APPRENTISSAGE DE LA DEMONSTRATION (1)

(géométrie de 4ème)

Dominique GAUD
Ecole Normale, Poitiers
Jean-Paul GUICHARD
Lycée Ernest Pérochon, Parthenay

I – DES CONSTATS.

Ce qui a motivé notre recherche de nouvelles stratégies d'enseignement c'est surtout un constat d'échec global en ce qui concerne la capacité pour les élèves de 4ème de mettre en forme une démonstration en particulier en géométrie. Il nous semblait qu'il y avait sur ce point un consensus pour un grand nombre d'enseignants de mathématiques en 4ème(2). D'ailleurs, côté élève, la situation était aussi très mal vécue et il était difficile de fermer les yeux lorsque, par exemple, à la rentrée, les élèves de 3ème s'intérrogeant sur le «programme», posaient toujours les questions : «Est-ce qu'on va encore faire de la géométrie ? Est-ce qu'il y aura encore des démonstrations ?» Et les réactions à la réponse donnée en disaient long... Pourquoi ce blocage ? Tentons quelques explications. D'abord fait-on un réel apprentissage de la démonstration ? Tout apprentissage demande temps, méthodes, répétitions. Ces trois phases se retrouvent en algèbre. Par exemple à propos des identités remarquables ou des opérations sur les rationnels le schéma est souvent le suivant :

— méthode (pour développer ou pour additionner et multiplier),

— l'élève applique, on lui fournit pour cela une batterie d'exercices d'un même type.

En géométrie on est bien souvent loin de cette démarche : le maître réexpose de manière axiomatique les propriétés des figures, que les élèves connaissent déjà.

(1) NdlR : le travail dont il est rendu compte dans cet article a fait l'objet d'une publication de l'IREM de Poitiers, D. GAUD et J.P. GUICHARD, «Pour apprendre à démontrer», juin 1983.

(2) Ce que confirme le «succés» des stages «Apprentissage de la démonstration en géométrie de 4ème» proposés par l'IREM de Poitiers depuis 2 ans.

Les élèves ne comprennent pas cette étrange révision. Qu'apporte alors l'exposé axiomatique ?

— Puisque le maître expose, le temps d'apprentissage des élèves est réduit : comparez ce temps d'apprentissage avec celui de l'algèbre.

— Beaucoup de «théorèmes» ou résultats démontrés dans le cours de géométrie ne sont pas opérationnels. On ne les utilise pas au niveau des exercices dans les démonstrations. Or ces théorèmes ont le même statut logique que ceux que l'on utilise. Les élèves s'y retrouvent-ils ? (Par exemple : une droite partage le plan en deux demi-plans, ou un demi-plan est convexe...).

— On ne donne pas de méthode aux élèves pour résoudre les problèmes (par exemple pour démontrer que des points sont alignés). Combien l'élève fait-il d'exercice utilisant une même méthode ?

II – CE DONT IL EST QUESTION.

Notre travail sur l'apprentissage de la démonstration ne porte pas principalement sur l'initiation au raisonnement[3] ou sur la démonstration comme outil de preuve[4], mais essentiellement sur la démonstration en tant que formulation d'un raisonnement déductif. Il s'agit d'apprendre à l'élève à rédiger de courtes démonstrations (2 ou 3 déductions), d'apprendre à une majorité d'élève à bien répondre à la question «Démontre que...» c'est-à-dire à produire le discours déductif attendu du professeur. Transposition didactique ? Peut-être, mais à travers cet apprentissage est visé l'apprentissage d'une méthode : raisonner par conditions suffisantes en faisant des choix raisonnés au vu des données.

Méthode (embryon d'heuristique ?) réexportable dans d'autres parties des mathématiques et d'autres matières.

III – NOS HYPOTHESES.

1. Les raisonnements «sophistiqués» (démonstration par l'absurde, contraposition...) sont inaccessibles dans un premier temps. Nous nous limiterons donc à la démonstration déductive.

2. La difficulté d'une démonstration dépend de deux variables au moins : le nombre de déductions élémentaires et le nombre d'énoncés mis en jeu (définition,

(3) Voir l'article «Les Cosmonautes», M. LEGRAND, 1983, petit x n° 1.

(4) Voir «Preuve et démonstration en mathématiques au collège», N. BALACHEFF, 1982, Recherches en Didactique des Mathématiques, Vol. 3 n° 3.

axiome ou théorème). Il est donc important de connaître la valeur de ces variables pour chaque exercice posé.

3. La difficulté d'une démonstration est double : logique et rédactionnelle il est donc bon de séparer les deux moments au niveau de l'apprentissage.

4. L'important, en géométrie de 4ème, c'est la méthode. Donc le choix des exercices doit être guidé par les méthodes mises en jeu (comment démontrer que...). Ces méthodes varient suivant le type de géométrie considérée (géométrie synthétique, géométrie des transformations, géométrie vectorielle, géométrie analytique).

5. L'appropriation des concepts et des méthodes est distincte de l'ordre logique de l'exposition. Tout point de départ semble donc possible.

6. Démontrer cela s'apprend : ce n'est pas le résultat d'un «Euréka» pour grosse tête, c'est le fruit d'une méthode bien conduite.

7. L'élève apprend en faisant et non en regardant faire. Il faut donc privilégier la résolution d'exercices et de problèmes.

8. Il n'y a pas la rigueur, mais plusieurs niveaux de rigueur qui sont fonctions du type de discours tenu et du cadre dans lequel on se situe.

9. Il n'y a rien de facile ou d'évident pour l'élève. Ne lui complique-t-on pas souvent inutilement la tâche ?[5].

IV – NOTRE TRAVAIL : INGENIERIE DIDACTIQUE ?

Dans un premier temps nous nous limitons à la géométrie des figures (ou géométrie synthétique).

Nous découpons alors le programme de 4ème en un petit nombre de notions ou un petit nombre de méthodes.

Par exemple :

– pour les notions : parallèle - parallélogramme, orthogonalité - rectangle, médiatrice, losange.

(5) Rappelons ces mots d'Evariste Galois : «d'où vient cette malheureuse habitude de compliquer les questions de difficultés artificielles ? Croit-on donc que la science est trop facile ?». Lettre sur l'enseignement des sciences, Gazette des Ecoles, 2 janvier 1832. (Cf. aussi «Ecrits et Mémoires Mathématiques d'E. Galois», Bourgne et Azra, 1962, Gauthier-Villars, pp. 21-25).

— pour les méthodes : comment démontrer que :

- deux droites sont parallèles,
- un quadrilatère est un parallélogramme,
- un point est milieu d'un segment,
- trois points sont alignés,
- un quadrilatère est un rectangle,
- deux droites sont perpendiculaires,
- un quadrilatère est un losange,
- deux distances sont égales,
- ...

Ensuite sur chaque notion ou sur chaque méthode nous délimitons un stock d'énoncés (entre 1 et 5) : ce sont ceux qui nous semblent les plus opérationnels c'est-à-dire ceux que l'on rencontre le plus souvent dans les exercices.

Puis nous cherchons un «grand» (entre 8 et 15) nombre d'exercices utilisant ces énoncés. En fait il y a une dialectique entre ces deux phases : la recherche d'exercices amène à enrichir ou appauvrir le stock de départ, et la constitution du stock peut provenir de la recherche d'exercices sur la notion ou la méthode.

Nous décortiquons ces exercices (sous forme «d'organigrammes») pour mettre à jour pour chacun d'eux :

— le nombre de déductions élémentaires,
— le nombre et le nom des énoncés utilisés.

Ce qui permet un classement de ces exercices relativement à leur complexité formelle.

Ensuite nous rédigeons à partir de là une fiche élève comportant :

— les énoncés à utiliser,
— les exercices.

Voir un exemple du travail professeur sur la notion parallèle-parallélogramme en annexe I et un exemple de la fiche élève correspondante en annexe II.

V – SUR LE TERRAIN : MISE EN SITUATION.

1. La phase préliminaire est une sensibilisation au travail qui va être demandé. Cette phase peut présenter plusieurs formes qui ne sont pas nécessairement incompatibles.

Soit il s'agit d'activités propres à instiller le doute et à montrer que :

— voir sur une figure,
— mesurer ou vérifier avec des instruments de dessin

ne suffit pas à justifier ce que l'on dit. (Voir «pour apprendre à démontrer» IREM de Poitiers, partie III).

Il faut alors donner les «raisons» et pour cela utiliser les propriétés connues dont on dressera la liste au fur et à mesure. Dans ce cas on vise la démonstration comme outil de preuve.

Soit il s'agit d'activités destinées à montrer le fonctionnement d'énoncés mathématiques connus à partir d'un puzzle fabriqué et effectivement manipulé par les élèves et donc d'initier ainsi à la règle du jeu. (Voir un exemple en annexe III).

2. Ensuite une première fiche (énoncés-exercices) sur un thème est distribuée aux élèves (voir par exemple la fiche de l'annexe II). Les énoncés et notions sont en général connus des élèves (vus en 6ème-5ème). Si ce n'est pas le cas (par exemple l'énoncé P_2 pour la fiche de l'annexe II) l'énoncé nouveau est introduit : il s'agit de lui donner le même statut qu'aux autres, c'est-à-dire celui d'un énoncé vrai. On explicite alors le contrat : ces énoncés sont les seuls outils disponibles pour répondre aux questions posées.

3. Chaque énoncé de la fiche est analysé sous un angle méthodologique (voir début de l'annexe I) , que permet-il de prouver ? Et pour prouver cela que faut-il savoir ? Ce qui permet à chaque élève de mettre en place un fichier méthodologique.

Par exemple pour la fiche donnée en annexe II sur parallèle-parallélogramme on créera les deux première fiches sur le modèle :

Fiche 1 : PARALLELOGRAMME.

Comment démontrer qu'un quadrilatère est un parallélogramme ?

Méthode 1 :

Méthode 2 :

Fiche 2 : PARALLELES.

Comment démontrer que deux droites sont parallèles ?

Méthode 1 :

Méthode 2 :

Méthode 3 :

Ce fichier constitué sur des fiches cartonnées, classables par ordre alphabétique, est complété au fil de l'année et utilisé lors des exercices et devoirs.

4. Avant de passer à autre chose ou à une autre fiche de travail, les élèves sont soumis à un contrôle écrit consistant en deux ou trois exercices du même type pour chacun desquels chaque phase est prise en compte. (Voir en annexe IV le devoir de contrôle numéro 1 après le travail sur la fiche donnée en annexe II. Voir en annexe V le premier devoir de contrôle après le travail sur une fiche analogue portant sur les énoncés donnés en annexe III).

VI – LA RESOLUTION DES EXERCICES : LE TRAVAIL DES ELEVES.

1. La première phase évoquée ci-dessus (lecture du texte et construction de la figure) est considérée comme la mise en œuvre d'un acquis du cycle d'observation (6ème-5ème). A rebours cela fait donc partie de nos objectifs pour ce cycle, ce qui nous a permis, soit dit en passant, de clarifier certains de nos objectifs en géométrie au niveau 6ème-5ème.

2. L'expérience montre que la deuxième phase (liste des données), souvent considérée comme souvent évidente par le professeur, demande aux élèves temps et apprentissage car le contrat est souvent implicite : lecture sélective d'un texte, identification des diverses données (qui sont parfois mêlées), écriture de ces données de façon concise, voire symbolique (ce qui entraîne parfois une reformulation ou une traduction) omission de données «inutiles», tout cela n'est pas évident. L'élève ne saisit pas bien quel est le contrat passé et pourquoi. Pourquoi ABC triangle ne figure pas habituellement dans les données (hypothèses) alors que ABCD parallélogramme y figure toujours ? Comment et pourquoi arrive-t-on à traduire «Soit Δ la droite passant par I et parallèle à (AB)» par $\begin{cases} I \in \Delta \\ \Delta \parallel (AB) \end{cases}$?

3. La troisième phase (recherche de la démonstration) peut se faire de façon orale, par exemple collectivement, lors des premiers exercices de démonstration vus au cours, mais il nous semble, au vu des réactions des élèves, plus intéressant de leur faire faire cette recherche en leur faisant reconstituer eux-mêmes l'organigramme de la démonstration au moyen de pièces de puzzle qu'ils fabriquent eux-mêmes. Chacun a alors préparé :

– des étiquettes en bristol de couleur (rose et de 4 cm sur 7 cm par exemple) sur lesquelles figurent les énoncés (fabriqués lors de la constitution du fichier),

– un stock d'étiquettes blanches en papier (de dimensions analogues). Une fois l'exercice lu et la figure faite chacun écrit sur des étiquettes blanches :

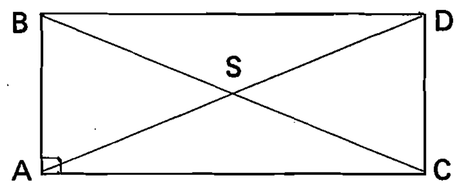
- les données : une étiquette par donnée,
- la conclusion : une étiquette.

Il dispose sur la table : l'étiquette-conclusion à droite (ou en bas) et les étiquettes-données à gauche (ou en haut). Partant de la conclusion il cherche les étiquettes roses (énoncés) permettant d'avoir cette conclusion : il en choisit une, en guidant son choix : il compare les hypothèses mises en jeu dans l'énoncé et celles de son exercice mises en évidence sur sa figure et écrites sur ses étiquettes. Il essaie et remonte ainsi petit à petit la chaîne.

Exemple.

ABC est un triangle rectangle en A. S est le milieu de [BC] et D le symétrique de A par rapport à S.

Démontrons que ABCD est un rectangle.



Etape 1 :

Données :

ABC triangle rectangle en A (1)

S milieu de [BC] (2)

D symétrique de A par rapport à S (3)

Conclusion :

ABCD rectangle

Etape 2 :

On cherche dans le fichier comment démontrer qu'un quadrilatère est un rectangle (fiche RECTANGLE). On y trouve deux méthodes :

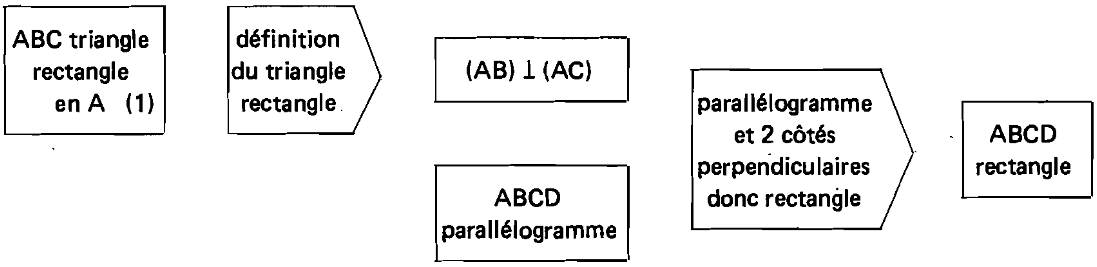
Méthode 1 :

En sachant que c'est un parallélogramme et que deux côtés consécutifs sont perpendiculaires.

Méthode 2 :

En sachant qu'il a trois angles droits.

On choisit de préférence la première méthode car il n'y a qu'un angle droit qui apparaît sur la figure et qui vient donc d'une donnée : la donnée (1). On pose donc l'étiquette-énoncé devant l'étiquette-conclusion et on rédige les deux étiquettes dont on a besoin, ce qui donne :



Etape 3 :

On cherche dans le fichier comment démontrer qu'un quadrilatère est un parallélogramme (fiche **PARALLELOGRAMME**). On y trouve trois méthodes :

Méthode 1 :

En sachant que les côtés sont parallèles deux à deux.

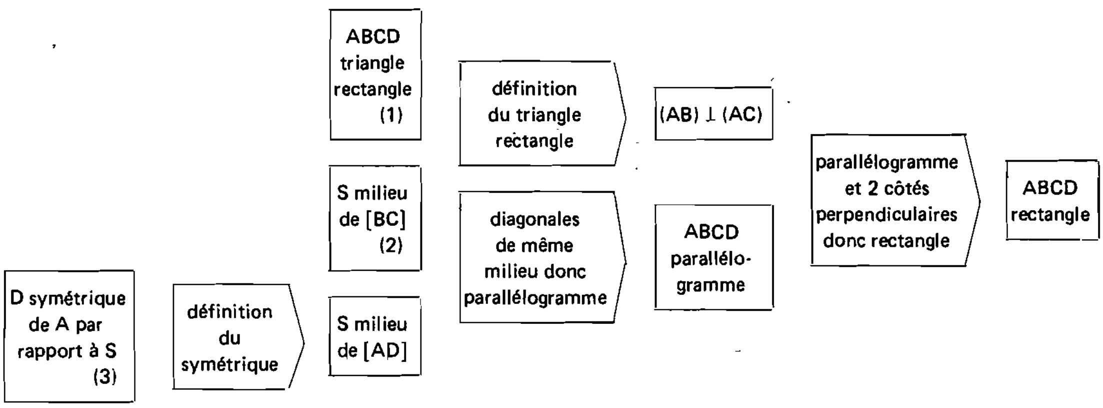
Méthode 2 :

En sachant que les diagonales ont même milieu.

Méthode 3 :

En sachant que deux côtés sont parallèles et de même longueur.

On élimine la première partie car dans les données n'apparaissent pas de droites parallèles. On retient la deuxième méthode car les données nous apprennent (visible aussi sur la figure si cela est bien mis en relief) que S est le milieu d'une diagonale et aussi de l'autre à cause de ce que veut dire symétrique. D'où alors la partie manquante de l'organigramme ce qui donne :



Par la réalisation concrète et pas à pas de son organigramme, l'élève voit où il en est de sa réflexion, peut contrôler ce qu'il a fait, oublier pour un temps ce qu'il a fait pour se consacrer au nouveau problème à résoudre (ici par exemple ABCD parallélogramme). Il peut aussi tâtonner.

Remarques.

— La démonstration de cet exercice comporte 4 déductions utilisant 4 énoncés différents. Par conséquent, malgré son apparente facilité elle met en jeu assez de choses pour la rendre assez difficile pour un élève.

— Ce type d'organigramme permet en plus une correction collective facile au tableau, correction qui est difficile voire impossible au niveau de la solution rédigée. La correction est encore facilitée par la réalisation d'étiquettes sur transparent et par l'utilisation d'un rétroprojecteur sur lequel on peut faire les mêmes manipulations que sur la table. L'organigramme permet aussi un travail autonome d'autocorrection.

4. Dernière phase : celle de la rédaction considérée comme objectif terminal. Une «rédaction en donc» est facilitée par la réalisation de l'organigramme : elle en est une transcription. Il ne faut néanmoins pas minimiser les problèmes propres à la rédaction : par quoi va-t-on commencer, comment va-t-on laisser en suspens le résultat acquis et ensuite le réutiliser... Cependant le travail est facilité car la rédaction ne se fait pas pendant le travail de recherche : cela montre bien à l'élève qu'il y a deux temps : d'autre part ce dernier n'écrit pas au fil de la plume, rédaction qui ne serait possible qu'avec des «car», et que les élèves font effectivement lorsqu'ils ne pratiquent pas les organigrammes et qu'il n'y a pas trop de déductions élémentaires en jeu.

On peut noter que petit à petit la majorité des élèves se passe des organigrammes :

— dans un premier temps ils manipulent leurs étiquettes ;

— dans un deuxième temps ils écrivent directement l'organigramme sur leur cahier ;

— dans un troisième temps ils font la recherche mentalement et rédigent directement la démonstration.

Ces étapes sont franchies progressivement mais pas en même temps pour tous : chacun à son rythme.

Au niveau du contrôle plusieurs stratégies sont possibles. On peut par exemple demander dans les premiers temps l'organigramme et la rédaction en français. (Voir annexe VI).

VII – EVALUATION.

Quels sont les résultats ? Mieux, pareils, pires ? En fonction de quels critères ?

Tout ce que nous pouvons dire pour l'instant se situe au niveau du vécu et du sentiment.

D'abord du côté des élèves : nous n'observons plus ce phénomène de rejet face à la démonstration. Très peu de réactions du type : «Mais pourquoi faut-il démontrer ? Ça se voit sur la figure». Pour confirmer cette impression il serait intéressant de questionner les élèves (une telle enquête a été réalisée à l'IREM d'Aix-Marseille) et de comparer les réponses.

D'autre part la majorité des élèves arrive à rédiger correctement une courte démonstration. Certains collègues ont proposé par exemple de faire subir à leurs élèves des tests d'évaluation élaborés au niveau académique (Académie de Poitiers) et de comparer avec les résultats de ces tests.

Ensuite du côté professeur nous n'avons plus l'impression de parler pour quelques uns dans l'indifférence générale voire le dégoût. Quant aux résultats de nos contrôles ils ne sont plus catastrophiques et objet d'un lamento continuel. Peux-être que nos exercices sont plus «faciles», et que nos exigences sont différentes. Là aussi il faudrait observer, enquêter, comparer.

Il y aurait aussi à repérer les erreurs typiques : la méthode change-t-elle le type d'erreurs commises ? Là également des travaux seraient intéressants. Mais il y a déjà peu de travaux sur les erreurs en géométrie, alors pour des travaux comparatifs... !

Une évaluation plus «scientifique» de l'expérience (de toute expérience) nous semble souhaitable. Nous venons d'indiquer quelques pistes. Mais il nous faudrait souvent d'autres moyens. Car pris dans l'action, à la fois innovateurs et acteurs, nous ne pouvons focaliser toute notre attention sur tel ou tel aspect de notre expérience, de nos expériences : les décisions didactiques prises et les évaluations faites, le sont sur le tas et dépendent de nombreuses variables dont une des principales est le vécu de la situation.

VIII – EN CONCLUSION.

Le travail de réflexion sur ce que nous mettions en place nous a amené à en voir les limites : peut-on se limiter à un apprentissage de la démonstration. Car tout apprentissage coupé de son contexte ne risque-t-il pas de perdre son sens ? S'il est parfois utile d'apprendre à se servir d'outils nouveaux il ne faudrait pas néanmoins perdre de vue l'usage pour lequel ils ont été fabriqués. Aussi il nous semble qu'il faut au maximum recontextualiser cet apprentissage en en faisant un des maillons de la chaîne O.C.D.E. : observer, conjecturer, démontrer, enrichir. Il s'agit alors de proposer aux élèves des activités géométriques où la démonstration n'est qu'un des temps, perçu comme nécessaire, de l'activité, qui elle s'inscrit dans une démarche scientifique plus générale, transposable aux autres sciences : observer d'abord, conjecturer ensuite, prouver alors et être enfin capable de se poser d'autres questions(6).

D'autre part nous avons visé à un apprentissage d'un type spécifique de preuve. Mais quels autres types de preuves devraient faire l'objet d'un apprentissage au niveau du collège ? Pourrait-on les recenser, et peut-être viser moins à enseigner des contenus pour des contenus que des contenus pour des méthodes et des démarches ?

Enfin y a-t-il des domaines privilégiés des mathématiques pour l'introduction d'un certain type de raisonnement ? Pourquoi dans le premier cycle géométrie et introduction au raisonnement déductif sont-elles étroitement liées ? Comme le dit A. Bouvier(7) : «Est-il pertinent de vouloir entraîner à la déduction dans un domaine où beaucoup de résultats sont évidents ? Ne serait-il pas plus adapté de la faire avec de l'algèbre, de la théorie des nombres, de l'analyse ?».

(6) NdIR : on peut à ce propos consulter l'article «des problèmes ouverts dans nos classes de premier cycle» G. ARSAC, M. MANTE, petit x n° 2, 1983.

(7) Dans l'article «Les géométres du premier cycle». Sans Tambour ni Trompette, IREM-A.P.M. (24-32) Lyon, octobre 1983.

ENONCES

Pa Définition du parallélogramme

Un parallélogramme est un quadrilatère dont les côtés sont parallèles deux à deux.

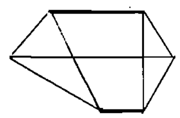
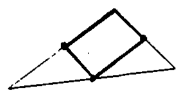
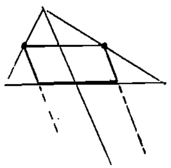
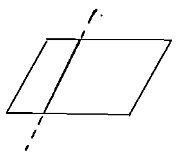
NB : énoncé double : Pa' - Pa"

P1 Transitivité du parallélisme

Deux droites parallèles à une même troisième sont parallèles entre elles.

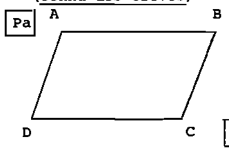
P2 Enoncé des milieux pour le triangle

La droite qui passe par les milieux de deux côtés d'un triangle est parallèle au troisième.

EXERCICES		Textes possibles
1		ABCD est un trapèze de bases [AB] et [DC] . DCEF est un trapèze de bases [DC] et [EF]. Que dire du quadrilatère ABEF ? Prouve-le.
2		ABC est un triangle quelconque, I, J, K sont les milieux respectifs de [AB], [AC], [BC]. Que dire du quadrilatère AIKJ ? Prouve-le.
3		Soient A,B,C trois points quelconques, I et J les milieux respectifs de [AB] et [AC], (d) une droite quelconque passant par A. On mène par I et J deux droites parallèles à (d) qui coupent (BC) en E et F respectivement. Démontre que IJFE est un parallélogramme.
4		LUCE est un parallélogramme. On trace une droite parallèle à (LE) qui coupe les droites (LU) et (LE) respectivement en A et N. Démontre que 1)ELAN est un parallélogramme 2)CUAN est un parallélogramme

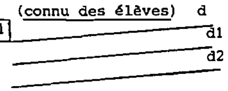
ENONCES : le libellé donné l'est à titre indicatif et devrait être établi par l'élève lui-même, sous réserve qu'il soit correct.

Pa (connu des élèves)



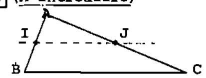
Hypothèses		Conclusion
(AB) // (DC) (AD) // (BC)	Pa' →	ABCD parallélogramme
ABCD parallélogramme	Pa" →	(AB) // (DC) (AD) // (BC)

P1 (connu des élèves)



Hypothèses		Conclusion
d1 // d2 d2 // d	P1 →	d1 // d2

P2 (A introduire)



Hypothèses		Conclusion
I milieu de [AB] J milieu de [AC]	P2 →	(IJ) // (BC)

EXERCICES

A la fin de chaque exercice sont donnés, dans un cartouche, les énoncés utilisés et le nombre de déductions à faire

1 Hypothèses * Démonstration * Conclusion

Hypothèses	Démonstration	Conclusion
(AB) // (DC) (DC) // (EF)	P1 →	(AB) // (EF) ou ABEF trapèze
		P1 / 1

2

Hypothèses	Démonstration	Conclusion
I milieu de [AB] J milieu de [AC] K milieu de [BC]	P2 → (IK) // (AC) P2 → (JK) // (AB) → Pa' →	AIKJ parallélogramme
		P2 Pa' / 3

N.B: On peut compléter avec deux autres parallélogrammes

3

Hypothèses	Démonstration	Conclusion

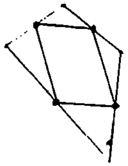
I milieu de [AB]
J milieu de [AC]
(IE) // d
(JK) // d
	P2 → (IJ) // (BC)
	P1 → (IE) // (JK) → Pa' →
		IJFE parallélogramme

		P2 P1 Pa' / 3

4

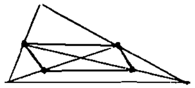
Hypothèses	Démonstration	Conclusion
LUCE parallélogramme (AN) // (LE)	Pa" → (LA) // (EN) → Pa' →	ELAN parallélogramme
	Pa" → (LE) // (UC) → P1 → (AN) // (UC) → Pa' →	CUAN parallélogramme

1) Pa" Pa' / 2 2) Pa" P1 Pa' / 4

(5) 

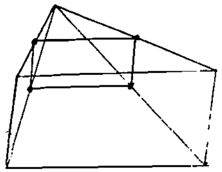
Soient O,U,R,S quatre points quelconques et M,I,E,L les milieux respectifs des segments [OU] ; [UR] , [RS], [OS].

Que dire de MIEL ? Démontre-le.

(6) 

LUC est un triangle quelconque. O et R sont les milieux respectifs de [LU] et [LC]. Les médianes (CO) et (UR) se coupent en G. On désigne par S le milieu de [UG] et par E le milieu de [CG].

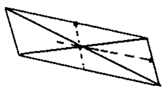
Que dire de ROSE ? Démontre-le.

(7) 

ECU est un triangle quelconque, et BLEU un parallélogramme. On appelle N,O,I,R les milieux respectifs des segments.

[CE], [CL] , [CB], [CU].

Quelle est la nature de NOIR ? Prouve-le.

(8) 

Dessine deux segments [AC] et [BD] ayant le même milieu que l'on désignera par I.

Soit R et S les milieux respectifs de [AB] et [BC].

1) Démontre que (RI), (BC) et (AD) sont parallèles.

2) Démontre que (SI), (AB) et (CD) sont parallèles.

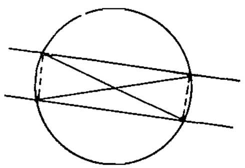
3) Que peux-tu dire de ABCD ? Justifie-le.

ENONCE

P3 Théorème des diagonales

Si les diagonales d'un quadrilatère ont même milieu alors ce quadrilatère est un parallélogramme (connu).

EXERCICES

(9) 

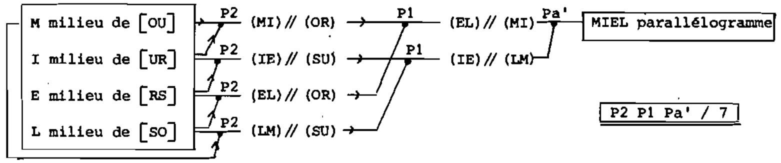
Dessine un cercle (𝒞) de centre O.

Soient [AB] et [CD] deux diamètres de ce cercle.

1)Démontre que (AC) est parallèle à (BD)

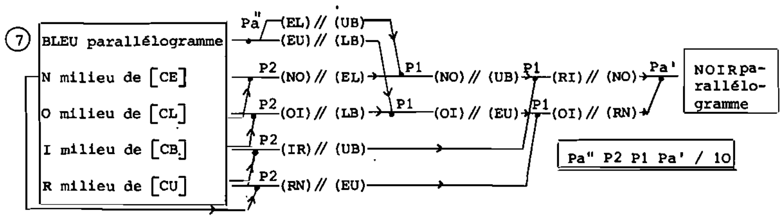
2) Quelle est la nature de ACBD ? Peux-tu le prouver ? Que peux-tu prouver ?

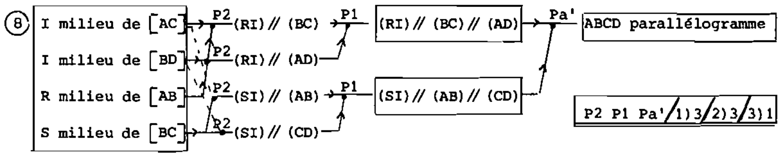
(5) A poursuivre : avec les diagonales et leurs milieux on peut encore obtenir des tas de parallélogrammes.



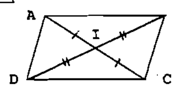
(6) Diagramme déductif identique. P2 P1 Pa' / 7

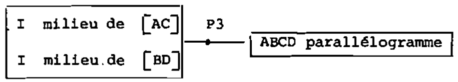
A poursuivre pour montrer que les médianes sont concourantes.

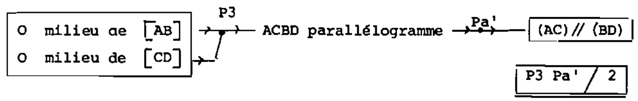
(7) 

(8) 

P3 (Connu des élèves)

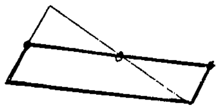




(9) 1) 

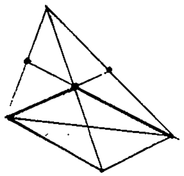
2) ACBD parallélogramme cf.1) et rectangle, mais pas démontrable ici.

(10)



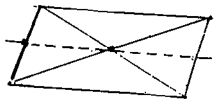
ONU est un triangle quelconque. T et S sont les milieux respectifs de [OU] et [NU]. A est le symétrique de T par rapport à S.
Démontre que OTAN est un parallélogramme.

(11)



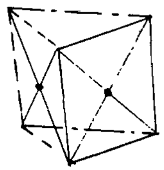
ABC est un triangle quelconque, I et J sont les milieux respectifs de [AB] et [AC]. Les deux médianes (BJ) et (CI) se coupent en G. Soit A' le symétrique de A par rapport à G.
Que dire de A'BGC ? Démontre-le.

(12)



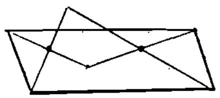
RIC est un triangle quelconque. D est le milieu de [RC] et E le symétrique de I par rapport à D.
1) Démontrer que ERIC est un parallélogramme.
2) Soit O le milieu de [RI]. On trace la droite (OD) qui coupe (EC) en S.
Démontrer que ROSE est un parallélogramme.
3) Que dire de SOIC ?

(13)



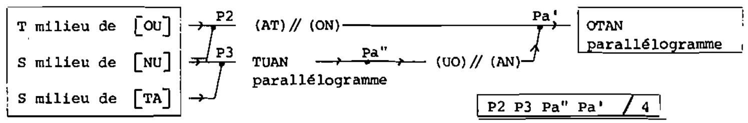
Soient D,E,L,N,O,R,U,Y huit points tels que E soit le milieu de [LO] et [NY] et U soit le milieu de [NR] et [OD].
1) Démontrer que LYON et NORD sont deux parallélogrammes.
2) Démontrer que LYRD est aussi un parallélogramme.

(13 bis)

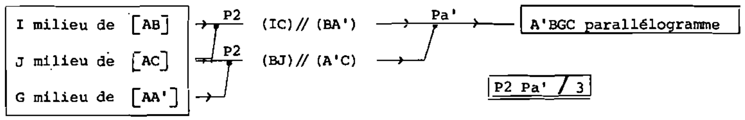


TAO est un triangle quelconque, I et U sont les milieux de [AT] et [OT] respectivement. M est un point quelconque. L est le symétrique de M par rapport à I et R celui de M par rapport à U.
Que dire de ORLA ?
Démontre-le.

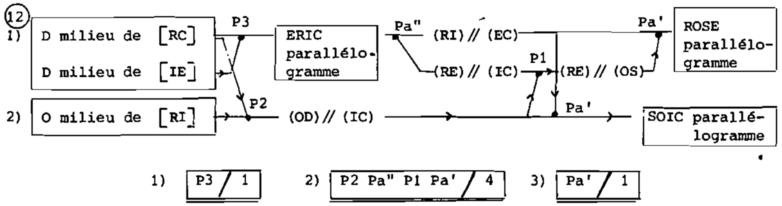
(10)



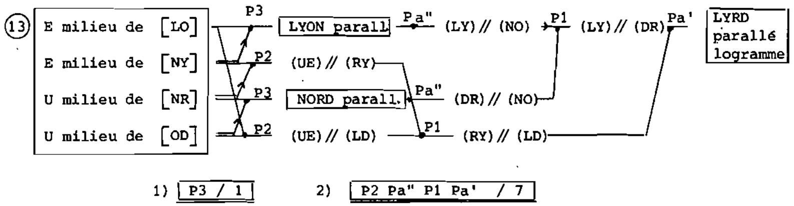
(11) A poursuivre pour démontrer que G est le centre de gravité.



(12)



(13)



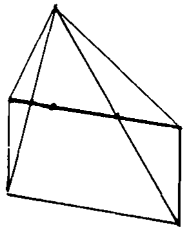
(13 bis) Même diagramme déductif.
On peut fragmenter le début avec MALT et MORT

P3 P2 Pa" P1 Pa' / 9

Remarque : Il est clair que nous utilisons de façon implicite l'axiome de définition d'une droite par 2 points c'est à dire que si T, S, A sont alignés nous écrivons :

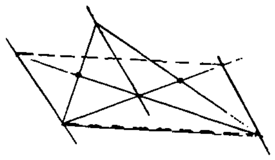
(TS) = (TA) ....

13 ter



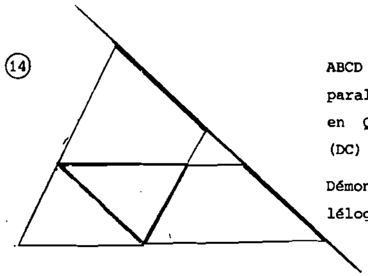
Soit EVA un triangle quelconque et M un point du segment [EV]. Soit U le milieu de [EM] et I celui de [MV] . On désigne par R et T les symétriques de A par rapport à U et I respectivement.
Que dire de VERT ? Prouve-le.

13 quater



Soit UVW un triangle quelconque, U', V', W' les milieux de [VW] , [UW], et [UV] .
Les médianes (VV') et (WW') se coupent en G.
Soient E et F lès symétriques de G par rapport à V' et W'.
1) Démontre que les droites (UG), (EW) et (FV) sont parallèles.
2) Démontre que EFVW est un parallélogramme.

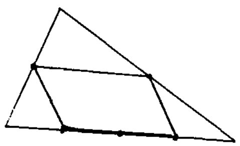
14



ABCD est un parallélogramme et (d) une droite parallèle à (AC). La droite (AD) coupe (d) en Q, (CB) la coupe en N, (AB) en M et (DC) en P.

Démontrer que ACNQ et ACPM sont des parallélogrammes.

15



ABC est un triangle. I, J, K, M, N sont les milieux respectifs de [AB], [AC], [BC], [BK], [CK] .

Montrer que IJNM est un parallélogramme.

13 ter Même diagramme déductif $\boxed{\text{P3 P2 Pa" P1 Pa' / 7}}$

On peut remarquer la "dualité" avec 7 , donc la formulation de l'énoncé permet, à partir d'une même figure, de fabriquer plusieurs énoncés correspondant à des démarches différentes.

13 quater Idem

Peut se poursuivre pour prouver que les médianes sont concourantes.

14

ABCD parallélogramme (d) // (AC)	$\xrightarrow{Pa"}$ (DQ) // (CB) $\xrightarrow{Pa'}$	ACNQ parallélogramme

$\boxed{\text{Pa" Pa' / 2}}$

15

I milieu de [AB]
J milieu de [AC]
K milieu de [BC]
M milieu de [BK]
N milieu de [CK]
	$\xrightarrow{P2}$ (IJ) // (MN) $\xrightarrow{Pa'}$
	$\xrightarrow{P2}$ (IM) // (AK) $\xrightarrow{P1}$ (IM) // (JN)
	$\xrightarrow{P2}$ (JN) // (AK)
		IJMN parallélogramme

$\boxed{\text{P2 P1 Pa' / 5}}$

On peut remarquer l'inutilité (voulue) de la troisième hypothèse et donc essayer de faire une figure avec K quelconque sur [BC] .

ANNEXE II

Exemple de feuille de travail pour l'élève

PARALLELE – Parallélogramme

ENONCES

(P_a) **Définition du parallélogramme.**

Un parallélogramme est un quadrilatère dont les côtés opposés sont parallèles.

(P_1) **Transitivité du parallélisme.**

Deux droites parallèles à une même troisième droite sont parallèles entre elles.

(P_2) **Propriété des milieux dans un triangle.**

La droite qui passe par les milieux de deux côtés d'un triangle est parallèle au troisième côté.

(1) ORAN et ANGE sont deux parallélogrammes. Prouve(1) que les droites (OR) et (GE) sont parallèles.

(2) ABC est un triangle ; I, J, K sont les milieux respectifs des segments [AB], [AC], [BC]. Que dire du quadrilatère AIJK ? Prouve-le.

(3) LUCE est un parallélogramme. Une parallèle à la droite (LE) coupe les droites (LU) et (CE) respectivement en A et N. Démontre que ELAN et CUAN sont des parallélogrammes.

(4) Soient O, U, R, S quatre points quelconques et M, I, E, L les milieux respectifs des segments [OU], [UR], [RS], [OS]. Que dire de MIEL ? Prouve-le.

(5) Dessine deux segments [AC] et [BD] ayant même milieu que l'on désignera par I. Soient R et S les milieux respectifs des segments [AB] et [BC].

1) Démontre que (RI) est parallèle à (BC) et à (AD).
2) Démontre que (SI) est parallèle à (AB) et à (CD).
3) Que peut-on en déduire(2) pour ABCD ? Justifie-le.

Remarques.

(1) on dit : prouver, ou démontrer, ou montrer. Ces termes synonymes en mathématique.
(2) «que peut-on en déduire ?» signifie «quelle en est la conséquence ?».

PARALLELE – Parallélogramme (suite)

ENONCE

(P_3) **Théorème des diagonales.**

Si les diagonales d'un quadrilatère ont même milieu, alors ce quadrilatère est un parallélogramme.

(6) Dessine un cercle de centre O. Deux droites passant par O coupent le cercle respectivement en A et A′, et en B et B′.

1) Démontre que (AB) est parallèle à (A′B′).
2) Quelle est la nature de ABA′B′ ? Peux-tu le prouver ? Que peux-tu prouver ?

(7) ONU est un triangle quelconque. T et S sont les milieux respectifs de [OU] et [NU]. A est le symétrique de T par rapport à S, c'est-à-dire que A est placé de telle façon que S soit le milieu de [AT].

1) Démontre que TUAN est un parallélogramme.
2) Démontre que OTAN est un parallélogramme.

(8) TAO est un triangle quelconque, I et U sont les milieux respectifs de [AT] et [OT], M est un point quelconque. L est le symétrique de M par rapport à I et R celui de M par rapport à U.

Démontre que ORLA est un parallélogramme.

(9) ABC est un triangle quelconque. I et J sont les milieux respectifs de [AB] et [AC]. Les deux médianes (BJ) et (CI) se coupent en G.
Soit A′ le symétrique de A par rapport à G.

Démontre que A′BGC est un parallélogramme.

ANNEXE III

4ème | **PARALLELISME – PARALLELOGRAMME**

LES ENONCES.

$/\!/_1$ Si deux droites sont parallèles à une troisième droite, alors ces deux droites sont parallèles en elles.

$/\!/_2$ La droite qui passe par les milieux de deux côtés d'un triangle est parallèle au troisième côté.

$/\!/_3$ Si un quadrilatère a ses côtés opposés parallèles alors c'est un parallélogramme.

$/\!/_4$ Si un quadrilatère est un parallélogramme alors ses côtés opposés sont parallèles.

N.B. : la fiche de contrôle ci-après montre l'utilisation qui est faite par les élèves des éléments du «puzzle».

ABCD parallélogramme	(AB) // (DC)	(AD) // (BC)
EFHG parallélogramme	(EF) // (GH)	(EG) // (FH)
(FH) // (AB)	(DC) // (HF)	(AB) // (EF)
(EG) // (AB)	(AB) // (EG)	E milieu de [HA]
G milieu de [HB]	C milieu de [AE]	D milieu de [EB]

ANNEXE III (suite)

4ème	contrôle					1982-1983
	(MN) // (RP) 	$\xrightarrow{//_1}$			(JH) // (MN)	
	(EF) // (KL) (TZ) // (EF)					
		$\xrightarrow{//_4}$			(JH) // (MN)	
		$\longrightarrow$			EFGH est un parallélogramme	
	(AC) // (IJ) 	$\xrightarrow{//_3}$				
	C milieu de [AE] D milieu de [FA]	$\longrightarrow$				
		$\xrightarrow{//_2}$			(AB) // (CD)	
	I milieu de [AD] J milieu de [AC]	$\longrightarrow$	 (IJ) // (AB)	$\xrightarrow{//_1}$	(AD) // (BC) 	$\longrightarrow$

ANNEXE IV

4ème **MATHEMATIQUE**

Devoir surveillé numéro 1 du 3-10-1981

I LOIR est un parallélogramme. Soit E un point du segment [LR]. Par R on mène la parallèle à la droite (EO) qui coupe la droite (OI) en S.

1) Fais une figure.
2) Ecris le plus simplement possible les hypothèses.
3) Que constates-tu au sujet du REOS ?
4) Démontre-le.

II AVU est un triangle. M et I sont les milieux respectifs des segments [AV] et [AU]. E est un point du segment [VU]. Par I on même la parallèle à la droite (ME) qui coupe la droite (VU) en N.

1) Fais une figure.
2) Ecris le plus simplement possible les hypothèses.
3) Que peut-on dire des droites (MI) et (VU) ? Prouve-le.
4) Démontre que MINE est un parallélogramme (en te servant d'une hypothèse et du résultat précédent).

III **Si tu as le temps :**

Place deux points A et B distants de 15 cm.
Trouve deux nombres dont la somme est égale à 17.
Par exemple 12 et 5. Construis alors un point M tel que MA = 12 et MB = 5.
Recommence avec deux autres nombres et construis un nouveau point.
Continue pour avoir beaucoup de points.
L'ensemble de tous ces points décrit une courbe que tu traceras (avec d'autant plus de précision que tu auras plus de points).

Barême.

I – 9 (2 + 2 + 1 + 4)
II – 11 (2 + 3 + 3 + 3)
III – +

ANNEXE V

4ème B **DEVOIR numéro 6**

contrôle du 22-11-1982

Pour chaque question (à partir de la question 2) faire l'organigramme puis rédiger en français.
Faire la question 1 sur une feuille simple à part.

EFGH est un parallélogramme ; on appelle M le milieu du côté [EH] et O le milieu de la diagonale [EG]. Les droites (MO) et (GF) se coupent en N.

1) Faire la figure et écrire les hypothèses.
2) Montrer que les droites (MO) et (HG) sont parallèles.
3) Montrer que les droites (MO) et (EF) sont parallèles.
4) Montrer que le quadrilatère EFNM est un parallélogramme.

Barême.

1 – 2 pts (1 + 1)
2 – 4 pts (3 + 1)
3 – 7 pts (5 + 2)
4 – 7 pts (5 + 2)