LA GEOMETRIE DES TRANSFORMATIONS

Une approche en classe de 4ème et 3ème : le transport de figures

René METREGISTE
Collège Jean Rostand, Orléans

Le travail que je décris a été élaboré et mené par une équipe d'enseignants de 4ème (MM. Le Pape, Métrégiste, Pielot) au collège de l'Argon à Orléans dans le cadre des quatre heures hebdomadaires de mathématiques (1978-79 et 1979-80).

POURQUOI CETTE EXPERIENCE ?

L'enseignement de la géométrie nous apparaissait mal construit. Il se dévidait sur un mode linéaire et déductif au détriment de l'autonomie, de l'imagination, de la compréhension, du sens-critique, de l'expression, de la créativité de l'enfant.

La séparation «géométrie affine» — «géométrie métrique» qui était imposée alors, nous paraissait fallacieuse et peu convenable aux possibilités, aux exigences, aux motivations des élèves.

Il fallait réagir. Après discussion nous avons choisi les transformations comme support du cours de géométrie. Pour nous conforter dans notre entreprise nous avons déposé un projet à l'I.R.E.M. d'Orléans et constitué une équipe pédagogique.

POURQUOI LES TRANSFORMATIONS ?

Elles sont présentes au programme ; leur caractère dynamique, la possibilité qu'elles offrent de donner plus d'unité au programme, le lien entre le numérique et le géométrique qu'elles favorisent,, ont déterminé notre choix.

Les transformations couvrent beaucoup de notions, de concepts, et à travers des activités de manipulations, de graphismes, de constructions, les élèves se familiarisent avec ces notions. Et puis... l'importance du groupe des transformations et de

«petit x» n° 4, pp. 35 à 71, 1984

ses invariants au regard de l'étude d'une géométrie est à souligner.

PRINCIPES DE L'EXPERIENCE.

Nous souhaitions proposer aux élèves des situations didactiques capables de provoquer des apprentissages pertinents au regard de la connaissance souhaitée.

— Essayer de créer une dialectique entre le (ou les) maîtres(s), les élèves, la situation, le matériel et les connaissances que l'on cherche à faire acquérir par les élèves.

— Essayer de dégager, à partir d'une observation provoquée, les faits et les éléments qui nous paraissent significatifs de l'avancement des élèves dans l'appropriation, la reconnaissance et l'utilisation des notions et concepts abordés.

— Essayer de créer, au sein du groupe classe, un processus de communication intra-groupe et inter-groupe qui mette en évidence les interactions entre les élèves et les actions qui les accompagnent.

Il est à noter que l'aspect manipulatoire de la tâche, seul, ne justifie en rien le caractère didactique de la situation. C'est son mode d'utilisation pour provoquer des apprentissages qui nous intéresse, d'où la mise en place d'un scénario précis pour faire apparaître les points-clés de l'appropriation des actions, des concepts ou propriétés.

Il va de soi que dans l'horaire imparti, il n'a pas été possible de bénéficier d'observateurs ni de matériel audio-visuel. Dans la mesure où nos emplois du temps le permettaient nous avons prévu :

— des heures d'observation pendant lesquelles 1 ou 2 membres de l'équipe notent tout ce qui se passe dans un des groupes d'élèves ;

— d'interchanger les classes pour quelques heures de cours afin d'apprécier le niveau de coordination atteint.

L'essentiel de nos analyses s'appuiera sur les observations faites, les remarques des élèves, leurs productions, les résultats aux tests.

Objectifs généraux et principes méthodologiques retenus :

— Créer des situations didactiques riches favorisant la prise en charge par l'élève de la situation d'apprentissage.

— Fonder l'enseignement des mathématiques sur des activités, sur l'expérience en rejetant toute axiomatique.

— Apprendre aux élèves à conjecturer, critiquer, démontrer.

— Mettre en évidence les modes de représentation utilisés par les élèves dans l'approche des phénomènes.

— Refuser la séparation «affine» ; «métrique».

— Montrer l'interdépendance du géométrique et du numérique.

Un objectif qui nous tenait à cœur, était que la création d'une équipe de professeurs de mathématiques travaillant en commun pouvait promouvoir des actions pluridisciplinaires.

Objectifs pour le professeur :

— Lier l'affine et le métrique.

— Lier le géométrique et le numérique.

— Proposer des situations d'apprentissage ouvertes et riches.

— Développer l'autonomie de l'élève vis-à-vis du savoir, de celui qui sait, du milieu environnant.

— Repérer les modes de représentation et les procédures utilisées par les élèves.

Objectifs pour l'élève :

— Transformer des figures par différentes méthodes de construction.

— Reconnaître et classer des transformations.

— Utiliser différentes caractérisations de ces transformations.

— Repérer les propriétés et les invariants de chaque transformation.

— Confronter différents modes de représentation avec la réalité physique.

Nous nous sommes préoccupés de retrouver une continuité avec l'école élémentaire, la 6ème et la 5ème. Pendant une bonne partie du premier trimestre, nous avons revu et étudié certaines notions de base de la géométrie dite élémentaire : notion de distance, parallélisme, orthogonalité, angles, usage des instruments de dessin, droite graduée, repèrage d'un point dans le plan, constructions avec la règle et le compas. Nous avons essayé à travers des manipulations et des exercices d'amener progressivement nos élèves à «conjecturer», «critiquer» et «démontrer».

PLAN D'EXPERIENCE.

Notre plan d'expérience devait être simple et tenir compte de l'horaire officiel (4 heures).

Il s'articule ainsi :

1. Travaux sur papiers peints (3 séances).
2. Utilisation de transformateurs géométriques (8 - 10 séances).
3. Evaluation.
4. Etude analytique des transformàtions (2 séances).
5. Utilisation de transformateurs numériques préprogrammés sur HP29 (2 séances).
6. Notion de vecteurs (2 séances).
7. Evaluation.

Les élèves ont travaillé en groupes de 3 ou 4 élèves, sans aucune contrainte quant à la constitution de ces groupes.

TRAVAUX SUR PAPIER PEINT.

Chaque groupe d'élèves dispose d'un morceau de papier peint de 50 cm X 50 cm.

Il s'agit par une série de consignes de :

a) trouver des motifs de base du papier peint (motif qui, juxtaposé à lui-même (sans recouvrement, ni trou) peut reconstituer tout le papier) ;

b) déterminer le motif de base trouvé par 8 à 12 points. Le motif de base trouvé est découpé ou calqué, les élèves auront à vérifier la pertinence de leur choix ;

c) reproduire la figure obtenue sur un motif du morceau de papier peint (figure de départ) ;

d) refaire le même travail sur un autre motif du papier peint (figure d'arrivée) ;

e) analyser les figures de départ et d'arrivée.

Nous avons utilisé les papiers peints comme une sensibilisation aux problèmes posés et surtout pour permettre l'émergence des questions qui nous amèneront à formuler convenablement le problème qui nous occupe : le papier peint intermédiaire et non comme une fin en soi....

Les consignes données, les élèves travaillent en groupes. Nous leur demandons d'écrire leurs réflexions sur un cahier chaque fois qu'ils en éprouvent le besoin. Ceci pour nous aider à mieux comprendre leurs actions. Nous suivons un groupe et nous prenons des notes.

Bien vite les élèves sont conduits à étudier la liaison entre la figure de départ et la figure d'arrivée explicitées par des tracés et à observer les segments reliant les points correspondants ou homologues.

Certes, le maître intervient pour débloquer une situation, faire préciser une procédure, mais ses remarques ou ses questions ne portent jamais sur l'objet de l'étude. Il s'interdit d'induire par ses réflexions telle ou telle procédure.

Pendant la troisième séance, un porte-parole de chaque groupe vient au tableau présenter les propositions. Les différentes procédures sont discutées sans complaisance et, petit à petit, la pertinence de certains motifs de base se précise.

Parmi les 19 groupes qui fonctionnent, 13 ont trouvé des motifs différents. Il nous faut avouer que certains n'étaient pas évidents pour nous. (Voir le papier peint en annexe). La phase collective est très intéressante, chacun se sent concerné ; là nous regrettons de ne pouvoir disposer d'une caméra pour filmer la discussion. C'est à ce moment que deux questions formulées par les élèves posent le véritable problème :

Comment passes-tu de la figure de départ à la figure d'arrivée sans utiliser de calque ou sans déplacer le motif de base que tu aurais découpé ?

Si tu repères un point par rapport à la figure de départ, comment passes-tu à un point de la figure d'arrivée repéré de la même façon ?

En effet le **véritable problème** est posé. Il ne s'agit plus d'étudier des figures de l'espace physique, mais de s'intéresser exclusivement aux transformations des figures qui seront progressivement perçues comme transformations de l'espace tout entier et plus seulement comme agissant sur les seuls points de la figure considérée. Ces transformations seront distinguées par l'invariant qu'elles conservent.

Le concept de déplacement peut se réduire au couple (figure de départ, figure d'arrivée) sans tenir compte des positions intermédiaires et sans référence au temps mis pour aller de la figure de départ à la figure d'arrivée.

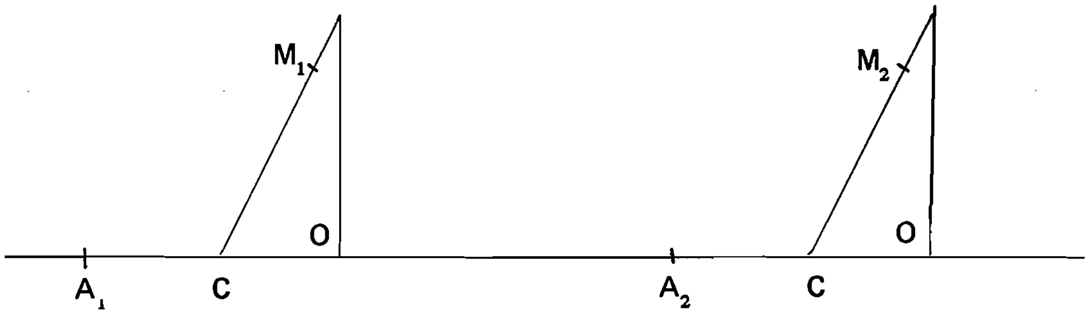
DESCRIPTION DES PROCEDURES.

Il s'agit des procédures pour la rechercher d'un motif de base.

Certains groupes ont conclu à un «glissement guidé par 2 rails», d'autres :
- ont observé le parallélisme des liaisons entre chaque point et son image ;
- ont mesuré les distances entre les points ;
- ont mesuré des angles ;
- ont fait le lien avec une leçon de technologie vieille de deux mois.

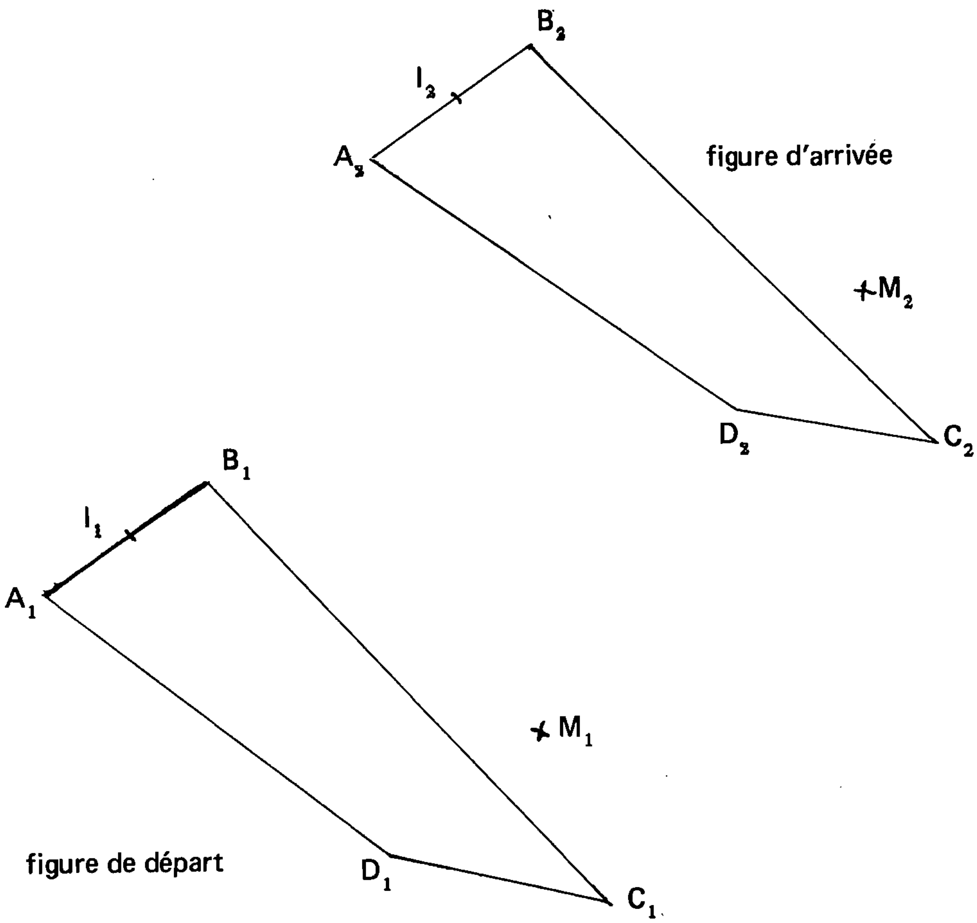
Mais voici plus en détail quelques procédures que nous avons retenues.

I



Le point **M_1** est lié à la figure de départ, il s'agit de construire le point **M_2** lié à la figure d'arrivée et repéré de la même façon. **Nous avons représenté plus loin les figures de départ et d'arrivée par des polygones les délimitant.**

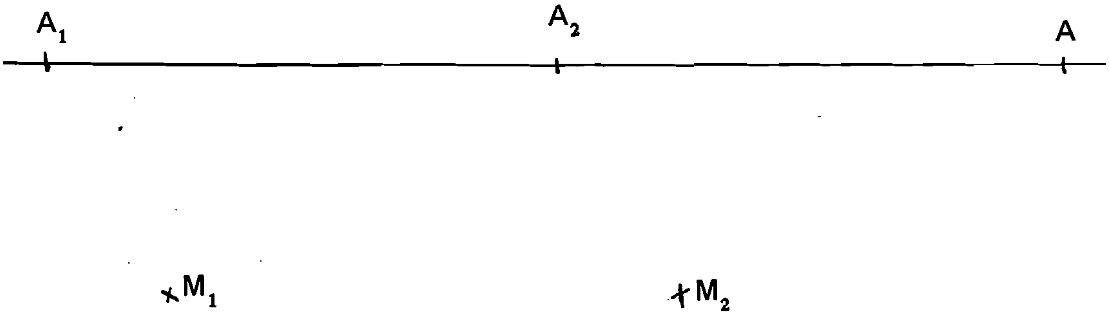
Je trace la droite **(A_1A_2)**, je fais glisser mon équerre pour avoir le point **M_1** qui se trouve sur le côté oblique. Je mesure la distance de **A_1** à **C** sommet de l'équerre.



Je marque M_1 sur l'équerre, puis je fais glisser l'équerre sur la droite (A_1A_2) et je m'arrête quand $CA_2 = CA_1$, alors M_1 est en M_2 et je marque M_2 ».

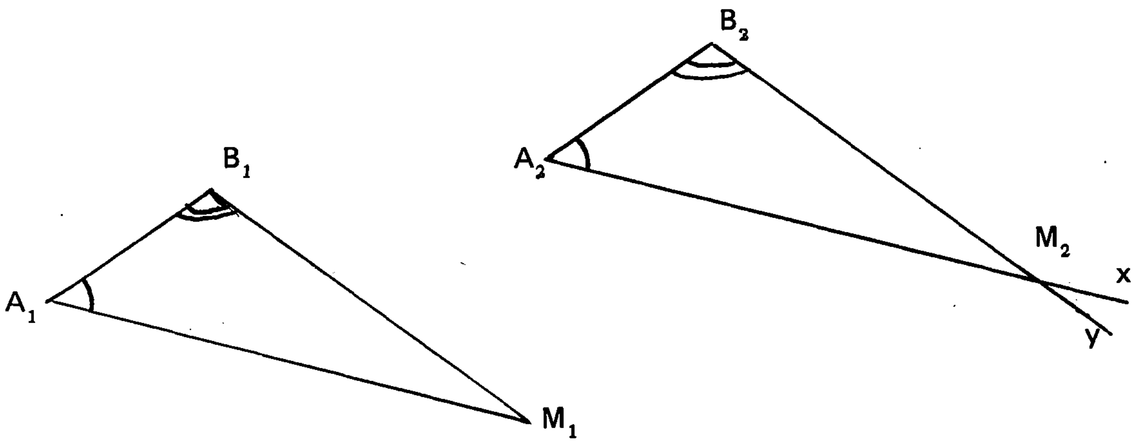
Il faut préciser que lors de la discussion collective la classe entière avait admis que $[A_1A_2] /\!/ [B_1B_2] /\!/ [M_1M_2]$.

II



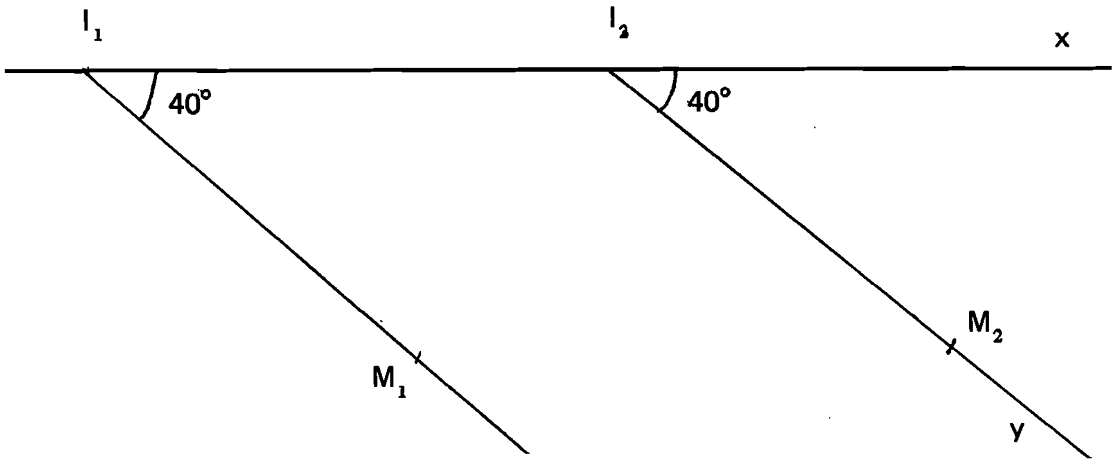
«Je trace le segment $[A_1A_2]$ et je le prolonge d'une longueur $[A_2A]$ égale à $[A_1A_2]$. Je prends avec mon compas l'ouverture A_1M_1 et je mets la pointe sèche en A_2 et je trace un arc de cercle, puis je prends l'ouverture A_2M_1 et je mets la pointe sèche en A et je trace un arc de cercle qui coupe le premier et j'obtiens le point M_2 ».

III



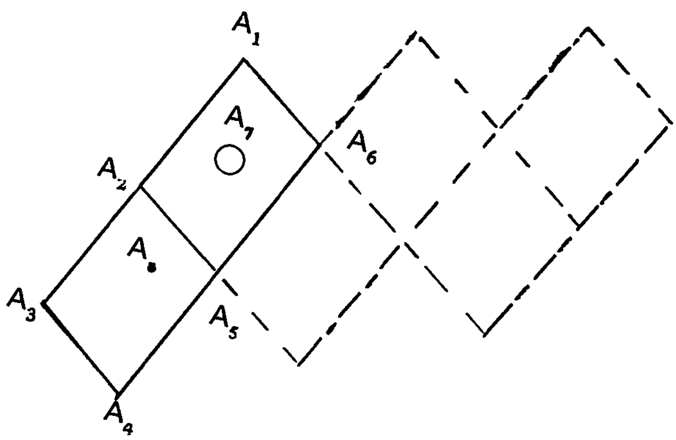
«On joint A_1B_1, A_1M_1 et B_1M_1. Je mesure les angles $\widehat{M_1A_1B_1}$ et $\widehat{A_1B_1M_1}$. Puis on joint A_2B_2 et je trace la demi-droite $[A_2x)$ tel que l'angle $\widehat{B_2A_2x}$ soit égal à l'angle $\widehat{B_1A_1M_1}$, ensuite je trace la demi-droite $[B_2y)$ pour que l'angle $\widehat{A_2B_2y}$ soit égal à l'angle $\widehat{A_1B_1M_1}$. Les demi-droites $[A_2x)$ et $[B_2y)$ se coupent au point M_2 ».

IV



«Je marque les milieux I_1 et I_2 des segments $[A_1 B_1]$ et $[A_2 B_2]$, je trace la droite $(I_1 I_2)$, puis je mesure l'angle $\widehat{I_2 I_1 M_1}$, je trouve environ **40°**. Ensuite je trace la demi-droite $[I_2 y)$ tel que l'angle $\widehat{xI_2 y}$ soit égal à l'angle $\widehat{I_2 I_1 M_1}$. Je mesure $[I_1 M_1]$ et je porte cette distance sur $[I_2 y)$ et j'obtiens le point M_2 ».

V **Dans cette procédure il s'agit d'un autre motif de base (celui qui aurait à peu près la forme d'un parallélogramme, voir papier peint en annexe).**



«On mesure la distance qu'il y a entre A_2 et A_6. Le point A_1 va se déplacer de 8 cm. (Sur le croquis elle est de 2,3 cm). Si on raisonne sur le croquis les autres points A_2 ; A_3 ; A_4 ; A_5 ; A_6 ; A_7 ; A_8 vont également se déplacer de 2,3 cm. La demi-fleur A_2 se déplaçant de 2,3 cm viendra compléter la demi-fleur A_6 ainsi le point A_3 et A_5, les points se déplacent parallélement».

Vous direz avec raison d'ailleurs, que nous n'avons pris en compte que les procédures efficaces ; ce n'est cependant pas le cas de la cinquième qui manque de pertinence.

Je voudrais à nouveau rappeler que l'expérience s'est déroulée dans le cadre normal d'une classe et avec les heures officielles réservées aux mathématiques.

Certes si nous avions eu une heure optionnelle, si nous avions disposé d'observateurs nous aurions pu faire une analyse des procédures, des stratégies mises en œuvre. Si notre attitude s'apparente à celle du chercheur en didactique des mathématiques, elle s'en différencie par un souci d'efficacité plus immédiat. Les exigences des programmes, l'orientation des élèves pèsent encore trop lourdement. Dans trois des procédures citées les notions de parallélisme et de distance interviennent pour ces segments de liaison, les constructions n'utilisent pas le fait que les segments homologues sont de même longueur et parallèles, les deux autres se servent d'égalité d'angles. La troisième procédure construit un triangle isométrique à un triangle donné connaissant un côté et les angles adjacents à ce côté et dans la quatrième nous retrouvons les angles correspondants et les angles à côtés parallèles et de même sens. Autant de notions exploitables et de points de départ d'autres activités ; sans oublier l'activité problème et son aspect conjectural.

DESCRIPTION ET CONSTRUCTION DES TRANSFORMATEURS.

Qu'appelons-nous transformateur géométrique ?

Tout simplement un système articulé construit avec du carton à anglaiser et maintenu par de la colle et des attaches parisiennes et qui se meut sur une feuille de papier canson.

Pourquoi des transformateurs ?

Pour répondre à trois préoccupations essentielles.

1. Avoir du matériel de manipulation permettant de poser des problèmes liés aux transformations.
2. Avoir un matériel qui permette d'entrer ex-abrupto dans le domaine des transformations.
3. Avoir un matériel de mise en œuvre simple et rapide qui soit proche de phénomènes physiques rencontrés tous les jours.

Nous donnons ici des suggestions pour le matériel de construction que nous avons utilisé (vous trouverez dans le numéro 11 des publications de l'IREM d'Orléans toutes précisions utiles). Notre propos sera illustré par les feuilles extraites du PLOT-matériel* numéro 1 (édité par la Régionale d'Orléans - Tours de l'Association des Professeurs de Mathématiques de l'Enseignement Public) : «système articulés». Il s'agit, comme le précise le concepteur, de nos transporteurs...

* Abonnement, APMEP-IREM d'Orléans - 45046 Orléans Cedex

Pour une fabrication artisanale il est suffisant de posséder :

- des feuilles de papier canson 24 X 32 ;
- des feuilles de papier calque ;
- des bandes de carton à anglaiser ;
- des attaches parisiennes ;
- de la colle ;
- du papier carbone ;
- un emporte-pièces pour faire les trous pour les attaches parisiennes ;
- règle, compas, équerre, rapporteur.

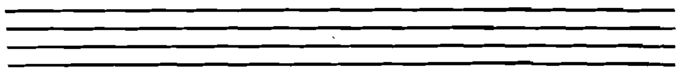
Les élèves avaient à construire les transformateurs suivants :

- translateur : style pied à coulisse ;
- rotateur ;
- translateur curviligne (style «grande roue») ;
- symétriseur orthogonal ;
- translateur curviligne : style pèse-lettre ;
- symétriseur point.

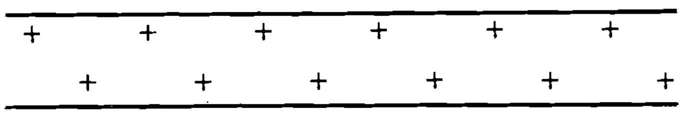
En outre, sont étudiés deux transformateurs dont le principe repose sur le caractère aléatoire de la chute d'une feuille de papier sur un support tout en «conservant» la figure.

Construction du translateur curviligne tel que nous l'avons employé

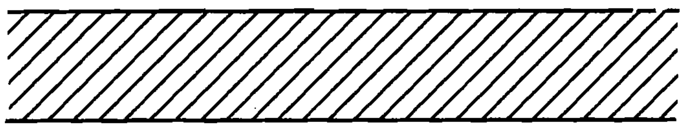
Code :



bande de carton collée à la feuille de canson.



Bande de carton collée au papier calque.



bande de carton mobile.

Attache parisienne liée à la feuille de canson.

Attache parisienne liée au papier calque.

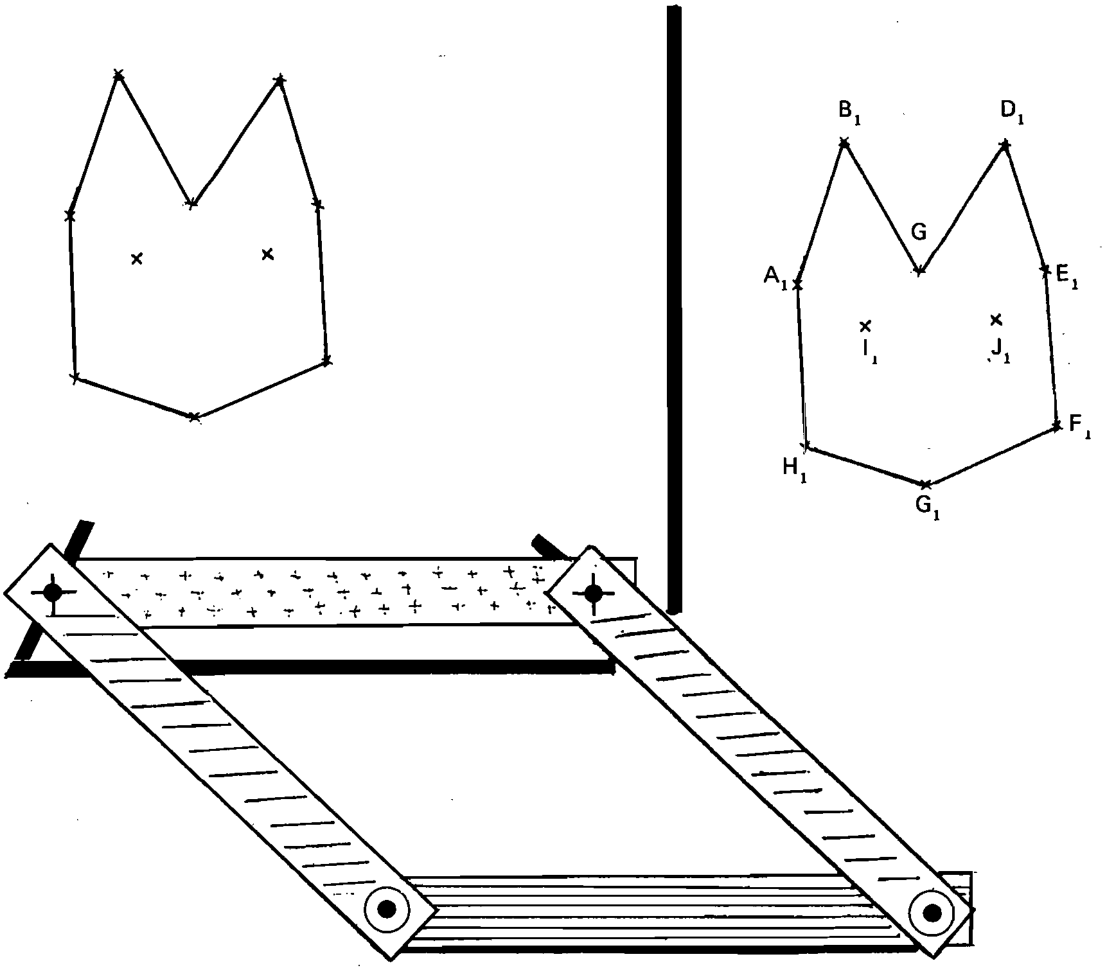
— le calque est lié à la feuille de canson, par un parallélogramme articulé ;

— un des côtés du parallélogramme est lié à la feuille de canson par 2 attaches parisiennes ;

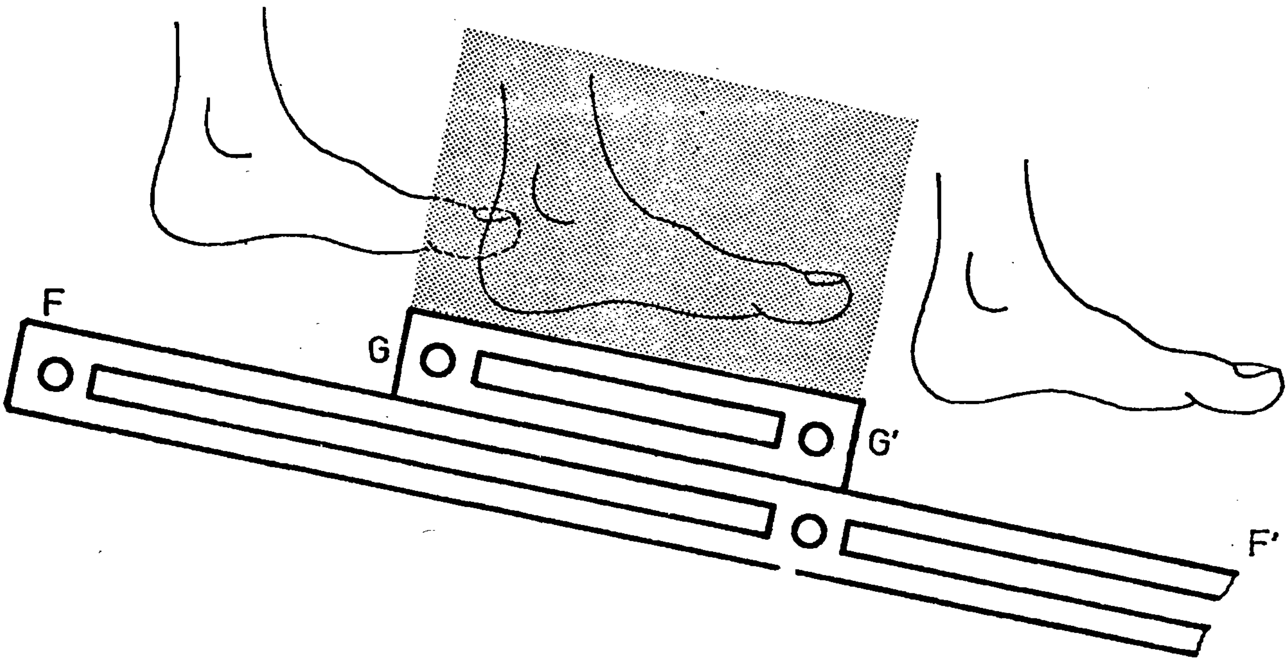
— le côté opposé est lié au calque par les 2 autres attaches parisiennes ;

— 2 bandes mobiles relient ses deux côtés ;

— il faut veiller à l'égalité dèux à deux des distances entre les attaches parisiennes.



GLISSEUR

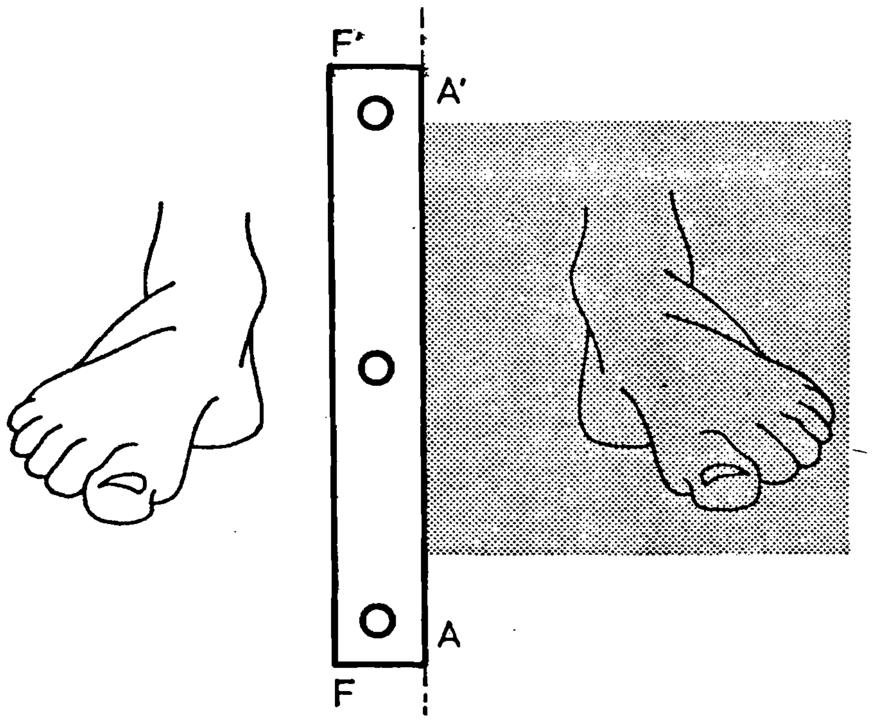


Pour quoi faire	:	En faisant glisser la glissière GG′ le long de la réglette fixe FF′ vous pouvez «transporter» toute figure d'un endroit de la feuille-support à un autre par une translation choisie.
Le principe	:	Basé sur le glissement de GG′ sur FF′. il permet de passer d'une position P à une position P′ par la translation de vecteur $\overrightarrow{PP'}$ et de montrer ou d'utiliser la superposition des translations l'une de l'autre.
Le montage	:	Fixer la réglette FF′ au support (prendre par exemple une glissière). Sur une barre GG′ (8 cm) fixer un carré de rhodoïd transparent*.
Le traçage	:	Une figure étant tracée sur la feuille support, en faisant glisser GG′ le long de FF′ superposer le carré de rhodoïd à la figure de départ que vous pourrez ainsi décalquer. Puis faire glisser GG′ le long de FF′ suivant le vecteur de translation choisi. On a alors en rétroprojection les 2 figures translatées l'une de l'autre*.

* **Pour travailler hors rétroprojecteur** : pour les réglettes on pourra prendre des bandes de carton type réglette à anglaiser, sur GG′ on collera un papier calque pour décalquer la figure de départ puis redécalquer la figure image en plaçant un papier carbone sur P′ entre la feuille de papier support et le papier calque.

Problème à poser : Après ce traçage d'une figure translatée, comment construire par cette translation l'image d'un point qui ne peut être «atteint» par le carré glissant ? Comment s'assurer que la construction est correcte.

RETOURNEMENT



Pour quoi faire : La feuille transparente pivote autour de la réglette fixe FF′ le long du segment AA′ et permet de «transporter» une figure d'un côté à l'autre de la réglette.

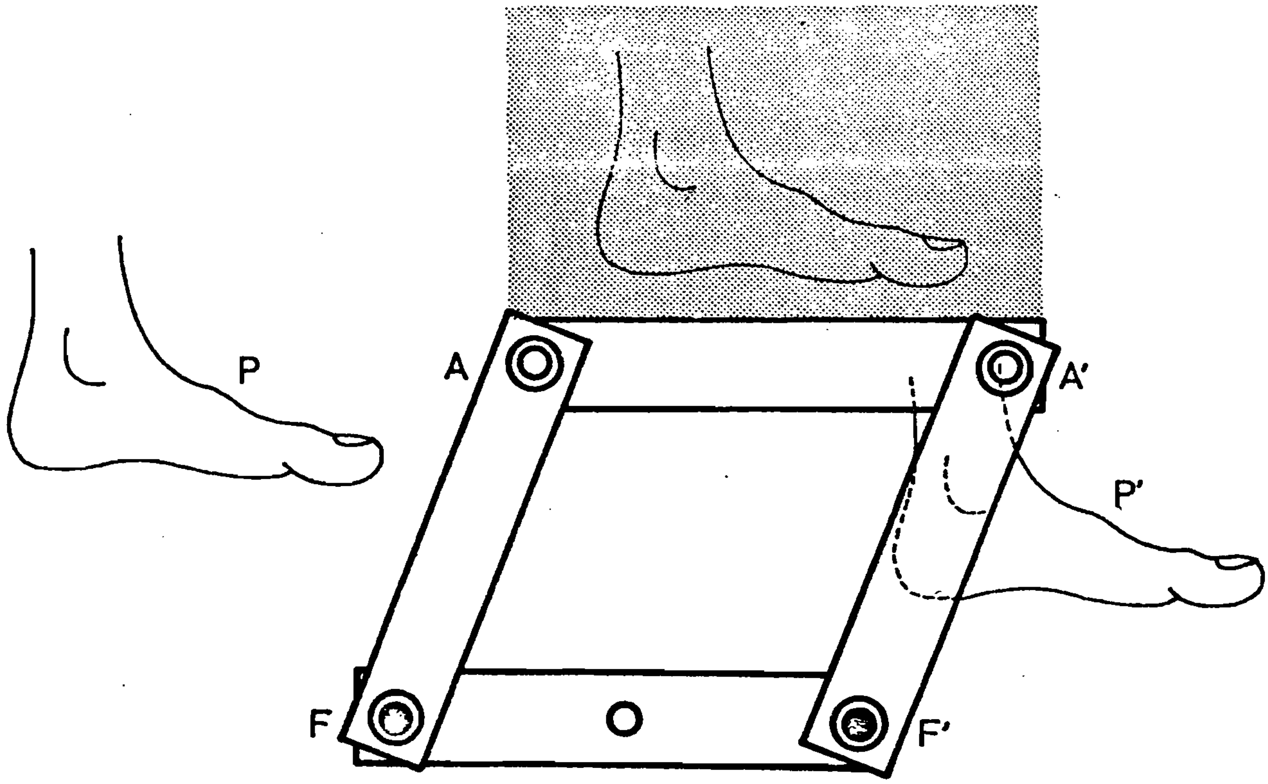
Le principe : Il est basé sur le retournement de la feuille transparente et permet de passer d'un point à son symétrique par rapport à l'axe AA′.

Le montage : Un carré de rhodoïd* est fixé sur la réglette puis FF′ est fixé sur le support. Le carré est plié le long de AA′ afin de réaliser le retournement avec précision.

* **Hors rétroprojecteur** : la réglette est en carton. Le carré en papier calque collé sous la réglette et cette dernière collée sur le support. La figure s'obtient par décalque sur la feuille support en intercalant un papier carbone entre cette feuille et le papier calque retourné le long de AA′.

Le traçage : Une figure étant tracée sur la feuille support, décalquez celle-ci sur le carré puis retournez ce carré pour obtenir par transparence la figure symétrique*.

TRANSLATEUR CURVILIGNE



Pour quoi faire : F et F′ étant fixés, le parallélogramme articulé permet de «transporter» toute figure dessinée sur une feuille support d'un endroit à un autre, et d'obtenir son image par une... translation.

Le principe : Basé sur le parallélogramme articulé AFF′A′ il permet de passer d'une position P à une position P′ par la translation du vecteur $\overrightarrow{PP'}$, chaque point d'écrivant une trajectoire curviligne qui est un arc de cercle de rayon FA = F′A′.

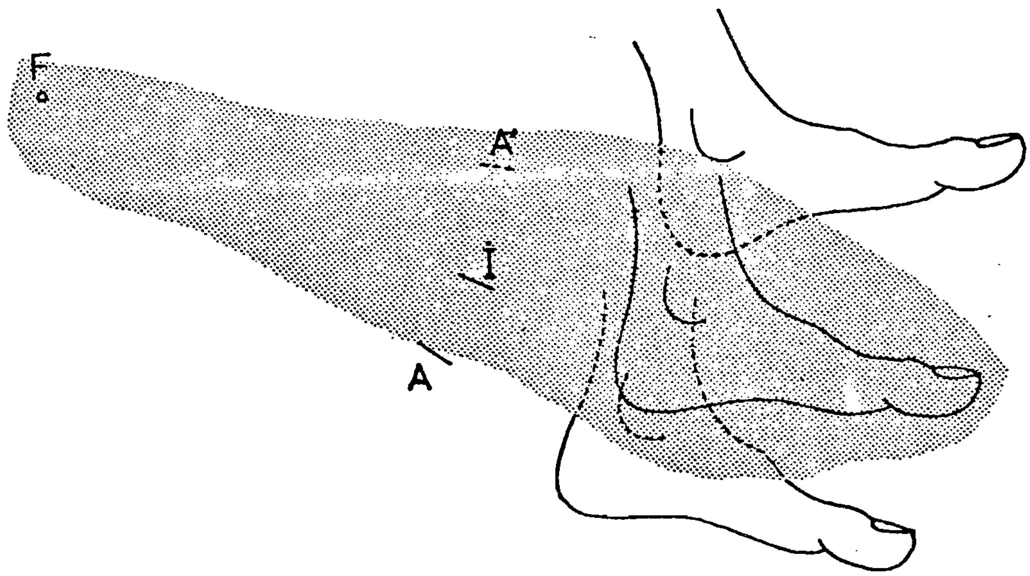
Le montage : Un parallélogramme articulé avec FA = F′A′ et FF′ = AA′ fixé en F et F′ au support. Sur la réglette AA′ fixez un carré de rhodoïd.

* **Problème à (se) poser** : comment construire l'image d'un point non situé sous le carré transparent ? Comment s'assurer que la construction est correcte ?

Le traçage : Superposer le carré transparent* à la figure de départ que l'on peut ainsi décalquer. Déplacer le carré transparent jusqu'à une position choisie et projeter les 2 figures.

Le problème : Après ce traçage d'une figure translatée comment construire l'image par cette translation d'un point qui ne peut être placé sous le carré glissant ? Comment s'assurer que la construction est correcte ?

ROTATEUR ET SYMETRISEUR CENTRAL



Pour quoi faire : A et A′ étant 2 arrêts fixés sur le support, lorsque la partie «Rh» pivote autour du point fixe F toute figure dessinée sur le support peut être transportée en un autre endroit par la rotation de centre F et d'angle θ choisi, rotation qui est une symétrie de centre F lorsque F est le milieu de AA′.

Le principe : Il est basé sur la rotation de la feuille transparente «Rh» autour du point fixe F qui lie cette feuille au support.

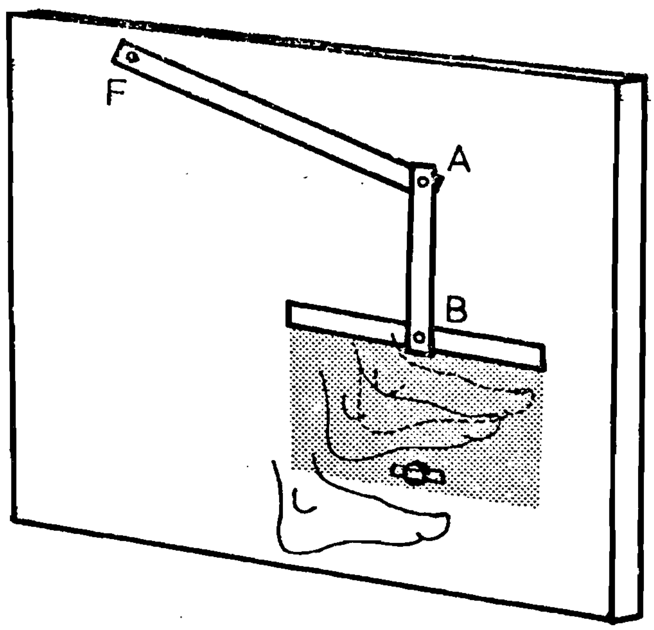
Le montage : Une feuille transparente découpée irrégulièrement est fixée au support en un point F. Sur cette feuille marquez un index I. Sur la feuille support, dans le prolongement de l'index, tracez deux traits A et A′ qui donneront l'angle AFA′ de la rotation lorsque l'index passera de la position A à la position A′.

* **Hors rétroprojecteur** : les trous seront fait sur les réglettes à l'aide d'une perforatrice. Les attaches seront, par exemple, parisiennes. Pour le reste papier calque et papier carbone.

Le traçage : Une figure étant dessinée sur le support sous la feuille transparente*, tournez cette feuille pour que l'index I soit en face du trait A. Décalquez la figure sur la feuille puis tournez la feuille pour que l'index vienne en regard du trait A'. Vous avez alors, au rétroprojecteur, 2 figures qui se déduisent l'une de l'autre par rotation.

Le problème : Comment tracer l'image par cette rotation d'un point du support qui ne peut être placé sous la feuille qui pivote ? Comment, s'assurer que la construction est correcte ?

GRANDE ROUE



Pour quoi faire ? : Lorsque le carré transparent et le support sont placés dans un plan vertical la double barre articulée FA/AB permet de transporter une figure d'une position à une autre et d'obtenir ainsi son image par une... ?

* **Hors rétroprojecteur** : la feuille de rhodoïd peut être remplacée par une feuille de papier calque reliée en F au support par une attache parisienne. Les arrêts A et A' peuvent être matérialisés par 2 petits morceaux de réglette en carton collés sur le support et l'index par un trait ou un morceau de carton dont on tiendra compte pour fixer l'angle AFA'.

Le principe : Il repose sur 3 éléments :

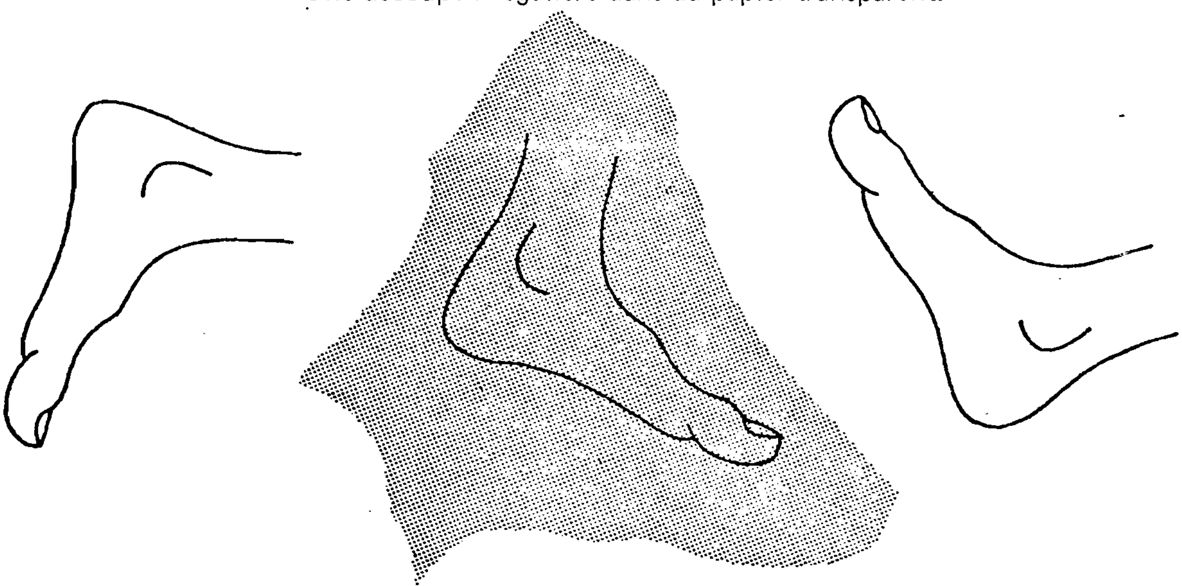
— la double barre articulée fixée en F en haut du support au milieu ou à gauche,
— le I est placé au bas du carré transparent,
— la position verticale qui va faire «tomber» le carré dans une position d'équilibre verticale.

Le montage : Une barre FA de 10 cm est fixée en F au support.
Une barre de 5 cm est reliée à la barre FA en A et à un carré transparent de 10 X 10 cm en B.
Ce carré est lesté en L par une masselotte (pièce de monnaie scotchée par exemple).

Le traçage : Une figure étant dessinée sur le support en maintenant la feuille support par le haut, on place le tout dans un plan vertical et en faisant tourner la barre on superpose le carré transparent qui reste dans une position verticale. Décalquez alors la figure sur le carré transparent puis laissez retomber le carré dans sa position d'équilibre. Vous avez alors deux figures qui se déduisent l'une de l'autre par une... ?

CHUTES ALEATOIRES*

Une découpe irrégulière dans du papier transparent.



Pour quoi faire : Par un déplacement aléatoire de cette découpe on «transporte» une figure donnée dessinée sur le support d'une position à une autre par une transformation à trouver.

* Voir à ce propos : Michel Darche : La géométrie des transformations : une approche par transport de figures. **In** : compte rendu du groupe Inter-IREM GREFFE, Lyon, mars 1983.

Le principe : Il repose sur l'aspect aléatoire de la chute d'une feuille de papier sur un support tout en «conservant» la figure.

Le montage : Il comprend tout simplement le support et une découpe de papier transparent servant à décalquer la figure de départ.

Le traçage : Une figure dessinée sur le support, décalquez-la sur la découpe, puis au choix :

— soulevez la découpe de 10 cm au-dessus du support et laissez retomber,
ou
— soulevez la découpe, retournez-la et laissez retomber.

Vous obtenez deux figures transformées l'une de l'autre par une isométrie qu'il vous reste à trouver (pensez à la tartine beurrée ou aux feuilles d'automne).

Le problème : Prendre un point sur le support tel que la figure et le point ne puissent être recouverts en même temps par la découpe. Comment construire l'image de ce point par l'isométrie définie par la chute aléatoire ?

UTILISATION DES TRANSFORMATEURS (8-10 séances).

1ère phase.

Chaque groupe de 3 ou 4 élèves construit les huit transformateurs à partir de modèles présentés au rétroprojecteur.

2ème phase.

Pour chaque transformation, le groupe choisit une figure de départ parmi les 12 distribuées (dessins réalisés avec un tangram et réduits), la découpe et la colle sur la feuille de canson où est fixée l'appareil.

3ème phase.

Toujours en groupes, utilisation de chaque transformateur pour calquer la figure de départ et tracer à l'aide d'un carbone la figure d'arrivée après le déplacement de l'appareil.

4ème phase.

Toujours en groupes :

a) regrouper, classer les transformateurs d'après leurs propriétés.

b) **Collectivement** : communication des critères de classement et analyse par le groupe-classe de leur pertinence.

5ème phase.

Individuel et **contrôle en groupes** :

— construction de l'image d'un point (choisi par le maître de telle sorte que l'élève ne puisse utiliser la feuille de papier calque). Les groupes sont mis en situation gratifiante, celui qui aura construit correctement le plus de points sera déclaré champion ;

— contrôle collectif par rétroprojecteur avec explication de la construction et validation par le maître à l'aide du grand papier calque.

6ème phase.

Institutionnalisation des propriétés caractéristiques de chaque transformation.

Ici le lecteur établira, j'en suis convaincu, le lien, l'analogie entre la démarche sur papier peint et l'utilisation des transformateurs. Ce matériel permet de dégager le concept général de transformation puisque l'élève est conduit à se débarasser de l'aspect physique et «parasite» du «transport» pour ne s'intéresser qu'à l'aspect mathématique du triplet (départ, transformation, arrivée) et c'est ce rejet qui permet de donner du sens à ce triplet.

ANALYSE DES PROCEDURES.

Nos remarques procèdent de 4 types de renseignements : la phase collective, les dessins et tracés des groupes, les notes manuscrites des élèves, les résultats des contrôles de sortie. Les élèves ont surtout travaillé sur les segments de liaison qu'ils ont spontanément tracés (voir en annexe).

Les propriété qui se sont très vite dégagées sont :

— le parallélisme des segments de liaison, l'égalité des distances pour les translations ;

— l'intersection des segments de liaison en leur milieu pour la symétrie centrale ;

— le parallélisme des segments de liaison pour la symétrie orthogonale.

Les autres propriétés ont été découvertes seulement par quelques groupes et leur prise en compte par toute la classe s'est faite pendant la phase collective et après vérification.

Très peu d'élèves ont constaté le parallélisme des segments homologues dans les translations et la symétrie centrale. L'isométrie des figures de départ et d'arrivée n'a pas été citée comme preuve. Après questionnement, il a été répondu que cela allait de soi puisqu'on avait utilisé un calque. Les élèves sont arrivés très vite à la conclusion que trois des huit transformations avaient les mêmes propriétés, mais n'ont pas admis le fait que cela caractérisait la même transformation. Il y avait problème. Les appareils étaient différents, leur maniement également et... pourtant... il a fallu se rendre à l'évidence en construisant l'image d'un point, de plusieurs points avec chacun de ces transformateurs. Certains groupes ont relevé des propriétés communes entre la rotation et la symétrie centrale et un groupe a assimilé la symétrie centrale à une rotation d'amplitude 180°.

Analysons maintenant les tracés proposés pour obtenir les transformés avec la règle, le compas et éventuellement l'équerre.

a) Translation.

— Définition de la translation par deux ou trois points et leurs transformés.

— En grande majorité, construction classique du parallélogramme.

— Pour quelques-uns, tracé de parallèles avec la règle et l'équerre, puis utilisation des égalités de distances entre les points et leurs images.

— Un groupe utilise la construction suivante :

> A partir du dessin découpé et collé, nous traçons des droites perpendiculaires à la bande motrice et parallèles entre elles. Chaque droite part d'un point de la figure. Ensuite, nous mesurons la distance de chaque perpendiculaire, du point jusqu'à la bande. Puis, nous mesurons la distance qui sépare chaque parallèle. Il ne reste plus qu'à reproduire le dessin un peu plus loin en traçant chaque parallèle de bonne mesure et perpendiculaire à la bande.

Coût de construction d'autant plus élevé que les dessins donnés sont formés uniquement de segments de droite.

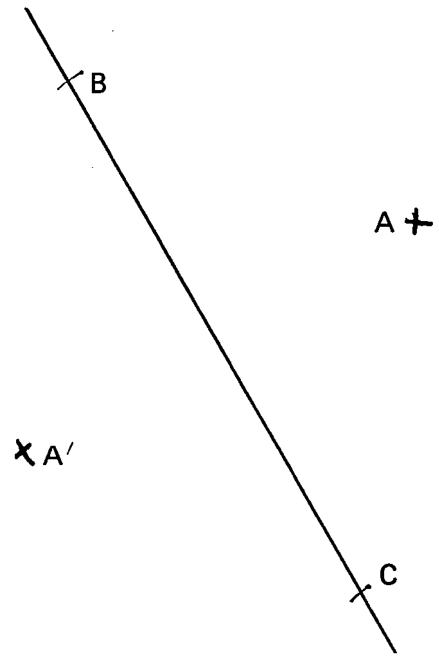
b) Symétrie centrale.

— Tracé du segment de liaison passant par le centre et utilisation du fait qu'il en est le milieu.

— Tracé d'un demi-cercle ayant son centre au centre de symétrie.

— Tracés des segments de liaison par référence à la translation (procédure vite abandonnée).

c) **Symétrie orthogonale.**



— Choix de deux points distincts sur l'axe BC, report de BA et CA avec le compas.

— Un groupe dit que la figure obtenue est à l'opposé de sa position initiale et conclut «c'est une bijection» sans pouvoir donner d'explication (note écrite).

d) **Rotation.**

— Tracé d'un arc de cercle et d'angles égaux à l'angle AOB avec le rapporteur (A et B deux points distincts de la figure de départ, O le centre de rotation).

— Beaucoup de tentatives infructueuses pour obtenir le transformé d'un point de la figure de départ. (Il est à noter que le rapporteur n'est pas un instrument privilégié).

— Assimilation de la rotation à la symétrie centrale.

Pour les deux transformations qualifiées d'aléatoires nombreux essais pour les «ranger» parmi les transformations décrites.

Malgré l'emploi des termes, départ, arrivée, points correspondants ou homologues, images, malgré l'aspect «relation» des transformations, aucun rapprochement n'a été fait avec le vocabulaire et l'étude des relations.

Dans la phase d'institutionnalisation, nous avons construit avec les élèves un tableau où toutes les propriétés de chacune des transformations étaient consignées. Nous avons alors introduit le vocabulaire mathématique adéquat et les notions d'application, de bijection ont été précisées.

Vous pouvez consulter en annexe les «tests» de contrôle et quelques productions d'élèves.

ETUDE ANALYTIQUE DES TRANSFORMATIONS.

Nous avons utilisé différents types de quadrillages que les élèves ont posés sur la feuille où ils avaient déterminé les images de 9 points fixés au préalable par une construction géométrique, qu'il s'agisse de la translation, des deux symétries ou de la rotation.

Consignes.

Les élèves travaillent individuellement.

1ère phase.

Placer convenablement son repère, puis calculer les coordonnées des 9 points donnés et les coordonnées de leurs images.

2ème phase.

Faire un tableau où vos calculs, vos remarques et vos conclusions seront écrits.

3ème phase.

Collectivement. Un élève va au tableau reproduire son travail, discussion générale, intervention du maître lors de la synthèse. Il a été relativement aisé pour les élèves de remarquer certains invariants propres à ces transformations et d'approcher leur forme analytique.

Remarque : nous avons dû aider bon nombre d'élèves à placer convenablement leur repère. La lecture des coordonnées s'est avérée difficile pour certains. (Problème d'unité sur les axes, de proportionnalité...).

4ème phase.

— Nous avons écrit au tableau plusieurs équations caractéristiques des transformations étudiées et donné les coordonnées de 7 points. Il s'agissait de trouver les coordonnées des images de ces 7 points au moyen des équations données.

— Ensuite nous avons demandé de placer ces points dans un repère orthonormé (pour plus de commodité) et les élèves devaient vérifier par construction que la figure de départ et la figure d'arrivée (obtenues en joignant les 7 points et leurs images) se correspondaient bien dans la transformation envisagée. Nous avons admis que les équations étaient bien représentatives des transformations étudiées.

Par la suite nous avons traité des problèmes où intervenaient les propriétés intrinsèques des transformations (raisonnements hypothético-déductifs et inductifs) et des problèmes utilisant leurs expressions analytiques.

Là, une pause....

UTILISATION D'UN TRANSFORMATEUR NUMERIQUE*.

1ère phase.

Reconnaître des transformations à partir de leur expression analytique donnée directement.

2ème phase.

Trouver l'expression analytique de transformations programmées sur la machine.

Pendant cette action peu d'élèves font une recherche systématique en accord avec les propriétés qu'ils connaissent. La plupart d'entre eux cherche «au hasard». Il a fallu discuter, clarifier, ordonner tout cela pour que tous abordent le problème avec perspicacité.

De là nous passons à la **notion de vecteurs.**

Nous définissons dans le plan des bi-points équipollents s'ils définissent la même translation et nous montrons que l'équipollence des bi-points est une relation d'équivalence, pour arriver à la notion de vecteur.

Ainsi, par définition, il existe une bijection entre l'ensemble des translations du plan et l'ensemble des vecteurs telle que l'on peut traduire en langage de vecteurs tout ce que l'on sait exprimer en langage des translations.

De là deux tableaux comparatifs sous élaborés pour montrer après leur étude que l'ensemble des translations muni de la loi $\circ$ et l'ensemble des vecteurs muni de la loi + sont deux groupes commutatifs.

A partir de cet instant, le cours se déroule d'une manière quasi-traditionnelle. Certes nous essayons de faire manipuler les élèves le plus possible pour qu'ils puissent faire et comprendre, en choisissant des situations d'apprentissage qui nous semblent les plus adéquates.

Notre travail peut s'affiner et nous croyons que l'on peut dans une large mesure, dans cet optique, couvrir une grande partie des programmes de 4ème et 3ème. (Quadrilatères, fonctions numériques...).

Et si nous voulons trouver **des prolongements**, voici quelques exemples de situations.

10-13 ans : — frises avec règles
— géo-plans (planches à clous)

* Notre transformateur est une HP 29.

— aires et volumes d'objets divers
— motifs répétitifs

11-15 ans : — constructions programmées de figures (LOGO)
— trouver les fonctions $\mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$
— le triangle de Pascal modulo 2, 3, 4

15-17 ans : — suites de figures
— calculs d'aires
— déformation de polygones, mais fractales

Mais la recherche d'une situation d'apprentissage n'est pas chose facile...

Toutefois nous croyons qu'elle doit obéir aux critères suivants :

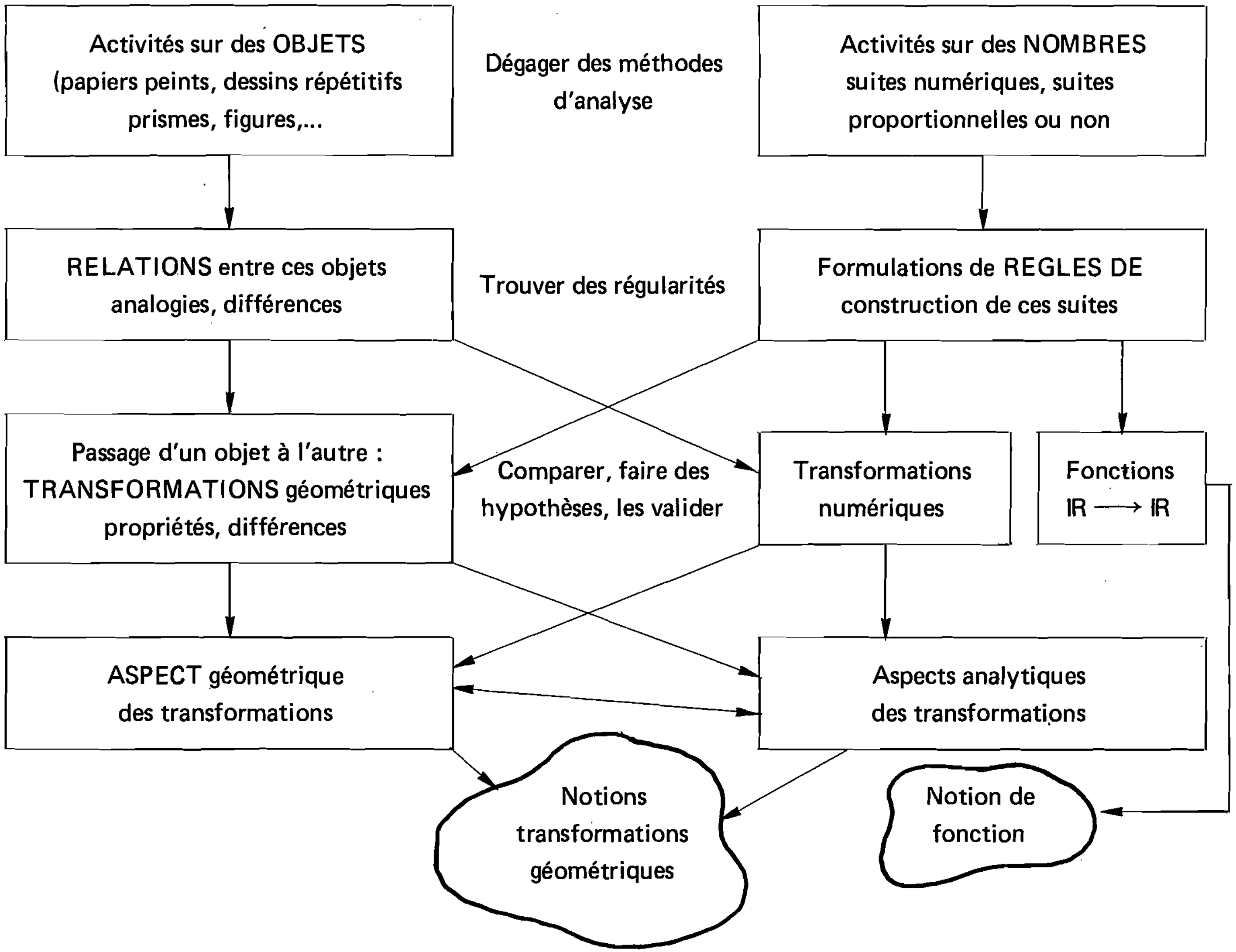
— que chaque élève puisse **manipuler**, avoir une **action** sur cette situation ;
— qu'il puisse **s'investir** quelque soit ses connaissances ;
— que soit mises en **conflit** situation et représentation de cette situation ;
— permettre de formuler des **hypothèses** et de les **valider** ;
— accroitre la **circulation** de l'information entre les participants, et entre les participants et la situation ;
— qu'elle soit centrée sur les notions... fondamentales en mathématique.

Actuellement, alors que la réforme des collèges est en gestation, des équipes de professeurs peuvent se grouper autour d'un projet commun, où à l'intérieur d'un projet d'établissement, et promouvoir de telles activités.

Je vous ai communiqué notre travail, nos perspectives, nos espoirs, nos convictions dans un souci de communication, de dialogue entre collègues et aussi d'efficacité.

Références.

Le Pape, Métregiste et Piellot *bulletin n° 11,* IREM d'Orléans.
M. Darche, La géométrie des transformations, *séminaire du GREFFE.*
R. Gras (1983) Instrumentation de notions mathématiques : la symétrie, *petit x n° 1,* pp. 7 à 39.
*** Systèmes articulés, *Plot matériel n° 1,* IREM d'Orléans.


Activités sur des OBJETS
(papiers peints, dessins répétitifs
prismes, figures,...
Dégager des méthodes
d'analyse
Activités sur des NOMBRES
suites numériques, suites
proportionnelles ou non
RELATIONS entre ces objets
analogies, différences
Trouver des régularités
Formulations de REGLES DE
construction de ces suites
Passage d'un objet à l'autre :
TRANSFORMATIONS géométriques
propriétés, différences
Comparer, faire des
hypothèses, les valider
Transformations
numériques
Fonctions
IR ⟶ IR
ASPECT géométrique
des transformations
Aspects analytiques
des transformations
Notions
transformations
géométriques
Notion de
fonction

ETUDE STATISTIQUE DES RESULTATS AUX CONTROLES DE SORTIE

Population concernée : 70 élèves de quatrième.

1. Construction du transformé (translaté, symétriques central et axial).

41 sur 70	59 %	ont réussi parfaitement les trois constructions.
22 sur 70	31 %	ont réussi parfaitement deux 2 constructions et fait une erreur sur la 3ème. (1 ou 2 transformés mal placés).
7 sur 70	10 %	ont réussi parfaitement une construction (la symétrie centrale) et échoué partiellement ou complétement sur les deux autres.

2. Capacité d'exprimer verbalement cette construction.

(capacité de communiquer un procédé).

35 sur 70	50 %	lecture claire pour le correcteur.
13 sur 70	19 %	des imprécisions n'affectant pas la démarche globale.
12 sur 70	17 %	quelques incohérences.
10 sur 70	14 %	incohérent ou pas de réponse.

3. Inventaire des propriétés de la figure obtenue.

Figure obtenue : figure de départ, figure d'arrivée, segment de liaison.

Propriétés : égalité de mesures de distance, de mesures d'angle, alignement, parallélisme, perpendicularité.

3 groupes	A) inventaire complet ou presque complet	26 sur 70 ou 37 %
	B) moyen	18 sur 70 ou 26 %
	C) nul ou très incomplet	26 sur 70 ou 37 %

4. Inventaire des propriétés des transformations.

Propriétés : isométries, parallélisme, perpendicularité, égalité de mesures d'angles regroupées suivant la nature des segments et des droites (figures de départ ou d'arrivée, éléments de liaison).

3 groupes	A) inventaire complet ou presque complet	26 sur 70 ou 37 %
	B) moyen	18 sur 70 ou 26 %
	C) nul ou très incomplet	26 sur 70 ou 37 %

5. Très peu d'élèves ont fait la relation entre les propriétés de la figure et celles de la transformation concernée et de façon très imparfaite : 6 sur 70 8 %.

6. Analyse du quatrième contrôle.

a) 53 sur 70 76 % ont reconnu 4, 5 ou les 6 transformations. Tous les élèves ont reconnu la translation dans 1 et 4.

b) **Définition des transformations.**

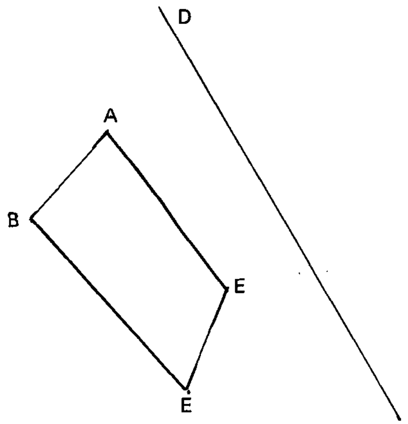
(un point et son image pour les translations).
Le centre pour la symétrie centrale.
L'axe pour la symétrie orthogonale.
Le centre et l'amplitude pour la rotation.

7 sur 70	10 %	ont défini 5 ou 6 des 6 transformations.
17 sur 70	24 %	ont défini 4 des 6 transformations.
7 sur 70	10 %	ont défini 3 des 6 transformations.
25 sur 70	36 %	ont défini 2 des 6 transformations.
14 sur 70	20 %	ont défini 1 ou 0 des 6 transformations.

c) **Justification des transformations.**

21 sur 70	30 %	ont justifié correctement leur choix.
20 sur 70	29 %	l'ont justifié très imparfaitement.
19 sur 70	41 %	n'ont rien justifié de manière correcte.

TEST DE CONTROLE ET PRODUCTIONS DE QUELQUES ELEVES



Soit $\mathcal{S}$ la symétrie orthogonale d'axe D.

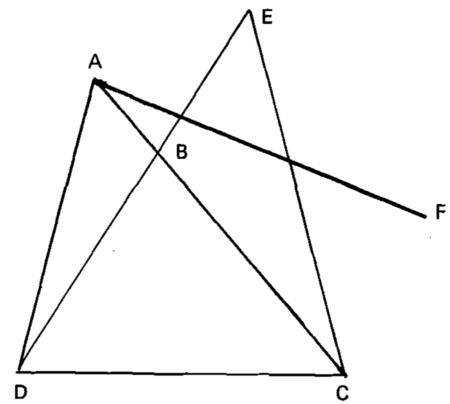
1) Construis les symétriques A′, B′, C′, D′, des points A, B, C, D.

2) Décris la construction et indique les propriétés de la symétrie orthogonale que tu utilises.

3) Indique toutes les propriétés de la figure achevée

- égalité de distances et de mesures d'angles,
- parallélisme et perpendicularité,
- nature des quadrilatères, des triangles, etc...

en précisant à quelles propriétés de la symétrie orthogonale elles correspondent.



Soit la translation $\mathcal{T}$ qui transforme le point A en F. (F est l'image de A ou F = $\mathcal{T}$(A)).

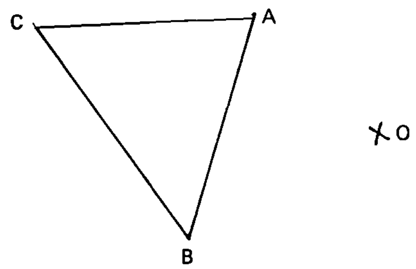
1) Construis les translatés B′, C′, D′, E′ des points B, C, D, E.

2) Décris ta construction et indique les propriétés de la translation que tu utilises.

3) Indique toutes les propriétés de la figure achevée :

- égalité de distances et de mesures d'angle,
- parallélisme et perpendicularité,
- nature des quadrilatères, etc...

en précisant à quelles propriétés de la translation elles correspondent.



Soit $\mathcal{S}$ la symétrie de centre O.

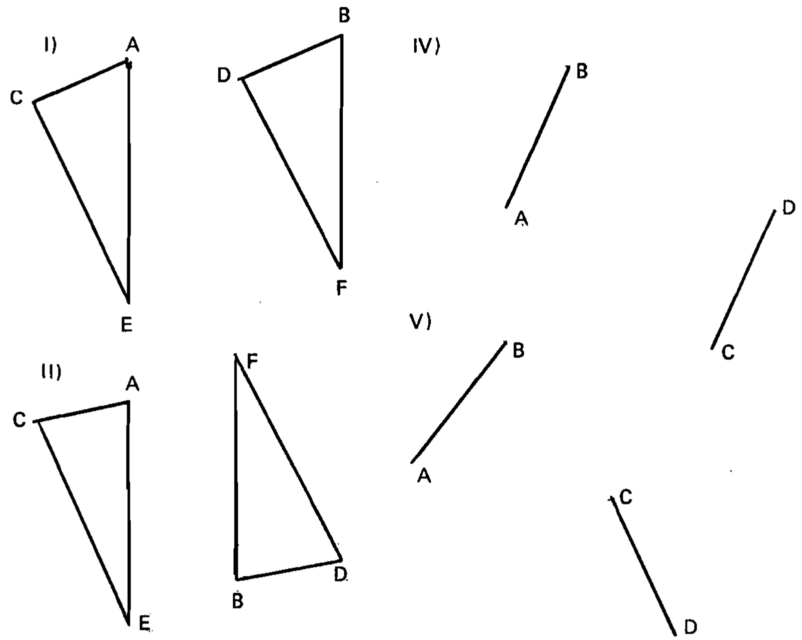
1) Construis les symétriques A′, B′, C′ des points A, B, C.

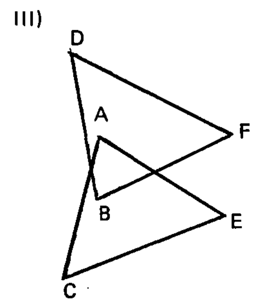
2) Décris ta construction et indique les propriétés de la symétrie centrale que tu utilises.

3) Indique toutes les propriétés de la figure achevée :

- égalité de distances et de mesures d'angles,
- parallélisme et perpendicularité,
- nature des quadrilatères, etc...

en précisant à quelles propriétés de la symétrie centrale elles correspondent.





Trouve la ou les transformations qui permettent de passer de

A ⟶ B
C ⟶ D dans I, II, III
E ⟶ F

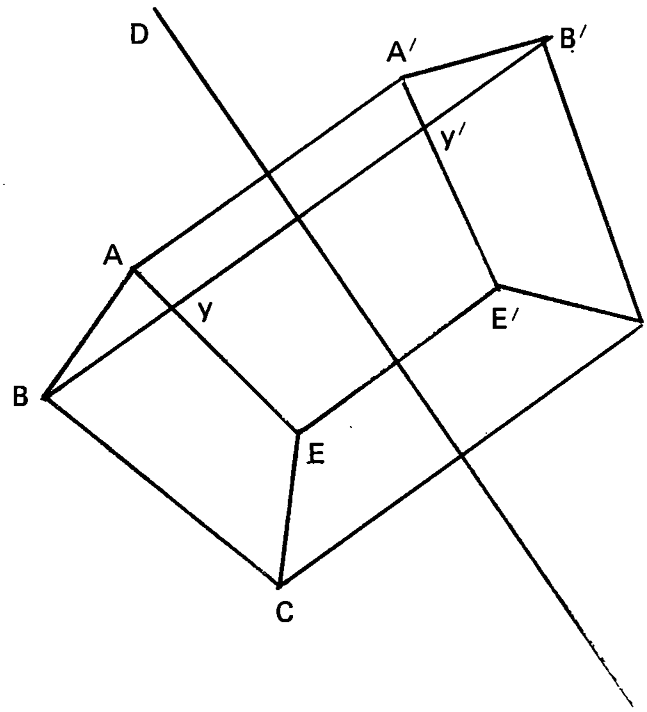
et des segments [AB] aux segments [CD] dans IV et V.

Justifie tes choix.

Remarque.

Si c'est une translation, donne 2 points correspondants.
Si c'est une symétrie, indique son centre ou son axe.
Si c'est une rotation, indique son centre et la mesure de l'angle de rotation.

QUELQUES REPONSES D'ELEVES



2) J'ai tracé, avec l'équerre, les droites de liaisons perpendiculaires à l'axe de symétrie D en passant par A, B, C, E. En pointant sur l'axe D j'ai pris l'écartement D-A ; même chose pour B, C, E, je l'ai reporté de l'autre côté de l'axe en faisant la même chose pour les 3 autres points. J'ai lié les 4 points pour former la figure.

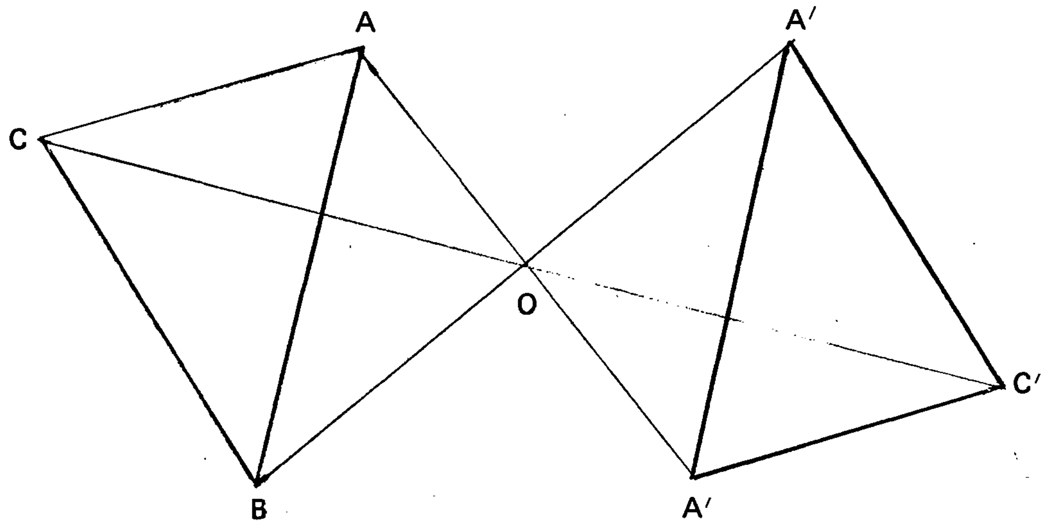
3) Les droites de liaisons sont coupées en leur milieu par l'axe D.
Elles sont perpendiculaires à cet axe.
Elles sont parallèles entre elles.
Si on prolonge les segments de droites de la figure ils se coupent sur l'axe de symétrie D.

Quadrilatères.

A-B-C-E
A'-B'-C'-E'
A-A'-B-B'
C-C'-E-E' etc...

Triangles.

A-B-Y
A'-B'-Y'



2) J'ai mis la pointe de mon compas sur le point O, j'ai pris la distance de A à O et j'ai tracé la droite partant de A, passant par O et coupant le cercle de A. J'ai pris l'intersection de la droite et du cercle et j'ai trouvé le point A′. J'ai fait ainsi pour les autres points.

Pour faire cette transformation, j'utilise la propriété de distance et les droites.

3) Toutes les droites de liaison se coupent en un point O.
O est l'axe de symétrie.
La figure de départ est parallèle à la figure d'arrivée.

Exemple.

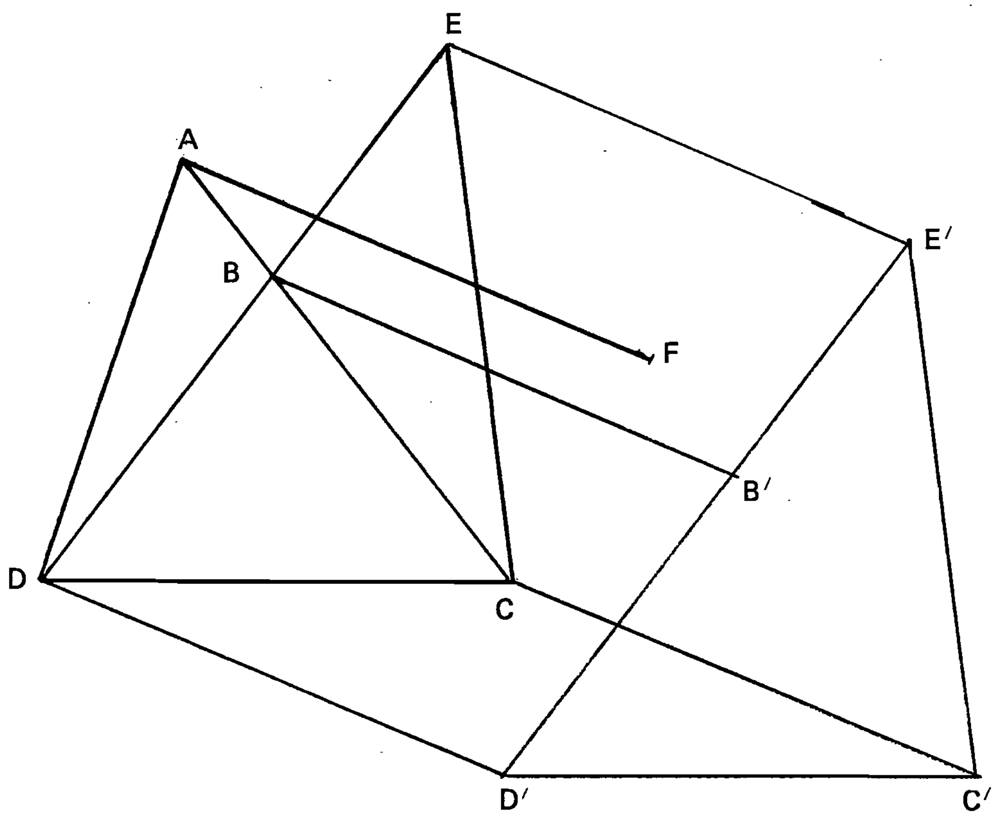
(AB) est // à (A′B′)
(BC) est // à (B′C′)
(CA) est // à (C′A′)

O est le milieu des droites de liaison.
Les droites de la figure de départ sont isométriques aux droites de la figure d'arrivée.

Exemple.

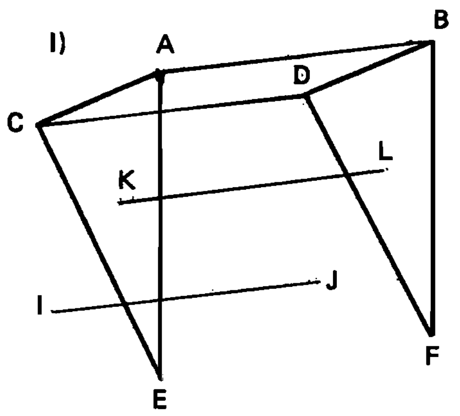
AB est isométrique à A′B′
BC est isométrique à B′C′
CA est isométrique à C′A′

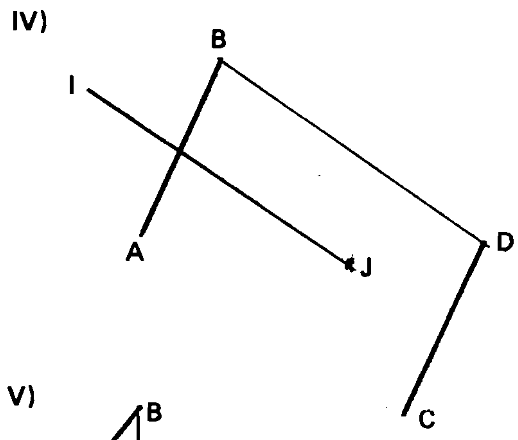
L'angle $\widehat{ABC}$ a même mesure que l'angle $\widehat{A'B'C'}$ / ABC et A′B′C′ = 55°.
La droite AB est // à la droite A′B′.

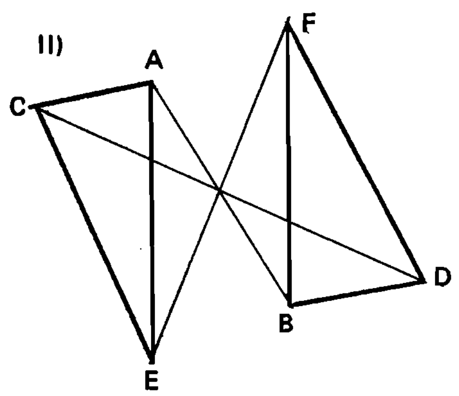


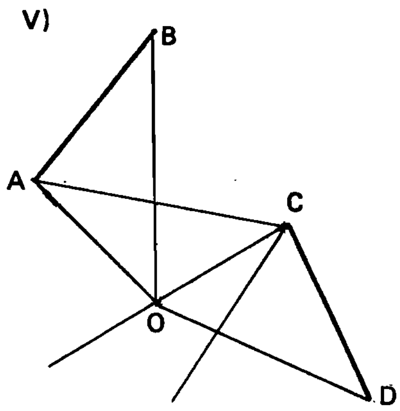
Les droites de liaisons sont parallèles et sont isométriques.

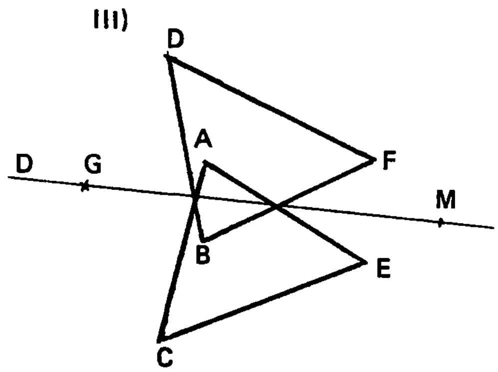
Les points correspondants sont à égale distance d'un point à son image. Il y a une bijection entre les 2 figures... c'est-à-dire qu'il part une droite de chaque point d'arrivée à leur point correspondant. On retrouve le même angle de la 1ère figure sur son image.











I. C'est une translation rectiligne parce que les droites de liaison sont parallèles. Elles sont isométriques.

II. C'est une symétrie centrale parce que toutes les droites de liaison sont concourantes. Les points correspondants sont à égale distance du centre de symétrie.

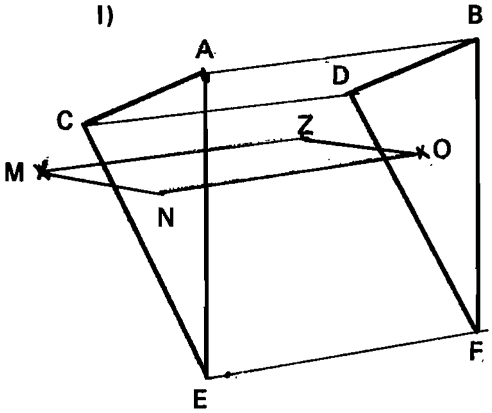
III. C'est une symétrie orthogonale parce que les droites de liaison sont parallèles, se coupent en leur milieu par la droite D qui est la médiatrice et 2 points invariants pour refaire la figure.

IV. C'est une translation parce que les droites de liaison sont parallèles. Elles sont isométriques.

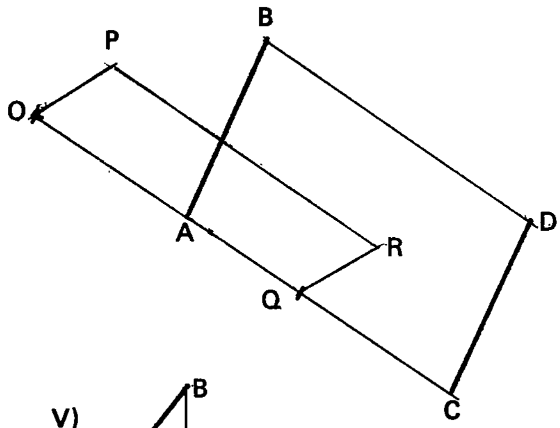
V. C'est une rotation.

J'ai tracé la droite de liaison A-C. J'ai mesuré l'angle $\widehat{BAC} = 68°$. Je l'ai reporté sur (DC) et j'ai trouvé une [CM). J'ai pris la bissectrice de $\widehat{MCA}$ et j'ai trouvé la droite N. J'ai pris l'angle $\widehat{DCN}$ que j'ai reporté sur [BA] et j'ai trouvé [AP). J'ai trouvé une intersection entre AP et CN que j'ai appelé «0» c'est le centre de rotation.

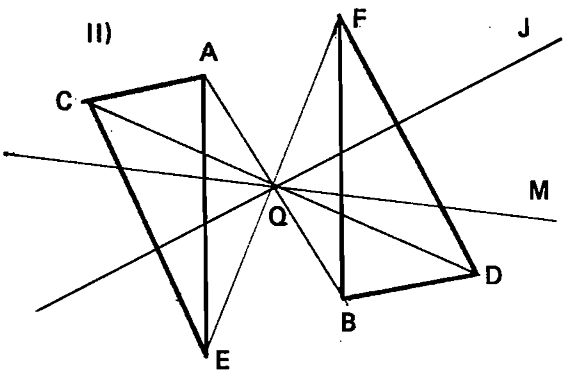
I)



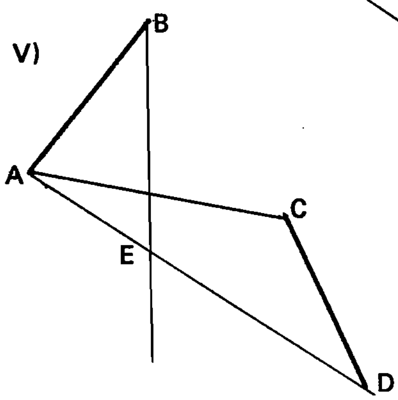
IV)



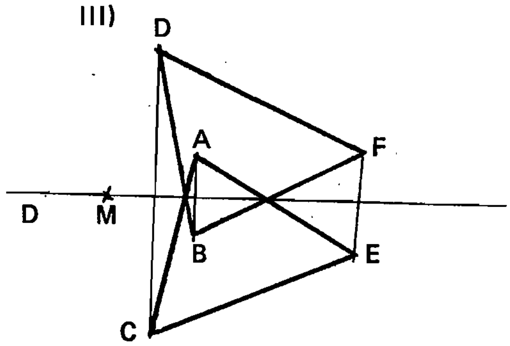
II)



V)



III)



I. Translation.

C'est une translation parce que les droites de liaison sont ; //.

A ⟶ B
C ⟶ D
E ⟶ F
M ⟶ Z
N ⟶ O

II. Symétrie centrale.

Parce que toutes les droites de liaison se coupent en un point Q, elles sont concourantes. Les points correspondants sont à égale distance du point Q.

A ⟶ B
C ⟶ D
E ⟶ F
G ⟶ H
I ⟶ J

III Symétrie orthogonale.

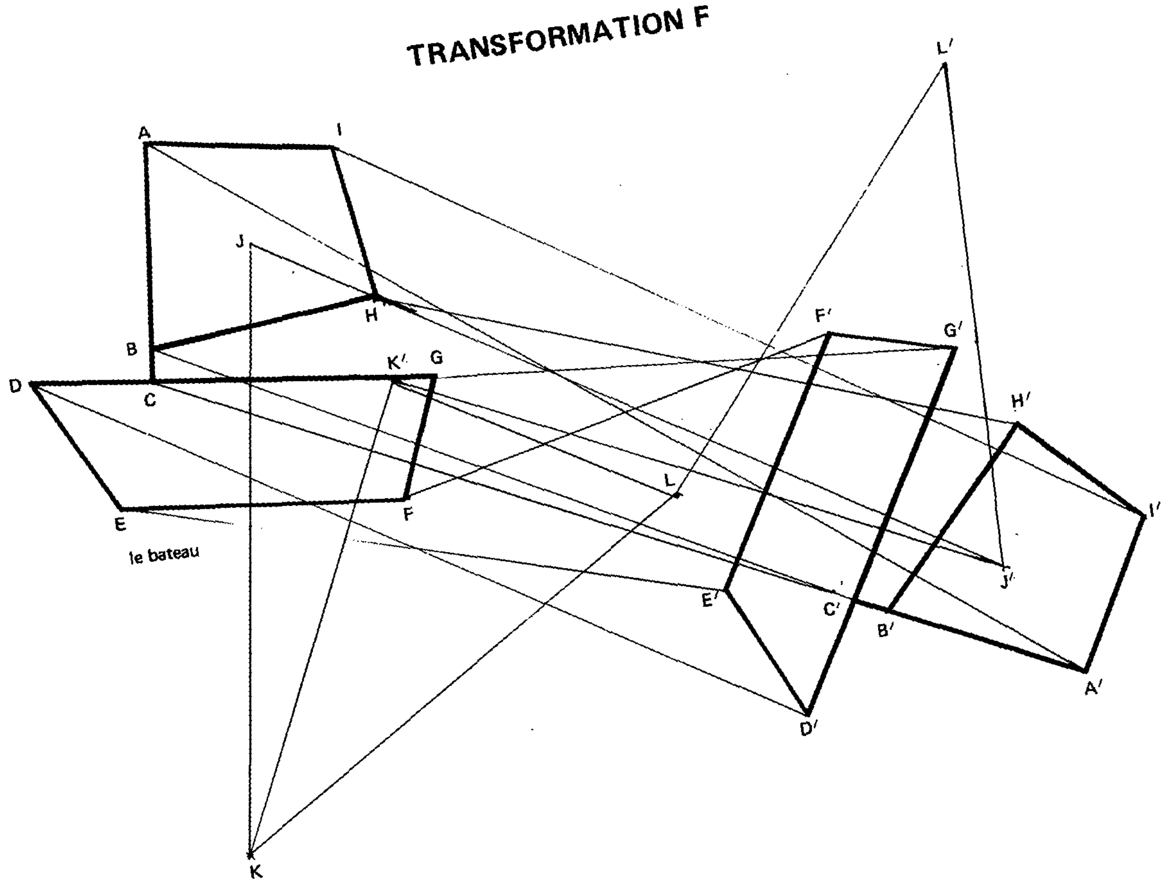
C'est une symétrie orthogonale parce que les droites de liaison sont perpendiculaires à l'axe D.

A ⟶ B
C ⟶ D
E ⟶ F

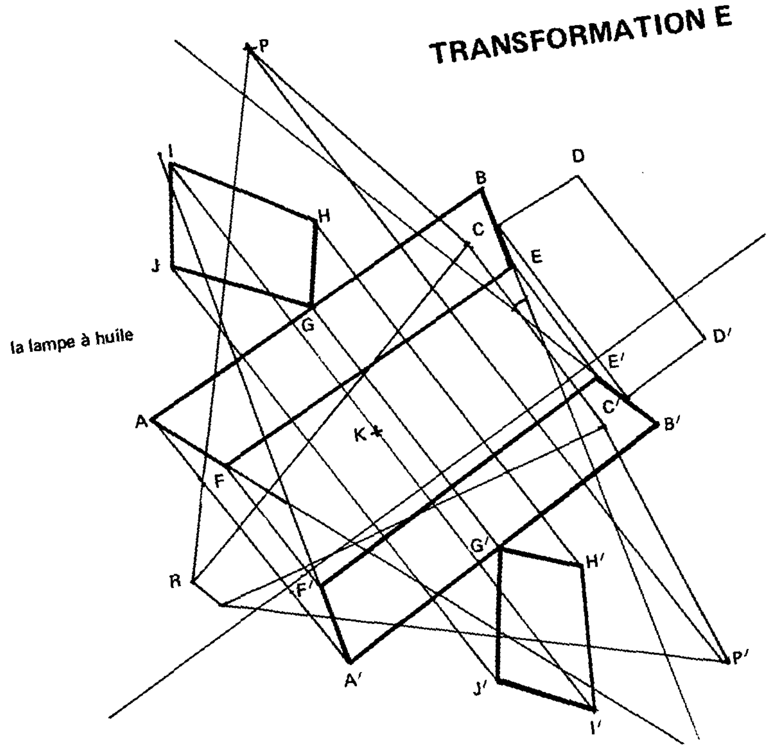
IV Translation.

C'est une translation parce que les droites de liaison sont isométriques ; //.

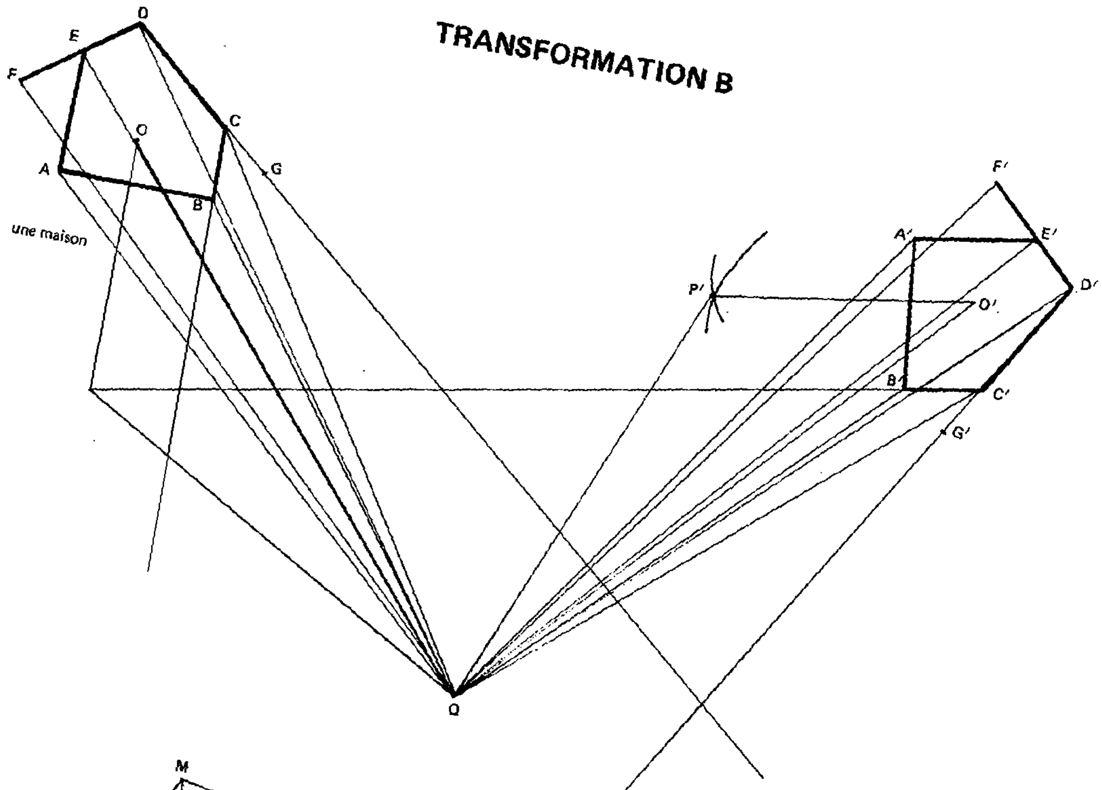
TRANSFORMATION F



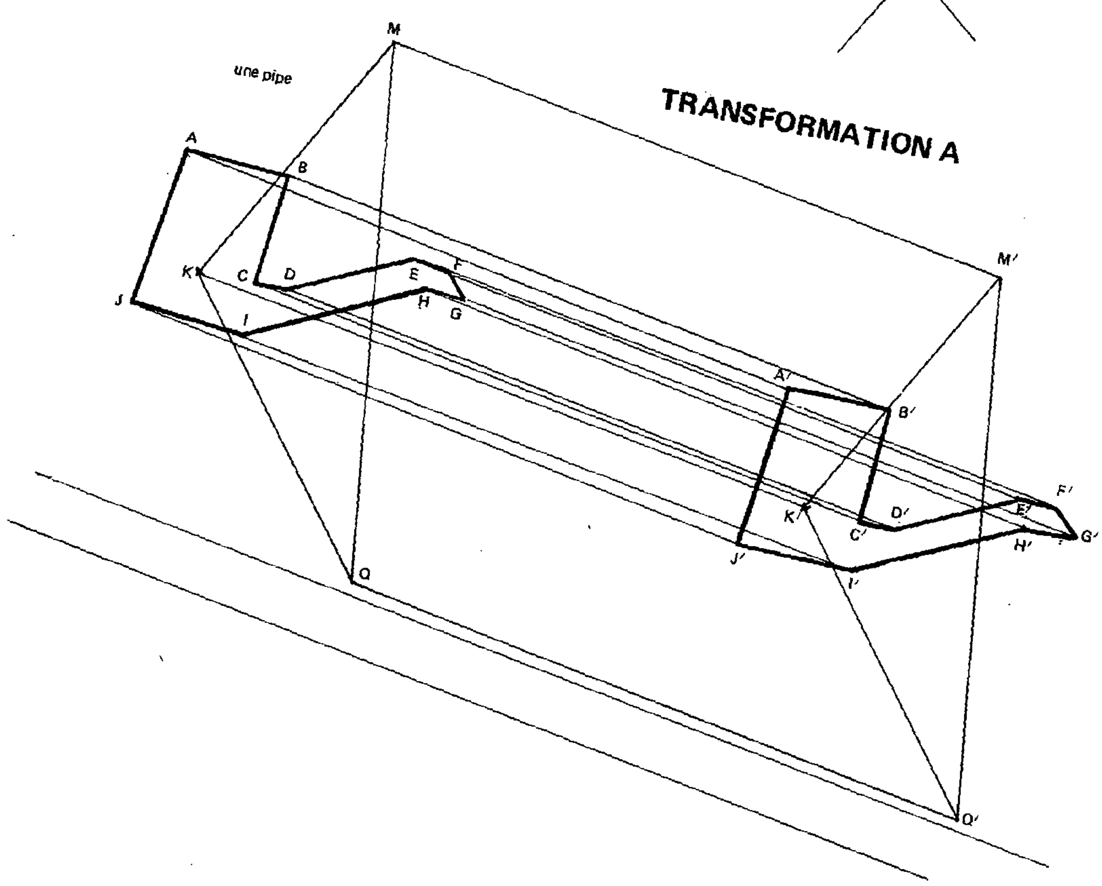
TRANSFORMATION E



TRANSFORMATION B



TRANSFORMATION A



TRANSFORMATION H