

- à l'intérieur, les autres valeurs de cet intervalle pourraient être observées par un autre mesureur, et donc acceptées comme valeurs théoriques de la mesure
- et à l'extérieur de cet intervalle, on sera fondé à écarter les valeurs observées.

4. Cette erreur n'est pas entièrement inconnue : on peut estimer, a priori, qu'elle sera inférieure à certaines valeurs. Par exemple, quand on mesure la longueur de la table, on peut estimer que l'erreur sera inférieure à 1 cm. On peut vérifier cette estimation par une statistique : ensemble de mesures faites, soit par un même élève, soit par tous les élèves.

Remarque. Habituellement, les maîtres choisissent une valeur centrale dans cet intervalle et continuent le problème avec cette valeur unique, ce qui ne donne aux élèves aucun moyen de prévoir ce que deviendra cette erreur dans les calculs que l'on est conduit à faire. Cela revient à éliminer le problème de l'erreur.

Nous avons, au contraire, attiré l'attention des enfants afin qu'ils considèrent que la distribution des mesures d'un certain intervalle sont, a priori, acceptées. Par la suite, cette idée sera constamment reprise jusqu'à l'élucidation des différentes sources d'erreurs (erreurs dûes à l'imprécision de l'appareil, au manque de fidélité, erreur de lecture, erreur absolue, relative, que devient l'erreur dans les sommes et dans les produits ?).

Nous avons subrepticement utilisé une représentation de la distribution des erreurs. Cette image sera exploitée lors de l'introduction de la notion de moyenne. Elle pourrait être utilisée si l'on voulait introduire les connaissances les plus élémentaires de la statistique : étendue, médiane, etc.

5. Les enfants ont pris conscience aussi que lorsqu'on fait une théorie ou une méthode pour prévoir ou obtenir un résultat, il ne suffit pas que son application réussisse une fois ou même deux pour qu'elle soit acceptée comme vraie ou valide. Il faut qu'elle "marche" dans tous les cas, ce qui ne peut s'établir qu'avec un raisonnement, et qu'elle permette de maintenir, au cours des expériences, les erreurs à l'intérieur des intervalles déterminés.

Il faut donc au moins qu'elle soit ***reproductible, effectuable, explicitable, communicable*** aux autres et intelligible pour eux.

Problèmes de didactique de la mesure

A. Exemples de quelques difficultés importantes

Le concept de mesure n'a été élucidé que très péniblement et très tardivement dans l'histoire de l'humanité. Il présente d'ailleurs encore des zones d'ombre (la mesure en sciences humaines par exemple). Or, c'est un concept très ancien et très universellement utilisé. On a donc tendance à le croire simple et par conséquent à refuser même de clarifier les difficultés rencontrées dans la pratique ou dans l'enseignement, si cela implique de faire appel à des constructions mathématiques modernes ; les pédagogues raisonnent comme s'il existait un paradis originel où la mesure se comprendrait sans mystère avec des "idées concrètes". "La mesure" est un objet complexe comme nous allons l'entrevoir plus loin en énumérant les notions distinctes qu'il met en jeu. Mais son caractère universel et familier a conduit à une prolifération de termes compromis dans tant d'usages ambigus et anarchiques qu'il en résulte des contradictions culturelles rédhibitoires pour l'enseignement : il n'est pas possible de faire coïncider des définitions mathématiques nécessaires et les usages. (Il suffit par exemple de penser aux différents sens des mots "surface" et "aire").

Ce caractère familier et primitif de la notion constitue donc un obstacle culturel presque infranchissable pour une clarification du concept selon les usages de la scolarité obligatoire. De nombreuses conceptions de la mesure se sont constituées en obstacles épistémologiques (par exemple, la commensuration contre le partage de l'unité) ou contre des obstacles épistémologiques (la structure d'algèbre de Boole des espaces mesurables s'établit contre la structure hiérarchique et univoque utilisée de préférence pour les communications). La genèse psychologique de la mesure chez l'enfant exige des expériences nombreuses et une maturation lente.

Or, la complexité de la réalisation effective des mesurages, les difficultés matérielles et conceptuelles attachées à ces pratiques de toutes sortes, ont conduit rapidement les enseignants à renoncer à la plupart des activités ***effectives*** de mesurage (en particulier celles qui sont difficiles à contrôler en situation scolaire) pour se cantonner dans des situations simplifiées ou métaphoriques et dans des activités de calcul. Cette circonstance, si elle tend à simplifier l'acte d'enseignement, ne favorise pas la maîtrise du concept de mesure ni la représentation des mathématiques comme moyen efficace et simplificateur pour la réalisation et le contrôle d'activités effectives.

B. Complexité du concept de mesure

Nous pouvons distinguer au moins huit "objets" distincts dans les problèmes de mesure :

1. Les $\boxed{\text{objets}}$ "supports" des caractères à mesurer : objets concrets (une table, un oiseau) ou déjà "mathématisés" (un rectangle, sa "longueur", sa "largeur", en tant que segments, l'ensemble des points constituant sa surface) ou "conceptualisés" (par exemple une envergure).

2. La $\boxed{\text{grandeur}}$, ***concept*** permettant d'appréhender "ce qui peut devenir plus grand ou plus petit", relativement à des objets de type (1). La grandeur est un ensemble de propriétés communes à plusieurs ***(types de) grandeurs*** particulières : l'aire, la masse, la capacité, le débit, par exemple.
(Remarque : la longueur et la largeur d'un rectangle sont des segments - objets de type 1 - dont on peut apprécier la grandeur "longueur").

Une structure mathématique (clan, tribu,...etc.) explicite ces propriétés communes et décrit ce qui est susceptible de mesure, un ensemble mesurable : les objets (ensembles, événements, segments, surfaces... etc.) qui peuvent être l'objet d'une mesure au sens 4 ci-après. Elle énumère le genre d'opérations auxquelles doivent se prêter ces éléments (réunion, complémentation, intersection...) et s'il y a lieu, indique une invariance par rapport à certaines transformations (déplacements, découpages etc.) de façon à permettre des comparaisons.

3. La $\boxed{\text{valeur particulière}}$ de cette grandeur, relative à un objet précis, sans tenir compte du système utilisé pour la quantifier, en particulier sans tenir compte des unités.

Exemples :

La masse d'un corps envisagée par l'effet qu'elle produit dans un système physique, la longueur d'un segment en tant que place occupée dans l'espace.
Cette valeur peut être représentée par ***une classe d'équivalence*** (modulo la transformation évoquée en 2).

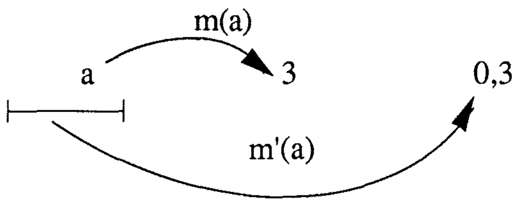
Exemples :

- la longueur d'un segment est alors la classe de tous les segments qui peuvent coïncider avec lui par des isométries (translation, rotation....),
- la classe d'équivalence des surfaces planes "superposables" par isométries constitue une surface quarrable,

- la classe d'équivalence des masses déterminées par une balance Roberval dont un plateau contient une charge fixe constitue une masse.

4. Une $\boxed{\text{mesure}}$ (mesure-fonction) est une ***application*** additive et positive d'un ensemble mesurable dans $\mathbb{R}$. Elle fait correspondre à chaque élément d'un ensemble mesurable : (un segment, une surface, un événement, une masse...) un nombre réel positif.

En ce sens, l'unité, en tant que grandeur, change avec la mesure : c'est l'objet dont l'image est 1



$m(a) \neq m'(a)$

5. La $\boxed{\text{valeur de cette mesure}}$ (mesure-***image)*** d'un objet de (3) c'est le ***nombre*** positif (naturel, décimal, rationnel ou réel) que la mesure au sens (4) fait correspondre à un objet (2) auquel on s'intéresse. Cette "mesure" ne porte aucune trace de l'application mesure : 3 est seulement un nombre si on ne peut conserver cette trace que dans le contexte (3 est l'image par la mesure en centimètres de tel segment).

6. La $\boxed{\text{mesure}}$ dite parfois $\boxed{\text{concrète}}$ ou nombre concret : ***couple*** formé par l'image au sens (5) (le nombre) et par la fonction (mesure au sens 4), représentée par une "unité" :

Exemple : 3 cm 0,03 m

En tant qu'objet, un tel élément est identifiable avec une des classes d'équivalence (sens 2) : 3 cm est la même classe que 0,03 m alors que $0{,}03 \neq 3$. Mais sa forme lui confère des propriétés très utiles en physique et en pratique (traitement des équations aux dimensions).

7. Le $\boxed{\text{mesurage}}$. Le mot désigne ***l'opération matérielle*** ou la méthode permettant de déterminer effectivement, pour un objet de type (1), ***un nombre et un intervalle*** (ou une famille d'intervalles) d'incertitude (ou de confiance).
Le mot désigne aussi son résultat (comme en (4) et (5)).

Exemple :

- la longueur de la table est (tel segment a pour longueur) 1,35 m ± 0,002.
Les procédés qui permettent de mesurer l'épaisseur d'une tôle, la largeur d'une fissure, la distance entre deux murs sont des mesurages de longueur.

- la capacité de cette bouteille est 0,75 ± 0,01.

La science du mesurage est la métrologie. Elle s'intéresse à la méthodologie de la mesure (du mesurage), à la détermination des erreurs des différents types, à l'effet de ces erreurs sur les résultats des calculs, à la détermination des étalons et des systèmes d'unités, à l'étude des appareils et des techniques de mesurages de grandeurs de toutes sortes (électriques, magnétiques, acoustiques, mécaniques, optiques, thermiques...). Elle a été pendant longtemps un objet important de l'enseignement primaire (un cinquième du temps en 1947).

8. L'évaluation des mesures : une sorte de jugement ou de "mesure" sur la mesure, ou sur son expression, qui représente la taille, la grandeur relative, la rareté, la qualité, la précision... etc, et qui sert comme moyen de contrôle dans les activités de mesurage, dans les calculs ou les comparaisons.

Exemples

- l'ordre de grandeur d'une mesure,
- la taille d'un nombre,
- le nombre de chiffres significatifs.
- le pourcentage d'objets du même type plus grands que l'objet considéré (la rareté relative) permet de comparer des tailles relatives : une souris de 10 cm au garrot est plus grande (rarissime) qu'un éléphant de 2 m.

Chacun de ces "objets" appartient à des environnements (milieux) différents, ils suivent des règles différentes et seraient définissables par des situations différentes. Ils sont "connus" dans des institutions différentes qui les ont dénommés de manières diverses. Ils interviennent tous dans la conception et dans la pratique des mesures.

Il serait sans doute prématuré d'enseigner toutes les notions évoquées ci-dessus aux élèves de l'école élémentaire, mais y renoncer complètement conduit à s'abstenir de traiter correctement aussi bien les problèmes pratiques que les notions théoriques. Pour "éviter" des contradictions, des erreurs et des difficultés locales, l'enseignement a tendance à ignorer les activités effectives et à rejeter à plus tard les élucidations théoriques pour se cantonner dans un savoir scolaire faiblement utilisable. En réaction, l'acceptation sans discernement de toutes les activités "naturelles" et de leur vocabulaire comme objet d'enseignement renforce la confusion et rend impossible des acquisitions mathématiques ou culturelles fondamentales.

La moindre des choses serait que l'enseignant les distingue, lui, et qu'il témoigne de leur importance culturelle par une certaine vigilance. En un mot, qu'il s'assure, à travers un usage souple de la langue, de la précision et de la justesse de la pensée de l'élève sur ces sujets.

C. Enjeux éducatifs de l'enseignement de la mesure

Au-delà des enjeux classiques de cet enseignement, adaptation aux pratiques sociales de nombreux métiers et préparation des apprentissages mathématiques ultérieurs, on peut distinguer un enjeu éducatif.

L'univers de la mesure et du mesurage met en présence au moins deux domaines assez clairement séparés pour les élèves, même si ce qui les distingue reste flou :

- le domaine des objets concrets et des grandeurs avec leur environnement de propriétés et de manipulations
- le domaine des nombres et son environnement de calcul.

Les rapports entre ces deux domaines jouent un rôle important dans les représentations épistémologiques scolaires des mathématiques. Ils servent de support à une conception culturelle sur les rapports entre la théorie et la pratique enseignée implicitement à l'école (et qui assigne entre autres aux mathématiques une certaine place dans les activités humaines). Les élèves se déterminent psychologiquement par rapport à ces rapports "officiels" et aux rapports personnels qu'ils établissement à l'occasion des activités de ce genre.

Or, ces rapports ne semblent pas traités de façon convenable et ne sont pas l'objet de véritables analyses didactiques. Il serait pourtant utile de s'interroger au moins sur le statut des erreurs et des écarts et sur les conditions de remise en cause d'une déclaration ou d'une théorie.

1. Les écarts et les erreurs

La nature et l'origine des erreurs reste pour les élèves, non seulement mystérieuse mais menaçante car elle est confondue avec une faute.

Il serait utile et possible de distinguer entre :

- les écarts dus au choix du système numérique de référence. Par exemple, l'utilisation de la mesure naturelle (en nombres entiers) ne permet pas de différencier certaines "grandeurs" jugées différentes dans l'environnement. Le problème est le même lorsqu'on utilise les décimaux avec un nombre limité de chiffres après la virgule (2 par exemple), ce qui est souvent le seul usage pratique des décimaux.

Le choix de l'unité permet aux élèves et aux maîtres d'utiliser ces nombres décimaux, par exemple 13,21 $(\frac{1}{100})$ pour exprimer à la fois la mesure et l'erreur tout en traitant le nombre comme un naturel :

- les erreurs liées au calcul : erreurs d'arrondi.
- les incertitudes dues à l'imprécision de l'instrument de mesure, à son manque de fidélité, à sa fausseté.
- les incertitudes liées à l'instabilité de l'objet mesuré (l'envergure d'un oiseau par exemple) ou des conditions de mesure.

- les fautes : erreurs de procédure ou de calcul qui rendent le résultat inacceptable.

Les élèves peuvent apprendre à repérer et à contrôler l'effet de ces erreurs. C'est l'un des objets des recherches d'ingénierie dont les deux leçons présentées ci-dessus sont extraites.

2. La remise en cause d'un fait ou d'une théorie

Il est très important d'apprendre à quels niveaux la vérité d'un fait peut être remise en cause. Le mesurage est un excellent modèle de toute l'activité scientifique. Il est l'occasion de préciser précocement les rapports qu'il faut établir entre la contingence et la nécessité :

• Quelle erreur est acceptable, laquelle justifie une remise en cause du modèle théorique ? Quand faut-il incriminer la contingence ?
Les leçons proposées portent essentiellement sur les relations sociales qui permettent de gérer plus ou moins bien la vérité.

• Quel rapport, le discours scientifique doit-il entretenir avec ce qui tient lieu de réalité ?

L'élève forme son rapport au savoir aussi bien public que privé, au cours de ses apprentissages, bien avant les études formelles (scientifiques et philosophiques) ultérieures. La façon dont la vérité et la connaissance sont gérées au cours de cet apprentissage (individuellement et/ou collectivement), la façon de les accepter, de les mettre en doute ou de les rejeter joue donc un rôle essentiel. La pratique de la vérité peut être apprise avant l'exposé académique de ses instruments cognitifs et culturels.

M.J. PERRIN a montré dans sa thèse (page 101) que les élèves rencontrent de grandes difficultés à lever les contradictions qui peuvent apparaître entre ce qu'ils voient et ce qu'ils calculent.

D. Les pratiques didactiques courantes

Les pratiques didactiques courantes ne satisfont pas les conditions évoquées ci-dessus.

1. Les nécessités du domaine des objets ne sont pas prises en compte. Par exemple, les correspondances "sémantiques" entre les manipulations des objets et les opérations sur les nombres : mettre bout à bout pour "ajouter" des longueurs, mettre dans le même plateau pour "ajouter" des poids, juxtaposer pour concrétiser la "somme".

Elles ne sont pas ***effectivement*** réalisées dans des situations d'action ; si elles sont parfois enseignées, c'est avec un statut faussé. En fait, la pratique de l'élève est inversée par rapport au discours du maître : le mesurage réputé "concret" n'est jamais, en fait réalisé sous contrôle, ni pratiqué. Il a un statut de savoir scolaire "théorique" alors que les manipulations familières à l'élèves sont celles des calculs et des nombres.

Les élèves sont assujettis à des "situations" et à des environnements institutionnels dont ni eux, ni les maîtres, ne peuvent toujours facilement appréhender ou contrôler le décalage par rapport aux différentes exigences : connaissances théoriques "savantes", connaissances scolaires, situations "objectives" scolaires officielles, situations effectives...

Les interprétations de ces situations sont, au contraire, exigées par les enseignants comme des évidences, comme des apports intuitifs de l'élève, comme résultat de son développement ou de ses apprentissages spontanés.

2. Les rapports entre le savoir et le "concret", entre les activités et le discours, la pratique et la théorie, la vérité et l'erreur..., ne sont pas traités en objets d'enseignement ni explicites ni implicites.

3. L'articulation macrodidactique des savoirs obéit à des règles d'économies qui empêchent les éclaircissements et les aménagements.

Par exemple, il est d'usage d'ignorer les erreurs quand elles sont visibles et gênantes (lorsqu'on n'utilise que les rationnels) et de ne pas évoquer d'encadrements lorsque ce serait pourtant fonctionnel, "parce qu'on n'encadre rien" tant qu'on n'a pas construit les rationnels ou les réels, ainsi que le signalait Lebesgue. L'étude théorique est donc renvoyée à plus tard. Mais l'introduction des décimaux conduit essentiellement à "négliger" ces erreurs que l'on peut rendre, grâce à eux, "aussi petites qu'on veut" (?) et désormais insignifiantes. Les élèves continuent à utiliser le modèle de la mesure naturelle sans se poser aucune question, ni sur le problème à résoudre ni sur la structure mathématique construite, ni sur les écarts qui pourraient subsister pour d'autres raisons. Le savoir a été simplifié mais aussi défonctionnalisé. Les savoirs ainsi simplifiés ne sont pas toujours de bons points d'appuis pour les apprentissages ultérieurs, qu'ils soient orientés vers la pratique ou vers la théorie.

4. Ces conditions correspondent à une démathématisation des moyens mis en oeuvre par les sujets pour contrôler leur activité au prix d'une mathématisation croissante du milieu (appareils, savoirs, institutions) parfaitement légitime pour les institutions ordinaires. Cette tendance contrarie les efforts des institutions d'enseignement car il faut remathématiser ou mathématiser une connaissance au cours de son apprentissage pour que son contrôle apparaisse comme le fruit d'une responsabilité consciente et cognitive du sujet. Jusqu'à quel point faut-il remathématiser les actes élémentaires mais complexes de la vie ?

Les enseignants ne sont ni libres ni en mesure de modifier à leur gré les conditions culturelles, les significations et les fonctionnements des savoirs. La didactique doit d'abord apprendre ce qu'il est possible de faire à propos de la mesure avant de proposer des modifications profondes.

BIBLIOGRAPHIE

BESSOT A., EBERHARD M. (1983) : "Une approche didactique des problèmes de la mesure" *Recherche en Didactique des Mathématiques - vol. 4.3.*

BESSOT A., CHEVROT C., EBERHARD M. (1985) : "Arithmétique en CE_1 à partir d'une situation problème", *Grand $\mathbb{N}$,* n° 37.

BROUSSEAU G. (1988) : "Les différents rôles du maître", *Bulletin de l'AMQ.*

BROUSSEAU N et G.(1987) : "Rationnels et décimaux dans la scolarité obligatoire", *IREM de Bordeaux.*

BROUSSEAU N. (1987) : "La mesure au CM_1 : compte rendu d'activités", *IREM de Bordeaux.*

CHEVALLARD Y. (1989) : "Rapport au savoir", *Séminaire de Didactique des Mathématiques et de l'Informatique,* IMAG, Grenoble.

LEBESGUE H. (1931) : *"La mesure des grandeurs"*, Ed. A. Blanchard, Paris, 1975 réimpression.

MALIFAUD P.(1989) : "Mesure-Introduction", *Encyclopedia-Universalis.*

PERRIN-GLORIAN M.J. (1992) : *"Aires de surfaces planes et nombres décimaux. Questions didactiques liées aux élèves en difficulté aux niveaux CM-6ème"*, Thèse de doctorat d'Etat Didactique des Mathématiques, Université Paris VII.

REVUZ A. (1989) : "Intégration et mesure", *Encyclopedia-Universalis.*