

ETUDE DU CARACTERE DE DIVISIBILITE PAR 9
D'UN NOMBRE ECRIT EN BASE DIX

(leçons faites dans un C.M.2)

par Henriette LAÛGT

Il est recommandé, avant de lire l'étude suivante sur l'outil que peut être la désignation dans la démonstration et la compréhension du caractère de divisibilité des nombres, d'avoir en mémoire l'article paru dans «Grand IN numéro 3» sur la «Preuve de la multiplication». Nous ferons référence à cet article, de même qu'au livre : «Situations d'apprentissage en mathématique» de M. Robert (éd. O.C.D.L. 1971).

L'étude des classes résiduelles modulo neuf suit un développement parallèle à celle des classes résiduelles modulo trois. Les problèmes de désignation rencontrés sont les mêmes et nous les reprenons :

- en début d'étude, lors de la constitution du tableau des nombres ; au moment de la désignation de la classe d'un nombre ;
- pour préciser l'intérêt que trouvent les élèves à étudier en profondeur les caractères de divisibilité des nombres (par 3, par 2, par 5, par 6, par 4, par 9).

Le travail sur les classes résiduelles modulo neuf est la dernière étape de cette étude. Le temps passé là n'est pas perdu, il s'en faut ; il débouche sur une véritable rectification de la pensée chez les enfants qui ont appris mécaniquement à utiliser la «somme des chiffres» d'un nombre pour voir si ce dernier est divisible par 9.

I – TABLEAU DE NOMBRES.

On propose aux élèves de déterminer les restes des divisions des nombres entiers par 9 en effectuant réellement ces divisions. Le tableau des nombres est construit en fonction des quotients et des restes obtenus dans la division par 9. Les enfants de C.M. savent qu'il n'y a que 9 restes possibles ; ils préparent leur tableau sans difficulté et le remplissent en effectuant les divisions des entiers **successifs** par 9.

Ils obtiennent le tableau ci-contre :

reste quotient	0	1	2	3	4	5	6	7	8
0	0	1	2	3	4	5	6	7	8
1	9	10	11	12	13	14	15	16	17
2	18	19	20	21	22	23	24	25	26
3	27	28	29	30	31	32	33	34	35
.
.

Ce tableau fournit un classement des nombres entiers selon leurs restes dans la division par 9 d'une part (colonnes du tableau), d'autre part selon leurs quotients dans la division par 9 (lignes du tableau).

Nous ne retiendrons ici que le classement selon les restes.

Comment, alors, désigner les classes obtenues, c'est-à-dire les colonnes du tableau ?

II – DESIGNATION DE LA CLASSE D'UN NOMBRE.

2.1 Propriétés des classes :

Les élèves remarquent que :

- tout nombre peut être écrit dans le tableau ;
- un nombre ne peut être inscrit que dans une colonne bien définie ;
- chaque colonne ne contient que des nombres ayant même reste dans la division par 9 (on a construit le tableau ainsi) ;
- classe de 36, classe de 18, classe de 27, classe de 54, c'est la même classe.

On dit que 36, 18, 27, 54 sont des représentants de la classe des nombres qui ont pour reste 0 dans la division par 9. On peut donc prendre pour représentant d'une classe l'un quelconque des nombres inscrits dans la colonne correspondante.

– Les nombres de la première ligne du tableau sont les mêmes que les restes (car le quotient est 0).

2.2 Comment désigner une classe donnée de manière simple et pratique ?

Il faut tout d'abord que la convention adoptée soit la même pour toutes les classes. Désigner une classe par son plus petit représentant vient immédiatement à l'esprit. Ce qui donne :

$$\begin{aligned}\{0, 9, 18, 27, \dots\} &= \text{classe de } 0 \\ \{1, 10, 19, 28, \dots\} &= \text{classe de } 1 \\ \{7, 16, 25, 34, \dots\} &= \text{classe de } 7\end{aligned}$$

Les enfants remarquent alors, en regardant le tableau, que le plus petit représentant d'une classe donnée est précisément le reste des divisions par 9 de tous les nombres de la classe considérée. La désignation proposée s'avère donc pratique puisqu'elle permet de trouver à quelle classe appartient un nombre quelconque, même s'il n'est pas écrit dans le tableau.

Soit à classer 1321 :

$$1321 = (9 \times 146) + 7. \text{ Donc, classe de } 1321 = \text{classe de } 7.$$

Il est long d'écrire «classe de n», on peut alléger cette écriture en écrivant $Cl(n)$ ou $C(n)$ ou \bar{n} ou \dot{n} . Les élèves de ce C.M.2 ont choisi de désigner «classe de n» par \dot{n} .

Elles écrivent donc par exemple :

$$\begin{aligned}\widehat{\dot{35}} &= \dot{8} && \text{(on lit «35 point - égale -} \\ \widehat{\dot{135}} &= \dot{0} && \text{8 point»)} \\ \widehat{\dot{1321}} &= \dot{7}\end{aligned}$$

III – ETABLIR LE CARACTERE DE DIVISIBILITE D'UN NOMBRE PAR 9.

Il est intéressant de préciser ici comment faire acquérir aux élèves la règle de divisibilité par 9 qui leur rendra service et qu'il est regrettable de donner mécaniquement : cette approche est une initiation à une démonstration mathématique rigoureuse, d'autant plus intéressante à construire que trop souvent nous sommes obligés, au niveau enseignement élémentaire, de procéder par constatations multiples faute de pouvoir démontrer rigoureusement.

3.1 Pour établir l'existence de la somme et du produit de deux classes résiduelles modulo neuf, nous procédons par manipulations multiples, comme il est précisé dans Grand IN numéro 3, page 73. L'étude des lois \oplus et \otimes est alors menée comme cela a été fait dans l'article cité ci-dessus avec les classes résiduelles modulo trois.

(Remarque : C'est pour des raisons pratiques que nous désignons les lois addition et multiplication dans l'ensemble des classes par \oplus et \otimes au lieu de $\dot{+}$ et $\dot{\times}$, comme nous l'avions fait dans Grand IN numéro 3).

Par de nombreuses manipulations, les règles suivantes se font jour et sont assimilées par les élèves.

1) La classe de la somme de deux nombres est égale à la somme des classes de ces nombres.

2) La classe du produit de deux nombres est égale au produit des classes de ces nombres.

Ces règles ne sont pas énoncées par les enfants mais appréhendées à la suite des nombreux exercices exécutés pour constater le fonctionnement des lois \oplus et \otimes sur l'ensemble des classes résiduelles modulo neuf : $\{\dot{0}, \dot{1}, \dot{2}, \dot{3}, \dot{4}, \dot{5}, \dot{6}, \dot{7}, \dot{8}\}$.

3.2 On peut alors, et seulement maintenant, aborder la démonstration suivante, d'abord sur des nombres donnés pour établir le processus plus clairement, et ensuite en généralisant l'étude.

Soit, en base dix, le nombre 2 743. Il peut s'écrire :

$$2\ 743 = (2 \times 1\ 000) + (7 \times 100) + (4 \times 10) + (3 \times 1).$$

On applique les règles découvertes en 3.1 par les enfants :

$$\widehat{2\ 743} = (\dot{2} \otimes \widehat{1\ 000}) \oplus (\dot{7} \otimes \widehat{100}) \oplus (\dot{4} \otimes \widehat{10}) \oplus (\dot{3} \otimes \dot{1})$$

$$\text{Or, } 10 = 9 + 1 \quad \text{d'où } 10 \in \dot{1}$$

$$100 = 99 + 1 \quad 100 \in \dot{1}$$

$$1\ 000 = 999 + 1 \quad 1\ 000 \in \dot{1}$$

$$10\ 000 = 9\ 999 + 1 \quad 10\ 000 \in \dot{1}$$

Par conséquent, on peut écrire :

$$\widehat{2\ 743} = (\dot{2} \otimes \dot{1}) \oplus (\dot{7} \otimes \dot{1}) \oplus (\dot{4} \otimes \dot{1}) \oplus (\dot{3} \otimes \dot{1})$$

$\dot{1}$ a été défini comme élément neutre de l'opération \otimes sur les classes de l'ensemble $\{\dot{0}, \dot{1}, \dot{2}, \dot{3}, \dot{4}, \dot{5}, \dot{6}, \dot{7}, \dot{8}\}$

Donc $\overbrace{2\ 743}^{\cdot} = \overset{\cdot}{2} \oplus \overset{\cdot}{7} \oplus \overset{\cdot}{4} \oplus \overset{\cdot}{3}$ soit $\overbrace{2\ 743}^{\cdot} = \overbrace{2 + 7 + 4 + 3}^{\cdot}$.

La classe de 2 743 égale la somme des classes des nombres 2, 7, 4, 3, c'est-à-dire la classe de la somme $2 + 7 + 4 + 3$.

A ce stade du travail, les enfants qui connaissent empiriquement le caractère de divisibilité d'un nombre par 9, reconnaissent soudain le véritable sens de la règle qu'elles utilisaient : elles comprennent que chercher la somme des chiffres d'un nombre revient à chercher un représentant de la classe de ce nombre (c'est ainsi que $2 + 7 + 4 + 3$, soit 16, est un représentant de la classe de 2 743), puis le représentant le plus petit de cette classe (ici, 7), ce qui permet de préciser la classe du nombre en question (ici, $\overset{\cdot}{7}$). Le véritable calcul se fait donc sur les classes et non sur les nombres. C'est pourquoi nous disions au début de cet article qu'il y a vraiment rectification de la pensée des élèves.

3.3 Généralisation de la démonstration.

Soit un nombre $a\ b\ c\ d$ écrit en base dix.

$$\begin{aligned} a\ b\ c\ d &= (a \times 1\ 000) + (b \times 100) + (c \times 10) + (d \times 1) \\ \overbrace{a\ b\ c\ d}^{\cdot} &= (\overset{\cdot}{a} \otimes \overset{\cdot}{1}) \oplus (\overset{\cdot}{b} \otimes \overset{\cdot}{1}) \oplus (\overset{\cdot}{c} \otimes \overset{\cdot}{1}) \oplus (\overset{\cdot}{d} \otimes \overset{\cdot}{1}) \\ &= \overset{\cdot}{a} \oplus \overset{\cdot}{b} \oplus \overset{\cdot}{c} \oplus \overset{\cdot}{d} \\ &= \overbrace{a + b + c + d}^{\cdot}. \end{aligned}$$

IV – CONCLUSION.

L'intérêt de l'étude du caractère de divisibilité des nombres par 9 réside dans l'approfondissement de la compréhension de la division euclidienne, en particulier pour les cas où le quotient est 0.

En utilisant la somme des classes de deux nombres et le produit des classes de deux nombres, on établit ensuite aisément les «preuves par 9» des quatre opérations sur les entiers : addition, soustraction, multiplication et division, preuves basées elles aussi sur les classes résiduelles des nombres dans la division par 9.