NUMERATION AU C.P.

par Mireille GUILLERAULT

et Jacques PAINCHAULT (professeur au lycée d'Aix-les-Bains)

INTRODUCTION

Ce qui suit précise les notions abordées dans Grand IN n° 3 «Introduction de la notion de nombre au C.P.» c'est à peu de chose près le compte-rendu de ce qui a été fait cette année dans nos classes expérimentales de C.P.

La numération a été introduite après des activités de classement, et aussi de nombreuses activités de rangement* (exemples : rangement de buchettes ou bandes de papier de différentes longueurs, étude de l'ordre dans lequel on rencontre certains objets disposés sur un chemin, de l'ordre des images d'une histoire racontée par une bande dessinée...).

L'étude de «autant que» (Grand IN n° 3 page 50) a été faite parallèlement à celle de «moins que», «plus que», expressions qui sont spontanément utilisées dans le cas où «il n'y a pas autant», mais qui ont besoin comme le «autant que» d'être précisées, et liées (encourager la conversion de «il y a plus de crayons que de livres» en «il y a moins de livres que de crayons»).

* Ranger : déterminer un ordre (premier, deuxième, troisième etc ...)
Classer : regrouper les éléments par catégories, selon certains critères.

I – CLASSEMENT D'ENSEMBLES. DESIGNATION DES BOITES

Dans les classes où nous travaillons, ceci n'est en général pas abordé avant le mois de janvier. Lors des activités précédentes, on a fabriqué des sacs d'objets (il peut être pratique d'utiliser des sacs en plastique transparent fermés par des rubans armés de fil de fer). Dans un premier temps, les contenus de ces sacs sont les seuls «ensembles» considérés.

Pour la première séance, supposons que le maître ait choisi des ensembles de trois, cinq, huit et neuf éléments. Le maître, puis les élèves, mettent dans une même boîte les sacs qui contiennent autant d'objets les uns que les autres (cf Grand IN n° 3 page 53). Les boîtes utilisées pour le classement sont de même aspect (même couleur, même taille, même forme) pour qu'à l'usage il soit indispensable de les désigner. Quel signe va-t-on alors choisir pour chaque boîte ? Parmi les différentes propositions faites par les enfants, seules les propositions ambigües sont rejetées ; par exemple une désignation par les couleurs peut laisser supposer que tous les objets dans la boite sont de même couleur, auquel cas le maître fabrique un sac contenant des objets de différentes couleurs. Dans le cas des nombres choisis les noms classiques «cinq» »trois» «neuf» «huit» ont été proposés par quelques enfants. Cela a été l'occasion pour les autres d'apprendre ces noms qui ont été écrits sur les boîtes en chiffres et en lettres.

Le classement des sacs dans les différentes boîtes a donné aux élèves l'occasion d'utiliser la transitivité du «autant que». Par exemple, un enfant vient de constater qu'il y a autant d'objets dans le sac à classer que dans le sac pris dans une boîte ; on lui demande de prévoir ce qu'il pourrait constater en prenant un autre sac de la même boîte. Lorsque l'élève n'a pas besoin de manipulation pour conclure, on peut raisonnablement penser qu'une certaine idée de la transitivité est acquise. Il nous a semblé inutile de lui faire répéter une phrase du style «il y a autant de noisettes que de pommes de pin parce qu'il y a autant de noisettes que de crayons et qu'il y a autant de crayons que de pommes de pins»..., la longueur d'un tel énoncé, par ailleurs sans intérêt, bloquant la logique intuitive de l'enfant.

Quand certains élèves ont eu besoin, au moment de mettre un sac dans une boîte, de le comparer à chacun des sacs déjà placés dans la boîte, nous les avons laissé faire mais nous sommes revenus sur des comparaisons «indirectes», utilisant la transitivité : par exemple, nous avons demandé : «y a-t-il autant de porte-manteaux cloués dans le couloir que de tables dans la classe ?» Les enfants ont dû imaginer un procédé utilisant une collection intermédiaire, par exemple des gommettes, ou de petits bouts de ficelle, ou des images, etc... Un enfant bricoleur n'a pas hésité à proposer le ficelage de chaque table à un porte-manteau, mais il a été aisé de prétexter le manque de ficelle !

Les premières séances avaient donc pour objectif de faire comprendre le critère de classement des sacs dans les différentes boîtes, et de favoriser l'usage de la transitivité du «autant que». **A ce propos, nous admettrons dans la suite de l'article que les enfants ont compris que pour classer un sac dans une boîte, il suffit de le comparer à un seul sac de cette boîte; ce qui ne signifie pas que, dans la classe, les enfants n'ont pas eu la possibilité de comparer le sac à classer à plusieurs sacs, s'ils en éprouvaient le besoin.**

Quant au classement, la méthode utilisée est restée très primitive : nous allons voir comment les élèves ont été amenés à améliorer leur technique de classement des sacs.

II – RANGEMENT DES PREMIERES BOITES

Les boîtes 5, 8, 3, 9 ont donc été constituées, elles ont été disposées sans ordre particulier sur une table et ne sont pas alignées.

L'objectif est alors de faire ranger les boîtes. Prenant un sac (de huit objets) le maître demande aux élèves. «– Peut-on le placer dans la boîte 5 ?» La comparaison du sac donné avec un sac de la boîte 5 permet de voir qu'il contient plus d'objets.

«– Peut-on le placer dans la boîte 8 ?» Nouvelle comparaison ; on le place dans cette boîte.

On montre alors que la comparaison des boîtes 5 et 8 est indépendante des sacs choisis dans chacune des boîtes. Le maître prend un sac de la boîte 5 et un sac de la boîte 8 : quand les enfants sont capables de prévoir sans manipulation le résultat de la comparaison, ils ont découvert que chaque sac de la boîte 5 contient moins d'objets que chaque sac de la boîte 8 ; tant qu'il subsiste des doutes chez certains élèves, on vérifie autant de fois que nécessaire.

Pour se souvenir de ce résultat, on **convient** alors de placer la boîte 5 à **gauche** de la boîte 8, avec toutes les précautions habituelles pour que cette «gauche» soit bien définie ; par exemple, on range les boîtes le long d'un mur, ainsi la gauche d'une boîte est la même pour tout le monde [nous sommes bien conscients que s'appuyer sur la distinction entre droite et gauche n'est pas chose simple au C.P. mais c'est en l'utilisant que nous espérons l'affermir].

A partir de ce moment, les enfants avaient compris qu'il suffisait, pour ranger deux boîtes, de comparer un sac quelconque d'une boîte à un sac quelconque de l'autre. Nous avons alors terminé le rangement des quatre boîtes :

Pour ranger la boîte 3, certains enfants ont comparé un sac de la boîte 3 à un sac de la boîte 5 et ont placé la boîte 3 à gauche de la boîte 5. Comme les boîtes 5 et 8 étaient déjà rangées, on a obtenu $\boxed{3}$ $\boxed{5}$ $\boxed{8}$. On a donc pu leur faire vérifier que la position obtenue de la boîte 3 par rapport à la boîte 8 est bien correcte, en leur faisant comparer des sacs de ces deux boîtes, etc... jusqu'au rangement des quatre boîtes.

Remarquons que les nombres 3 et 5 on été volontairement choisis parce que les enfants en ont une perception globale. Par ailleurs, il est bien évident que la méthode décrite pour ranger ces boîtes n'est pas unique. Enfin, la connaissance des nombres 5, 3, 8, 9 que possèdent certains enfants peut accélérer les rangements et rendre inutile pour eux l'emploi d'une quelconque méthode.

III – FABRICATION ET RANGEMENT SIMULTANES DE NOUVELLES BOITES

Jusqu'à présent, quand on avait affaire à un nouveau sac, on était obligé de le comparer à un sac au moins de chacune des boîtes constituées. A partir de maintenant, le rangement des boîtes va permettre de gagner du temps. Nous avons essayé d'amener les enfants à prendre conscience du fait suivant : une fois qu'on a rangé les boîtes 3, 5 et 8 à gauche de la boîte 9, si on a vérifié que le nouveau sac à classer a plus d'objets qu'un sac de la boîte 9, il est inutile de comparer ce sac à des sacs extraits des boîtes 3 ou 5 ou 8. On sait que ce paquet sera alors classé dans une boîte située à droite de la boîte 9. C'est ainsi qu'on fabrique une nouvelle boîte et qu'elle se trouve rangée dans la file des boîtes :

$$\boxed{3}\quad\boxed{5}\quad\boxed{8}\quad\boxed{9}\quad\boxed{}$$

Quelle est la méthode qui se dégage au bout de plusieurs manipulations ? (il est évident que les premières manipulations n'utilisent pas le fait signalé plus haut et sont tâtonnantes). Un enfant veut placer un sac dans une boîte, il peut éventuellement estimer que ce sac contient peu ou beaucoup d'objets (par rapport aux sacs déjà placés dans les boîtes) et ne pas choisir au hasard la boîte d'où il sort le sac auquel il veut comparer le sac initial.

Pour être plus clair, notons **s** le sac initial et **t** le sac choisi pour la comparaison.

- ou bien **s** a autant d'objets que **t** ; c'est terminé il place **s** dans la même boîte que **t**.
- ou bien **s** a plus d'objets que **t** et alors il peut comparer **s** à un sac d'une boîte plus à droite si elle existe ; si elle n'existe pas il a besoin d'une nouvelle boîte.

– ou bien **s** a moins d'éléments que **t**, alors il opère de façon analogue avec une boîte à gauche de celle où il avait choisi **t**.

Les enfants ne choisissent pas forcément la manière qui paraît au maître la plus rationnelle pour ranger une nouvelle boîte : il nous paraît meilleur de les laisser se débrouiller suivant leur intuition, plutôt que de leur imposer une méthode dès le début de l'activité de rangement des boîtes.

Cette activité a été conduite jusqu'à ce qu'on dispose d'une dizaine de boîtes codées, par exemple

1 un	3 trois	5 cinq	7 sept	8 huit

9 neuf	dix	12 douze	treize	quatorze	☆

On a désigné toutes les boîtes, sauf la dernière à droite, par l'écriture du nom des nombres en toutes lettres. En effet, la plupart des enfants connaissant ces noms, on les a habitués à les lire. Par ailleurs, un nombre suffisant d'enfants savaient que le nombre douze s'écrivait aussi «12». Ils comprenaient globalement cette écriture, comme un enfant peut comprendre le 12 de sa date de naissance, sans savoir que 12 signifie une dizaine et deux unités ; nous n'avons pas estimé nécessaire de refuser cette écriture, mais nous ne l'aurions pas imposée car de telles écritures viennent naturellement après les activités de codage et décodage en différentes bases. Quand à la boite notée ☆ il s'agissait d'une boîte pour laquelle aucun enfant (ou un nombre insuffisant d'enfants) n'avait proposé le nom du nombre correspondant. Ce signe a été remplacé par 17 lors des activités de codage des nombres.

Le nombre et la difficulté des notions mises en jeu (autant que, plus que, moins que, «transitivité», invention d'une méthode pour «ranger» les nouveaux sacs) ont imposé un rythme lent pour ce travail. Afin de ne pas créer de lassitude, tout en renforçant certaines notions, on a proposé aux enfants d'autres situations, telles que la suivante, en liaison avec la lecture et l'apprentissage de la langue.

Une histoire simple, et ne présentant que des évènements successifs bien séparés, est raconté. Chaque élève doit dessiner un évènement au moins de cette histoire. On ramasse tous les dessins des enfants et on essaye de les ranger suivant le déroulement de l'histoire. A la fin de cette activité, les dessins dans lesquels tous les enfants ont reconnu le même évènement se trouvent regroupés et on obtient un ordre portant sur les paquets de dessins, comme il portait précédemment sur les boîtes de sacs. De même que pour les boîtes, on peut se poser le problème de la place à donner à un nouveau dessin.

IV – DEBUT DE CONSTRUCTION DE LA SUITE DES NOMBRES

Dans l'activité précédente, le but était de placer une boîte dans la file des boîtes : entre deux boîtes existantes, ou à gauche, ou à droite de la file.

Le problème posé ensuite a été de savoir s'il était possible de fabriquer une boîte prenant place dans la file entre deux boîtes données.

Dans l'exemple choisi, on a demandé aux enfants de fabriquer des boîtes prenant place entre les boîtes 9 et 12. Ils ont ainsi fabriqué la boîte 10 par exemple. S'ils ont fabriqué la boîte 10, on leur a ensuite demandé de fabriquer une boîte pouvant se placer entre :

1) la boîte 10 et la boîte 12
2) la boîte 9 et la boîte 10.

Ce dernier problème les a amené à découvrir ce que sont deux nombres consécutifs.

Le premier problème avait une solution : la boîte 11. Les mêmes questions ont été posées :

1) y a-t-il une boîte entre la boîte 10 et la boîte 11 ?
2) y a-t-il une boîte entre la boîte 11 et la boîte 12 ?

Remarque : Dans la classe, cette activité a pris deux heures. Le temps passé à laisser les enfants tâtonner n'a certainement pas été perdu.

Peut-on fabriquer une boîte se rangeant à droite de la boite ☆ *?*

Les élèves en construisent facilement une, par exemple en ajoutant quelques objets à ceux d'un sac pris dans la boîte . Ils ont pu remarquer qu'il suffit d'ajouter un seul objet pour fabriquer des boîtes consécutives. Que ces nouvelles boîtes soient consécutives ou non, nous avons essayé de faire sentir aux enfants que cette activité pourrait être prolongée indéfiniment.

Peut-on fabriquer une boîte se rangeant à gauche de la boîte 1 ?

Les élèves ont pu remarquer qu'il suffit de retirer un objet à un sac d'une boîte pour obtenir un sac se plaçant dans une boîte située immédiatement à gauche. Cette opération effectuée sur un sac de la boîte 1 a donné un sac vide que l'on a placé dans une boîte, laquelle a été désignée par **zéro**.

La fabrication de cette boîte peut paraître artificielle mais nous avions besoin du nombre zéro, et du chiffre «0» pour l'étude ultérieure de la numération. D'autre part il est important de remarquer qu'il est impossible de prolonger la suite des boîtes vers la gauche.

V – QUELQUES REMARQUES

Sur le contenu des boîtes

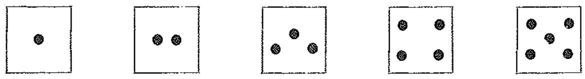
Les activités décrites dans les paragraphes I, II, III, IV ne donnent qu'une idée intuitive de ce qu'est un nombre. En effet, tous les ensembles considérés sont disjoints (deux quelconques d'entre eux n'ont pas d'élément commun); or, pour ne prendre qu'un exemple, la boîte 2 pourrait contenir d'autres ensembles de deux éléments. Supposons que a, b, c, d désignent quatre objets distincts. Les ensembles $\{a, b\}$, $\{a, c\}$, $\{a, d\}$, $\{b, d\}$, $\{c, d\}$, $\{b, c\}$ devraient être classés dans la boîte 2, mais il est impossible de matérialiser simultanément $\{a, b\}$ et $\{a, c\}$ en plaçant l'objet a dans un même sac que l'objet b et en plaçant ce même objet a dans un autre sac contenant l'objet c.

On pourrait peut-être éviter cette difficulté en plaçant dans les boîtes non seulement des sacs mais aussi des dessins d'ensembles qui sont en fait des désignations d'ensembles, mais il nous a semblé plus satisfaisant de ne pas mélanger dans une boîte, matérialisation d'une classe d'ensembles, des ensembles et des désignations d'ensembles.

Que l'on s'interdise ou non de placer dans les boîtes des dessins d'ensembles, il est souhaitable d'inviter les élèves à inventer certaines boîtes sans qu'elles soient effectivement construites et à imaginer une certaine extension des boîtes qui sont présentes. Par exemple, on peut faire fabriquer des sacs de trois objets en quantité telle qu'on ne puisse plus les mettre dans la boîte 3, et imaginer qu'on pourrait en apporter d'autres tous les jours. On peut aussi considérer l'ensemble des élèves de la classe et imaginer un grand sac que l'on classerait dans la boîte vingt-quatre. On laissera ainsi un certain flou sur ce que sont effectivement les boîtes, ce flou permettant une évolution de la notion introduite, par l'intermédiaire des activités proposées aux enfants.

Sur la désignation des boîtes

Un nombre pourrait être désigné par l'une des représentations d'un des ensembles de la classe. C'est ce qui est adopté par certains utilisateurs d'«images du nombre» : dominos, cartes, dessins de points, etc...

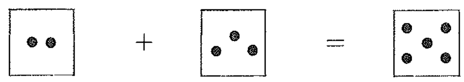
Par exemple :  ...

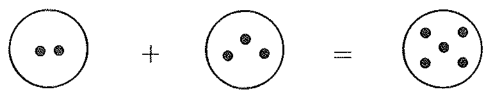
un deux trois quatre cinq ...

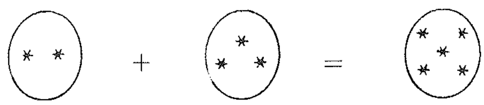
C'est un **ensemble** de points qui désigne alors un nombre, cet ensemble est élément de la classe désignée. Cette désignation possède des inconvénients au point de vue théorique, ce qui ne signifie pas qu'elle doive être systématiquement rejetée. Elle peut paraître naturelle aux enfants qui parfois la proposent eux-mêmes. Dans ce cas on l'adopte provisoirement, les limites de son utilisation apparaissant trés vitę.

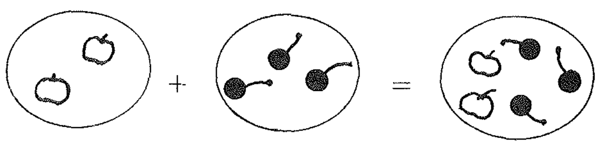
— on atteint très rapidement le seuil au delà duquel la perception globale du nombre est impossible, à moins d'imposer aux enfants un apprentissage bien inutile puisque cette désignation sera abandonnée par la suite. Malgré les dispositions particulières que l'on peut imaginer pour reconnaître d'un coup d'oeil qu'il y a treize points ou dix-neuf points, il semble peu judicieux d'enseigner des conventions, des règles de disposition de points, qui constituent, en fait, un codage qui n'est pas plus simple que celui qui conduit à la numération de position.

— un autre défaut plus grave de cette notation est qu'il n'y a pas de différence nette entre le signe d'un ensemble et le signe d'un nombre et de proche en proche on pourra écrire ou énoncer des phrases qui, bien que justifiables dans un certain contexte peuvent entrainer des confusions regrettables.

exemple : 

puis 

puis 

enfin 

2 pommes + 3 cerises = ... ? ? ? ?

VI – CODAGE DES NOMBRES

Dans les activités décrites aux paragraphes III et IV, les enfants n'ont pas nécessairement désigné les nouvelles boîtes. Il ne serait pas pratique d'imaginer un signe nouveau pour chaque boîte, il devient utile de mettre sur pied un codage qui permette de fabriquer autant de signes que l'on veut. C'est là que se placent les activités préparant la numération de position : activités d'échanges, de groupements qui aboutissent au codage des boîtes en différentes bases.

La nécessité d'un codage est ainsi motivée par le grand nombre de boîtes à désigner. Pour des raisons pratiques de manipulation, la numération de position en base dix n'est étudiée que si le principe de la numération de position est compris, ceci grâce à des activités en base quatre, trois ou six par exemple.

Note : Dans cet article nous n'avons pas employé le mot «cardinal». Au niveau du C.P. et même bien au delà ce mot n'apporte rien, aussi suffit-il de parler du nombre des éléments d'un ensemble.