DESIGNATION – EGALITE

par le Comité de Rédaction

I – DESIGNATION.

Toute communication passe par l'intermédiaire de signes représentant les «objets» dont on veut parler. A chaque «objet» sont en général associés plusieurs signes (noms, symboles, représentations plus ou moins concrètes, dessins, etc...).

Quand nous disons «voici ma fille» aussi bien en montrant une photo qu'en présentant une enfant, il n'y a d'ambiguïté pour personne, et vouloir préciser qu'il y a une différence entre l'être vivant et la photographie semble superflu.

Ajouter que l'être vivant est le **signifié** et que la photo est un **signifiant** peut paraître pédant.

Pourtant il est indispensable de bien préciser ces notions en classe*, d'autant plus que l'enfant a tendance à confondre l'objet désigné (**signifié**) et le signe utilisé pour le désigner (**signifiant**) surtout si ce signe est un dessin de l'objet.

Bien qu'il soit facile de faire sentir la différence entre un chien et l'image d'un chien, il est préférable, quand on parle d'objets, de choisir des objets se trouvant dans la classe plutôt que des dessins d'objets qui sont déjà des signifiants. De plus, l'utilisation de dessins d'objets peut créer de sérieuses difficultés, par exemple, si les objets à considérer ont la même forme, la même couleur, un seul dessin peut être le signifiant de chacun de ces objets, or l'existence d'un signifiant commun à plusieurs signifiés crée des malentendus aussi bien en langage ordinaire qu'en langage mathématique.

* Sans pour autant employer les mots de signifé et signifiant.

Pluralité des signifiants pour désigner un même objet.

Le signifié est unique mais il peut avoir de nombreux signifiants et, suivant le contexte, l'un d'eux sera privilégié.

Exemple.

1.1 «Ma fille», «Babette», «Elisabeth», «la photo que je montre» seront autant de signifiants d'un signifié unique : l'enfant que j'évoque.

1.2 Pour désigner ma voiture, lors d'une déclaration d'accident j'utilise son numéro d'immatriculation ; avec mes amis je parle de «Titine» ; pour la localiser sur un parking si elle est la seule voiture jaune, je peux parler de «la voiture jaune».

1.3 Il en est de même quand le signifié est un être mathématique (une création de l'esprit, une abstraction); prenons quelques exemples : le nombre d'éléments d'un ensemble, celui de l'ensemble des Muses, par exemple, pourrait avoir pour signifiants : sept ; 7 ; VII ; 11 en base six, etc..., sans oublier les différents signifiants dans les langues étrangères et les codes de numération égyptien, chinois, etc... Autre exemple d'être mathématique auquel on donne fréquemment divers signifiants : la droite; la droite passant par les points A, B et C peut être désignée par AB ou (AB) ou BC ou AC ou tout simplement D.

En mathématique la pluralité des signifiants pour désigner un même objet (synonymie) est souvent une nécessité. Cela surprend parfois un peu au premier abord, car pourquoi donner des noms différents au même objet ? C'est qu'on ne sait pas a priori qu'il s'agit d'un objet déjà désigné d'une certaine façon. Par exemple, 5×4 désigne, tout comme 20, le nombre vingt.

C'est justement un des buts de la science de pouvoir reconnaître le même objet sous des désignations différentes, issues de définitions différentes.

Trouver pour un signifié dont on possède déjà un signifiant, le signifiant le mieux adapté au contexte est en soi une activité formatrice. Par exemple, si on exprime les nombres en système décimal on remplace 5×4 par 20 ; par contre, si on exprime les nombres selon leur décomposition en produit de facteurs premiers on remplace 20 par $2^2 \times 5$ et si initialement on avait 5×4, passer par l'intermédiaire 20 est un détour.

Unicité du signifié correspondant à un signifiant donné.

Si le prénom Valérie, dans une famille, ne désigne en principe qu'un seul enfant, dans une classe il peut en désigner plusieurs.

Contrairement à ce qui se passe dans le langage ordinaire, où à un signifiant peuvent correspondre plusieurs signifés, le langage mathématique, comme tout langage scientifique, demande **qu'à un signifiant donné ne corresponde qu'un signifié** (on s'interdit en principe l'homonymie).

Mais si l'on voulait appliquer scrupuleusement cette règle, on ne disposerait pas d'un nombre de signes suffisants. Il faut donc la concevoir dans un contexte donné : la lettre A, dans un paragraphe ne représentera pas deux ensembles différents. Mais A peut désigner un jour l'ensemble des élèves d'une classe, et un autre jour un objet, ou encore l'ensemble $\{2 ; 15 ; 3847\}$.

Comme le dit Guy BROUSSEAU (I.R.E.M. de Bordeaux) : «avant d'utiliser un signe avec une nouvelle signification, il faut procéder à une sorte d'effacement de la signification précédente et à une nouvelle définition. Mais certains signes ont une signification suffisamment générale et importante pour qu'on ne les change jamais». Tels, par exemple : 3 (le chiffre), $\mathbb{N}$ (ensemble des naturels).

Pour résumer les deux paragraphes précédents :

Chaque signifié peut avoir plusieurs signifiants mais on s'interdit, dans un discours donné, de choisir le même signifiant pour deux signifiés différents.

Arbitraire du signe associé à un objet pour le désigner.

Le lien entre le signifiant et l'objet désigné est a priori purement conventionnel. Il est important que cette convention soit faite explicitement et acceptée par tous ceux qui communiquent au sujet de cet objet.

Lorsqu'on laisse choisir les enfants ils ont tendance à choisir d'abord un signe ayant un lien visuel ou affectif avec l'objet correspondant. Mais très vite ils se rendent compte que ce n'est pas obligatoire et affectent alors des signes qui peuvent n'avoir aucun rapport avec les objets désignés.

Pour de multiples raisons (usage, simplicité, mémorisation, analogie...) le choix des signes, bien que conventionnel, n'est pas forcément arbitraire.

Quand le signifiant devient signifié.

Dans une classe, considérons un ensemble d'élèves. Si chaque élève colle sa photo au tableau nous obtiendrons un signifiant particulier de cet ensemble que l'on appelle communément une représentation de l'ensemble.

L'ensemble des photos collées au tableau est lui-même un signifié si je ne fais plus référence aux élèves qu'elles représentent mais aux photos elles-mêmes.

C'est là un cas où le même objet (l'ensemble des photos) est à la fois signifiant (de l'ensemble des élèves) et signifié (lui-même). Ce cas est fréquent, c'est pour cela qu'il convient de bien préciser chaque fois le contexte.

Conclusion.

Ces quelques idées montrent l'importance et la complexité de la désignation. Tout n'a pas été dit et il importe que chacun y réfléchisse quel que soit le niveau auquel il enseigne.

II – EGALITE.

Nous développerons peu ce thème ici car il fait l'objet de tout un chapitre dans la brochure «MOTS» éditée par l'Association des Professeurs de Mathématique (voir Grand $\mathbb{N}$ numéro 3 – page 4).

L'égalité est une façon de se repérer dans l'univers des signifiants. On l'introduit au moment où l'on en a besoin c'est-à-dire lorsqu'on a plusieurs signifiants pour un même signifié.

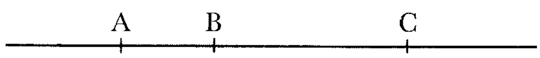
On écrit le signe = (lu «est égal à» ou «égale») entre deux signifiants d'un même être. (Le verbe «égaler» employé en mathématique signifie «désigne le même être que» et a donc un sens beaucoup plus restreint que dans la vie courante).

Dans les exemples cités précédemment on pourrait écrire :

Ma fille = Babette

$11_{(six)} = 7_{(dix)}$

$20 = 5 \times 4$



$(AB) = (AC)$

Remarquons cependant que le signe = fait partie du langage mathématique et que **nous convenons** de ne l'utiliser que dans ce langage par la suite. Ainsi nous nous interdirons d'écrire la première des quatre égalités ci-dessus.

Dire que a est égal à b, ou écrire que a = b, c'est dire que l'objet représenté par a est l'objet représenté par b.

Evidemment, quelle que soit la signification de a, l'égalité a = a est valable mais n'apporte aucune information.

Remarquons que la phrase «a et b désignent le même objet» se traduit aussi bien par : a = b que par b = a.

Exercice.

Si un objet a un signifiant u, on peut écrire la seule égalité u = u.
S'il a deux signifiants u et v, on peut écrire les quatre égalités u = u, u = v, v = u, v = v.
S'il a trois signifiants u, v, w, combien peut-on écrire d'égalités ? et avec quatre signifiants ? avec n signifiants ?

Dans la classe, si la notion d'égalité est comprise les égalités viendront toutes seules. Si, par contre, le signe = n'est utilisé que pour des égalités entre nombres, l'enfant ne fera que réciter des formules, il ne sera pas capable d'écrire lui-même des égalités, ce qui serait dommage. Pour s'en persuader il suffit de voir des élèves de C.P. écrire sans se lasser des dizaines d'égalités : ils n'auraient pas autant de plaisir s'ils devaient les copier au tableau.

Propriétés de l'égalité.

(Voir Grand IN numéro 3, page 34).

Remarquons que l'égalité est une relation réflexive, symétrique et transitive :
- réflexive car, quel que soit l'élément x : x = x ;
- symétrique car, quels que soient les éléments x et y :
  si x = y, alors y = x ;
- transitive car, quels que soient les éléments x, y et z :

$$\text{si } \left.\begin{array}{c} x = y \\ \text{et} \\ y = z \end{array}\right\} \quad \text{alors } x = z.$$

Remarque.

Ne pas oublier d'introduire lorsque l'égalité «a = b» est fausse, l'écriture «a ≠ b» (lue «a n'est pas égal à b»).