UNE ETUDE DE SITUATIONS ET D'INVARIANTS : OUTIL POUR L'ANALYSE DE LA CONSTRUCTION DU CONCEPT D'AIRE AU COLLEGE

Paula MOREIRA BALTAR [1]
Equipe Didactique des Mathématiques du Laboratoire Leibniz - Grenoble 1
LEMAT - Universidade Federal de Pernambuco - Brésil.

1. Introduction

Cet article, issu de notre travail de thèse[2], est la suite d'un article paru dans Petit x n°43 intitulé « A propos de l'apprentissage du concept d'aire », dans lequel nous avions présenté un panorama des problèmes d'apprentissage autour du concept d'aire à partir de l'étude des programmes français[3], de l'analyse des résultats d'évaluations nationales et des recherches antérieures sur le thème.

De ce panorama[4] nous retenons l'importance et la variété des difficultés d'apprentissage autour du concept d'aire de surfaces planes. Les résultats de recherches antérieures à la notre apportent des éléments d'analyse des erreurs des élèves. En particulier, la modélisation en termes de conceptions géométrique et numérique (Douady et Perrin-Glorian, 1989 et Balacheff, 1988) a mis en évidence des difficultés

[1] Boursière de la CAPES (Fundação de Coordenação de Aperfeiçoamento do Pessoal de Nível Superior) Organisme attaché au Ministère de l'Education Nationale du Brésil.

[2] Thèse préparée sous la direction de Claude Comiti, au sein de l'Equipe Didactique des Mathématiques du Laboratoire LEIBNIZ de Grenoble.

[3] Programmes antérieurs aux changements de 1995.

[4] Cf. Moreira Baltar (1997).

d'apprentissage liées au traitement des problèmes d'aire où seuls sont pris en compte le point de vue des surfaces ou celui des nombres et non l'établissement de relations entre ces deux points de vue.

Pour aller plus loin dans l'étude des conditions favorisant la construction du concept d'aire au niveau de l'école élémentaire et de début de collège, nous avons construit un outil d'analyse complémentaire à la modélisation en termes de conceptions géométrique et numérique. Il s'agit d'une étude des situations[5] qui donnent du sens au concept d'aire, dans laquelle nous avons classé différents types de situations, ainsi que les invariants sous-jacents à l'activité de l'élève lorsqu'il cherche une solution aux problèmes qui lui sont posés. L'objet de cet article est l'état actuel de cette étude de situations.

2. Cadre théorique

Nous nous plaçons, pour élaborer cette étude, dans le cadre théorique défini par Vergnaud (1990) en ce qui concerne concept et champ conceptuel. Le concept d'aire sera donc considéré de manière pragmatique comme un triplet de trois ensembles indissociables :

S - ensemble des situations qui lui donnent du sens (la référence) ;

I - ensemble des invariants sur lesquels repose l'opérationnalité des schèmes (le signifié) ;

S - ensemble des formes, langagières et non langagières, qui permettent de représenter symboliquement le concept d'aire, ses propriétés, les situations et les procédures de traitement (le signifiant).

Pour l'instant, notre étude s'est centrée sur les ensembles de situations et d'invariants. Le point de vue des représentations symboliques en jeu reste très implicite et beaucoup moins systématisé que les deux autres, bien que sa présence dans nos analyses puisse être attestée par les réflexions autour du rôle des formules avec ses lectures variées ainsi que celles autour des figures géométriques.

Le concept d'aire de surface plane a une place importante dans le champ conceptuel des grandeurs spatiales. Ce champ conceptuel regroupe différents domaines mathématiques en étroite relation. Le fait que les situations renvoient simultanément à la géométrie et aux nombres - faisant intervenir les structures additives et les structures multiplicatives - rend particulièrement difficile l'analyse des erreurs commises par les élèves et la recherche des sources de ces erreurs. Leur origine peut être numérique ou géométrique ou se situer dans les relations fonctionnelles entre grandeurs de différentes dimensions ou même dans la démarche exigeant de relier différents domaines dans le traitement d'un problème.

Nous avons choisi de restreindre notre étude aux situations où le concept d'aire intervient, et plus particulièrement à celles qui peuvent a priori être abordées au niveau de l'école élémentaire et du début de collège. Il s'agit alors d'effectuer une classification de ces situations en classes disjointes ou emboîtées susceptibles de donner du sens à la compréhension progressive du concept d'aire par les élèves.

[5] Nous utilisons le terme « situation » avec le sens qui lui est attribué dans la théorie des champs conceptuels (Vergnaud, 1990, pp.149-151).

Nous retenons des travaux de Vergnaud (1990) que l'élaboration d'une classification des situations résulte à la fois de considérations mathématiques et de considérations psychologiques.

> « L'une des gageures que doit tenir le psychologue qui s'intéresse à l'apprentissage des mathématiques est d'établir des classifications, décrire des procédures, formuler des connaissances-en-acte, analyser la structure et la fonction des énonciations et des représentations symboliques, dans des termes qui aient un sens mathématique. La spécificité des apprentissages mathématiques est dans les mathématiques elles-mêmes. Cela ne signifie pas que la théorie de l'apprentissage des mathématiques soit toute entière contenue dans les mathématiques. » (Vergnaud, 1990, p.156)

Pour chacune des classes de situations, nous essayons de décrire des procédures possibles de résolution et de mettre en évidence les invariants qui sont sous-jacents à ces procédures. Ceci nous permet de formuler des connaissances-en-acte susceptibles d'être mises en œuvre. Nous explicitons également des variables didactiques dont les différentes valeurs possibles favorisent ou bloquent la mise en œuvre de certaines procédures. La complexité des situations dépend des choix effectués pour les valeurs de ces variables. Mais nous verrons aussi, à travers des exemples, que le choix par l'élève de certaines procédures provoque un emboîtement de situations (ce qui exige la mise en œuvre de procédures qui relèvent de situations d'un autre type que celui proposé au départ). Le point de vue des variables et des situations proprement dites ne suffit pas pour analyser ces situations emboîtées. C'est l'étude systématique des procédures possibles pour les différents types de situations qui va permettre de mettre en évidence l'emboîtement provoqué par tel ou tel choix de procédure.

3. Critères de classification des situations autour du concept d'aire de surfaces planes

Nous avons classé les situations à partir d'allers-retours entre d'une part l'étude du concept d'aire du point de vue du savoir mathématique[6], d'autre part, l'élaboration d'un inventaire de situations relevées dans des manuels scolaires, dans des activités proposées par les IREM, dans des recherches didactiques antérieures, dans des évaluations de l'APMEP[7] (au niveau de collège) et du Ministère de l'Education Nationale (entrée en sixième).

Nous adoptons en tant qu'hypothèse de travail que « Le développement dans l'enseignement du concept d'aire en tant que grandeur permet aux élèves d'établir les relations nécessaires entre les deux cadres (géométrique et numérique) ». (Douady et Perrin-Glorian, 1989). Cette approche de l'aire en tant que grandeur revient à considérer l'aire d'une surface comme une propriété invariante par un certain nombre d'opérations

---

[6] Cette étude du concept d'aire du point de vue du savoir mathématique a été développée dans notre travail de thèse (Moreira Baltar, 1996).

[7] APMEP = Association des Professeurs de Mathématique de l'Enseignement Public.

(par exemple, les surfaces équidécomposables ont même aire et une unité d'aire étant choisie, les surfaces de même mesure ont même aire).

D'un point de vue purement mathématique, la relation d'équivalence « avoir même aire » (qui permet de considérer l'aire en tant que grandeur) est définie par le choix d'une unité suivi de la mesure des surfaces : deux surfaces de même mesure ont même aire. Cependant, les recherches antérieures à la nôtre montrent que, du point de vue de l'apprentissage par les élèves, la construction de cette relation d'équivalence doit être antérieure à la mesure ; elle prend alors son support dans l'équidécomposabilité, par l'intermédiaire de la procédure de « découpage-recollement »[8].

Le point de vue qui nous intéresse ici est celui de l'apprentissage à l'école élémentaire et en début de collège que nous représentons comme suit :

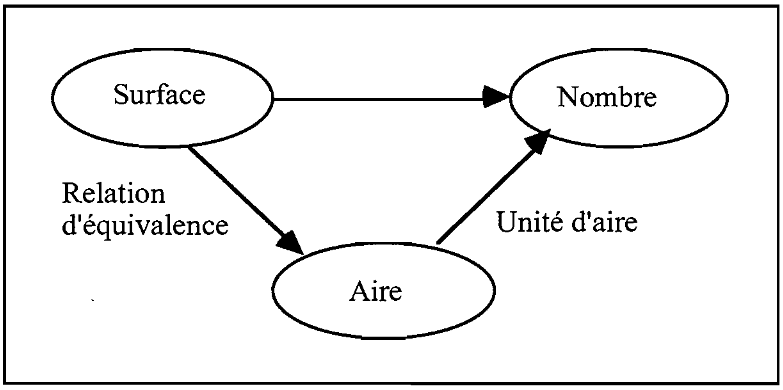


Schéma 1

Ce diagramme met en évidence des éléments de base pour notre étude de situations, à savoir :
- les surfaces planes (objets du cadre géométrique) ;
- les aires (objets du cadre des grandeurs) ;
- les mesures d'aire - nombres réels positifs (objets du cadre numérique) ;
- la relation d'équivalence 'avoir même aire' (objet qui permet le passage entre le cadre géométrique et celui des grandeurs) ;
- les unités d'aire (objets qui permettent d'établir le passage entre le cadre des grandeurs et le numérique).

La prise en compte de ces éléments nous permet d'analyser les situations où la notion d'aire est considérée en tant que grandeur unidimensionnelle. Cependant, l'aire est aussi une grandeur bidimensionnelle par rapport à la longueur, ce qui peut être représenté par l'équation aux dimensions $[A] = [L]^2$. Les différents types de situation font intervenir de manière inégale chacun des éléments du schéma suivant :

---

[8] Lorsque nous parlons ici de découpage-recollement il s'agit toujours d'un découpage recollement convenable, c'est à dire sans perte ni chevauchement, conservant ainsi l'aire.

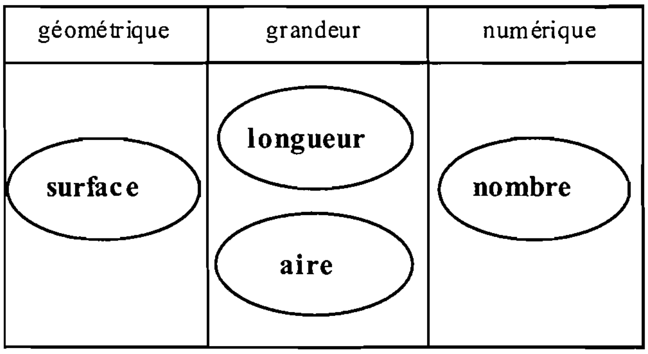


Schéma 2

Nous nous limiterons ici aux trois types de situations suivants : les situations de comparaison, celles de mesure et celles de production de surfaces.

Les situations de comparaison se placent essentiellement dans le cadre des grandeurs : quand on compare les aires de deux surfaces, on décide en particulier, si elles appartiennent à une même classe d'équivalence. Rien n'empêche que l'on utilise les autres cadres (géométrique et numérique) dans les situations de comparaison, mais leur intervention reste secondaire par rapport à celui des grandeurs.

Dans les situations de mesure, la place privilégiée est accordée au numérique et au passage de la grandeur au nombre, par le choix d'une unité. Le résultat attendu dans une situation de ce type est un nombre suivi d'une unité.

Les situations de production sont différentes des précédentes du point de vue de la tâche cognitive à la charge de l'élève. Si pour les comparaisons et les mesures il n'y a qu'une réponse juste pour chaque situation, les situations de production admettent plusieurs réponses exactes. De plus, bien que le résultat attendu soit une surface (objet géométrique), l'intervention des autres cadres peut être également très importante.

Dans l'étude que nous présentons ci-dessous de chacun de ces types de situation, nous explicitons des variables didactiques, ainsi que des procédures de traitement possibles en différenciant les procédures numériques et les non numériques (dont les procédures géométriques) et en prenant en compte la « nature des grandeurs en jeu » ce que nous conduit à distinguer trois types de procédures selon que :
- l'aire est traitée en tant que grandeur unidimensionnelle ;
- d'autres grandeurs que l'aire et les longueurs interviennent ;
- l'aire intervient en tant que grandeur bidimensionnelle.

4. Situations de comparaison

4.1. Variables didactiques

Nous retenons les quatre variables suivantes dont nous précisons ci-dessous les valeurs prises en compte dans notre étude :

- Nature de la situation : Statique ou dynamique

Les situations de comparaison statiques sont celles où l'on dispose des surfaces à comparer et que celles-ci ne subissent pas des effets de mouvement. Les situations dynamiques de comparaison sont celles qui concernent l'étude de la variation ou de la conservation de l'aire au cours de déformations et de transformations géométriques.

- Nature de la tâche : Sériation ou comparaison

Cette distinction est importante, car dans les problèmes de sériation la mise en œuvre de la transitivité de la relation d'ordre est nécessaire alors que ceci n'est pas en jeu lorsqu'on compare les aires de deux surfaces seulement. Il y a donc une complexification de la tâche, lorsque l'on passe de la comparaison des aires (ou des périmètres) de deux surfaces à la sériation de plusieurs surfaces.

- Nature des surfaces à comparer : surfaces usuelles ou surfaces quelconques.
- Type de papier sur lequel sont dessinées les surfaces à comparer : papier blanc, papier quadrillé et papier pointé

4.2. Classement des procédures possibles et mise en évidence des invariants

Parmi les procédures de résolution envisageables pour le traitement des situations de comparaison, certaines sont basées sur des théorèmes-en-acte exacts, d'autres sur des théorèmes-en-acte erronés, au sens du savoir mathématique de référence. Nous nous limiterons ci-dessous à l'étude des procédures basées sur des invariants pertinents relativement aux concepts dont l'apprentissage est visé.

a) Procédures numériques ou non numériques

La première distinction consiste en classer les procédures selon qu'elles sont numériques ou non numériques. En effet, dès qu'il y a une comparaison numérique (si l'on ne dispose pas des mesures des aires) il y a emboîtement d'une situation de mesure à l'intérieur de la situation de comparaison.

Les procédures de comparaison numérique reposent sur les invariants suivants : « Étant choisie une unité de mesure, la surface dont la mesure est plus grande aura une aire plus grande », et « deux surfaces de même mesure ont même aire ». Autrement dit, l'ordre établi pour les mesures est le même que pour les aires.

La mise en œuvre de ce type de procédure renforce les conceptions selon lesquelles l'aire est un nombre. Selon les cas, ceci peut correspondre à l'un des invariants suivants :

L'aire est le nombre de carreaux nécessaires pour recouvrir une surface.

L'aire est un nombre obtenu par l'application d'une formule.

Cependant, ces procédures participent aussi au passage des conceptions géométriques à la construction de l'aire en tant que grandeur, dans la mesure où deux surfaces de même mesure ont même aire, indépendamment de leur forme. Ceci se traduit par l'invariant primitif suivant : *L'aire est une propriété de la surface invariante par certaines opérations (une grandeur).*

b) Procédures faisant intervenir l'aire en tant que grandeur unidimensionnelle

On compare ici les aires de deux surfaces sans s'intéresser aux longueurs. Il s'agit de l'aire en tant que grandeur unidimensionnelle. Les recherches antérieures montrent que ce type de procédure est acquis par les élèves avant celles où les longueurs interviennent[9].

• Inclusion et superposition
Ces procédures sont essentiellement géométriques. Les formes des surfaces à comparer jouent un rôle très important et le cadre numérique n'intervient pas. Si une surface S peut être ramenée, par déplacement, à l'intérieur d'une surface S' on dira que son aire est plus petite que celle de S'. S'il y a superposition on dira que les deux surfaces ont même aire. Les théorèmes-en-acte sous-jacents à ces procédures sont ceux correspondant à l'invariance par isométrie et l'additivité des aires, soit
$A(f(S)) = A(S)$; pour une isométrie f et une surface S
Si S et S' sont quasi-disjointes, $A(S \cup S') = A(S) + A(S')$.

La mise en œuvre de ces procédures peut rester attachée à une conception géométrique de l'aire qui peut être formulée sous la forme de l'invariant suivant : *L'aire est la place occupée par une surface, dans le sens de l'encombrement.*
En même temps, elle peut participer à la construction de l'aire en tant que grandeur. D'abord parce que le premier cas d'égalité des aires est celui de deux surfaces superposables. Ensuite, parce que la possibilité de comparer par inclusion et superposition est une connaissance importante dans le dépassement d'une conception numérique de l'aire vers une conception de l'aire en tant que grandeur, ce qui se traduit par l'invariant suivant : *L'aire est une propriété de la surface invariante par certaines opérations (une grandeur).*

• Équidécomposabilité
Cette procédure consiste en la décomposition des figures à comparer et la comparaison des morceaux ainsi obtenus. Elle repose sur le théorème en acte suivant : *Deux surfaces équidécomposables ont même aire.*
La procédure de comparaison par équidécomposabilité n'est attachée ni aux conceptions numériques ni aux conceptions géométriques. Elle joue un rôle très important dans l'acquisition de l'aire en tant que grandeur et renforce donc à l'invariant : *L'aire est une propriété de la surface invariante par certaines opérations (une grandeur).*

c) Procédures faisant intervenir d'autres grandeurs que l'aire et les longueurs

Le recours à des procédures faisant intervenir d'autres grandeurs que l'aire et les longueurs permet de ramener la comparaison à une seule dimension, pour un ensemble de surfaces plus large que celui atteint par les procédures décrites ci-dessus. On évite le caractère bidimensionnel de l'aire, ce qui facilite la tâche pour les élèves. En même temps,

---

[9] Cf. Moreira Baltar (1997).

on évite l'ambiguïté quant au sens de l'aire liée à la place occupée par la surface (qui peut être associé par les élèves à une notion de type encombrement).

• Comparaison des masses et comparaison des capacités (pots de peinture, par exemple)

Dans les procédures basées sur la comparaison des masses ou des capacités, il n'y a pas de recours direct au cadre numérique, mais le cadre géométrique n'est pas prégnant comme dans le cas des comparaisons par inclusion. La possibilité de comparer deux surfaces par leurs masses ne dépend pas de la forme des surfaces mais seulement du fait qu'elles sont réalisées dans un même matériau. C'est un point de vue qui renforce beaucoup l'idée d'aire comme grandeur, puisqu'il n'y a de référence ni à la forme ni au nombre.

Quand il y a recours à la comparaison des masses, l'invariant sous-jacent est la relation entre les grandeurs masse et aire. En fait, puisqu'il s'agit du même matériau, la densité est la même et l'épaisseur est supposée constante. Le recours au volume de peinture nécessaire pour peindre les surfaces (nombre de pots de peinture utilisé dans les recherches de Rogalski, 1982) permet également de mettre en œuvre un mode de travail unidimensionnel et de prendre du recul par rapport à la forme des surface.

La mise en œuvre de ce type de procédure favorise l'appropriation de l'invariant correspondant à l'aire en tant que grandeur. En particulier, le sens d'avoir même aire est élargi :

- deux surfaces de même masse, réalisées dans un même matériau ont même aire ;
- deux surfaces couvertes par un même nombre de pots de peinture ont même aire.

d) Procédures faisant intervenir la notion d'aire en tant que grandeur bidimensionnelle

• Comparaison de longueurs caractéristiques de la figure

La mise en œuvre de ce type de procédure est particulièrement liée aux surfaces usuelles (triangles et parallélogrammes par exemple). Le théorème en acte sous-jacent est le suivant *Deux triangles (ou parallélogrammes) de même base et même hauteur ont même aire.*

Elle correspond à l'usage (implicite ou explicite) de connaissances relevant des relations fonctionnelles entre les longueurs et les aires. La connaissance des formules de l'aire des surfaces usuelles joue un rôle important, mais le numérique n'intervient pas. Les formules ne sont pas utilisées en tant que moyen de calcul, mais en tant que représentation de propriétés géométriques permettant de conserver l'aire : la formule de l'aire du triangle exprime la bilinéarité de l'aire du triangle par rapport à une base et à la hauteur correspondante.

4.3. Procédures possibles et situations

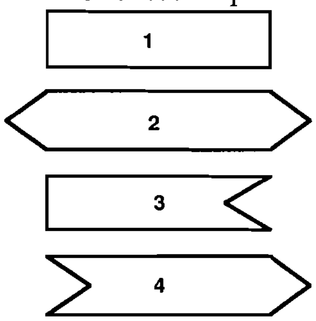
Examinons à l'aide de quelques exemples de situations, comment les différentes valeurs de ces variables favorisent la mise en œuvre de certaines procédures plutôt que d'autres.

La plupart des exemples de situations analysées ici[10] sont issus du pré-test proposé à des élèves de cinquième dans le cadre de l'ingénierie didactique conçue et expérimentée dans notre travail de thèse. Les élèves disposaient de papier calque, papier quadrillé (au demi-centimètre) et papier pointé à volonté. L'usage d'instruments de dessin géométrique et de la calculatrice était autorisé. Le pré-test était un travail individuel, de deux heures, la consultation des cahiers et manuels étant interdite. Les élèves de cette classe n'avaient pas eu d'enseignement sur le concept d'aire pendant l'année scolaire en cours. De plus, d'après les programmes [11] en vigueur au moment de la passation de ce pré-test, en début de cinquième, les élèves devraient connaître les unités couramment utilisées de longueur et d'aire, être capables d'utiliser un formulaire pour calculer l'aire d'une figure, savoir calculer l'aire et le périmètre d'un carré et d'un rectangle, comparer des aires planes, déterminer des aires à l'aide de reports, de décompositions, de découpages et de recollements, de quadrillages et d'encadrements.

- Situation 1

Il s'agit d'une situation statique de sériation. Les surfaces à comparer sont quelconques, dessinées sur papier blanc.

Voici ci-dessous quatre surfaces :



a) Peux-tu les ranger de celle qui a la plus petite aire à celle qui a la plus grande aire ? Est-ce que parmi ces surfaces il y en a qui ont même aire ? Justifie tes réponses.
b) Peux-tu les ranger de celle qui a le plus petit périmètre à celle qui a le plus grand périmètre ? Parmi ces surfaces il y en a qui ont même périmètre ? Justifie tes réponses.

Nous nous intéressons ici essentiellement à la sériation des surfaces selon les aires. Le choix de demander également la sériation des surfaces selon les périmètres se justifie par notre volonté de vérifier la mise en œuvre de procédures témoignant de difficultés d'apprentissage liées à la dissociation de l'aire et du périmètre. Nous pouvons envisager plusieurs types de procédure possibles conduisant à des réponses exactes ou erronées.

Les procédures d'inclusion, superposition et découpage-recollement sont favorisées par la comparaison perceptive et par l'usage de papier calque. L'inclusion et la superposition permettent de conclure que l'aire de la surface 2 est plus grande que celle de

[10] Nous préciserons au fur et à mesure les situations qui ne sont pas incluses dans ce cas. En absence de remarque particulière, le contexte dans lequel le problème a été proposé aux élèves est celui décrit ci-dessus.

[11] Programmes de 1985 pour l'école élémentaire et ceux de 1990 pour le collège.

la surface 1, celle-ci plus grande que celle de la surface 3. La transitivité permet d'affirmer que l'aire de la surface 3 est donc plus petite que celle de la surface 2. Les procédures d'inclusion et de superposition permettent donc de ranger correctement les surfaces 1, 2 et 3 selon leurs aires, mais elles ne permettent pas de trancher sur la comparaison des aires des surfaces 1 et 4 entre elles. La mise en œuvre d'une procédure basée sur l'équidécomposabilité ou le découpage-recollement conduit à conclure l'égalité des aires des surfaces 1 et 4.

Si les élèves disposaient de réalisations de ces surfaces, en un même matériau, et d'un moyen de peser ces réalisations matérielles (une balance, par exemple) on pourrait aussi envisager la mise en œuvre d'une comparaison des masses. Les surfaces de même masse ont même aire et l'ordre des masses permet de déduire celui des aires des surfaces. Cette procédure était bloquée dans notre dispositif.

La disponibilité d'autres types de papier que le papier blanc, et des instruments de dessin permet également la mise en œuvre de procédures numériques de comparaison :
- redessiner les surfaces sur papier quadrillé ou sur papier pointé et effectuer un dénombrement approximatif d'unités ;
- essayer de " calculer " les mesures des aires des surfaces et comparer les nombres ainsi obtenus.

La mise en œuvre d'une procédure numérique de comparaison conduit à un emboîtement de situations de comparaison et mesure. En effet, un élève qui met en œuvre ce type de procédure, va traiter une situation de comparaison (par une procédure numérique consistant à mesurer les aires pour pouvoir les comparer) mais aussi une situation de mesure[12] qui n'était pas proposée directement et qui n'était pas non plus favorisée, par nos choix de donner des surfaces quelconques et de les dessiner sur papier blanc. Les réponses produites par ce type de procédure peuvent être exactes ou erronées selon des procédures de mesure mises en œuvre.

La comparaison des surfaces selon l'encombrement, permet de ranger correctement les surfaces 1, 2 et 3 (par inclusion), mais conduit à dire que l'aire de la surface 4 est plus grande que celle de la surface 1. Le théorème-en-acte (erroné) suivant est sous-jacent à cette procédure :
Si deux surfaces S et S' sont équidécomposables de façon que S' soit plus « compacte » que S (S est plus « encombrante » que S') $A(S) > A(S')$.

Les procédures basées sur des arguments du type « aire et périmètre varient dans le même sens » conduisent à comparer les périmètres de manière perceptive ou à mesurer les côtés[13], calculer les périmètres et établir l'ordre des périmètres à partir celui de leurs mesures. On en déduit que la surface 1 a la plus petite aire, suivie de la surface 3 et que les surfaces 2 et 4 (de même aire) ont l'aire plus grande que les précédentes. Les théorèmes-en-acte (erronés) présents chez l'élève qui met en oeuvre ce type de procédure sont :
Deux surfaces de même périmètre ont même aire.
L'aire et le périmètre d'une surface varient dans le même sens.

---

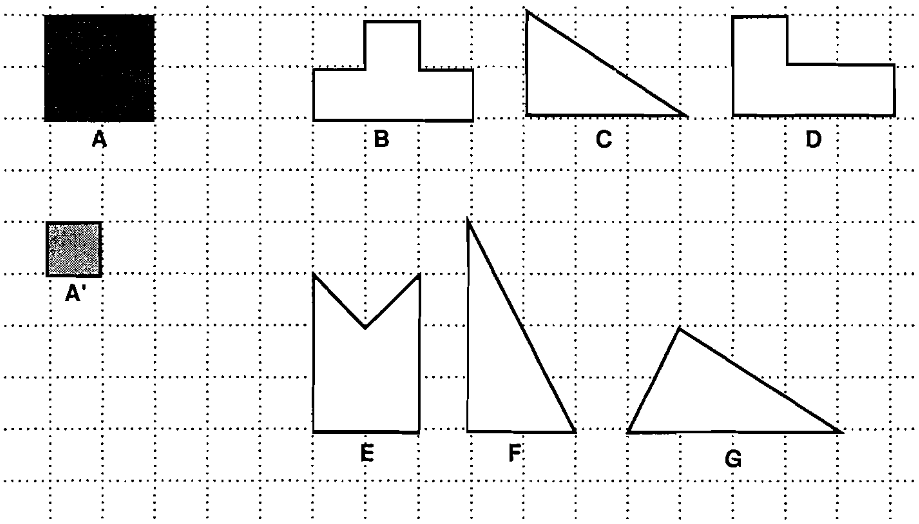
[12] Les procédures de traitement des situations de mesure seront présentées ultérieurement.
[13] L'usage de la règle graduée était autorisé.

Réciproquement, pour la sériation des périmètres, ce type d'argument conduit à la mise en œuvre d'une procédure de comparaison des aires. En effet, quand on demande aux élèves de comparer les périmètres des surfaces, ils disposent de l'ordre des aires, établi dans l'item précédent. S'ils pensent que l'ordre des périmètres et celui des aires sont forcément égaux ils trouveront inutile de comparer les périmètres. Les théorèmes-en-acte (erronés) sous-jacents à cette procédure sont :
Deux surfaces de même aire ont même périmètre.
L'aire et le périmètre d'une surface varient dans le même sens.

- Situation 2

Il s'agit d'une situation statique de comparaison[14]. Les surfaces à comparer sont quelconques ou usuelles, toutes dessinées sur papier quadrillé.

Voici quelques surfaces dessinées sur le papier quadrillé.



a) Parmi ces surfaces, lesquelles ont une aire plus petite que celle de A ? Justifie ta réponse.
b) Parmi ces surfaces, lesquelles ont une aire plus grande que celle de A ? Justifie ta réponse.
c) Parmi ces surfaces, lesquelles ont même aire que la surface A. Justifie ta réponse.

Contrairement à la situation précédente, le choix de dessiner les surfaces sur papier quadrillé favorise la mise en œuvre de procédures numériques de comparaison : on mesure les aires des surfaces et on compare les nombres ainsi obtenus.

L'inclusion serait suffisante pour conclure que l'aire de la surface E est plus grande que celle de A. La disponibilité de calque rend cette procédure possible.

Le pavage permet de mesurer les aires des surfaces B et D, et de conclure que ces surfaces ont même aire que A (car elles sont couvertes par le même nombre de carreaux).

---

14 Bien que plusieurs surfaces soient données, l'élève doit comparer les aires de chacune à celle de la surface A.

Pour les surfaces C et F, les procédures de comparaison par inclusion et superposition et la procédure de mesure par pavage effectif ne sont pas possibles. Dans ce cas, on peut envisager d'autres procédures conduisant à conclure de façon pertinente que l'aire de C est plus petite que celle de A et que les aires de A et F sont égales :
- un découpage-recollement, suivi de l'inclusion et superposition (avec l'usage du calque) ;
- un découpage recollement, suivi du pavage des surfaces et de la comparaison de la mesure de leurs aires avec celle de A ;
- le calcul de l'aire des triangles rectangles comme la moitié de celle d'un rectangle (celui-ci pavable avec les carreaux du quadrillage) suivi de la comparaison des mesures ainsi obtenues, avec la mesure de l'aire de A.

Pour comparer l'aire de la surface G avec celle de A, les procédures d'inclusion superposition ne sont pas possibles, celle de pavage effectif non plus. Les procédures suivantes conduisent à répondre correctement que les aires de G et A sont égales :
- un découpage recollement (plus complexe que ceux des surfaces C et F) pour obtenir une surface pavable et la comparaison des mesures ainsi obtenues avec la mesure de l'aire de A ;
- la décomposition du triangle en deux triangles rectangles, suivie du calcul de l'aire de ces deux triangles (comme moitié de l'aire d'un rectangle, pavable avec les carreaux du quadrillage) et de l'addition de ces mesures pour comparer la mesure de l'aire ainsi obtenue avec celle de A.

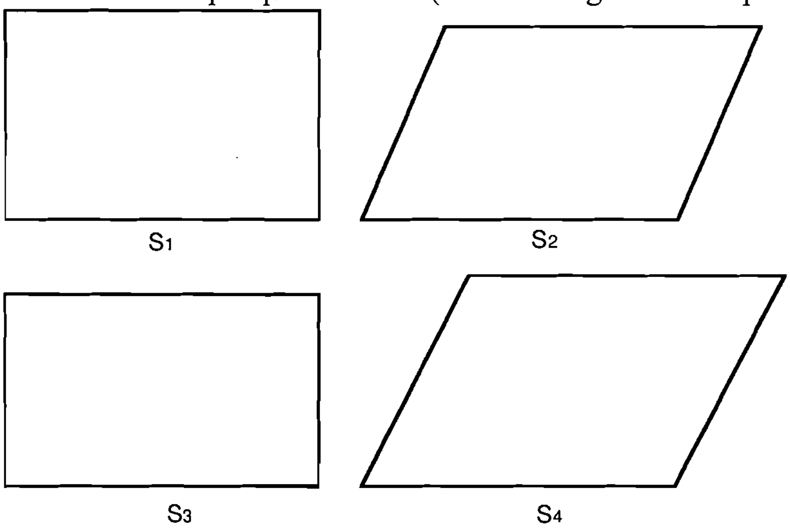
Pour toutes les surfaces, nous pouvons nous attendre à la mise en œuvre de procédures périmétriques de comparaison : mesure des périmètres et comparaison des périmètres pour en déduire l'ordre des aires. Ce type de procédure peut se justifier parce que l'élève ne distingue pas l'aire et le périmètre du point de vue des objets géométriques en jeu (il mesure le périmètre pensant qu'il s'agit de la mesure de l'aire) ou bien parce qu'il considère que l'aire et le périmètre varient forcément dans le même sens (dans ce cas, il peut comparer les périmètres et en déduire l'ordre des aires).

Enfin, bien que le choix de dessiner les surfaces sur papier quadrillé ne favorise pas la mise en œuvre de ce type de procédure, nous pouvons envisager que certains élèves comparent les surfaces selon l'encombrement. Cette procédure conduit par exemple, à considérer que les aires de B et de D sont plus grandes que celle de A alors que ces surfaces ont toutes la même aire.

- Situation 3

Il s'agit d'une situation statique de comparaison. Les surfaces à comparer sont toutes usuelles, dessinées sur papier blanc.

Voici ci-dessus quelques surfaces (deux rectangles et deux parallélogrammes) :



Es-tu d'accord avec chacune de ces affirmations ? Explique pourquoi.
a) Les surfaces S_1 et S_2 ont même aire.
b) Les surfaces S_1 et S_4 ont même aire.
c) Les surfaces S_2 et S_3 ont même aire

Ces questions concernent la comparaison d'aires et de périmètres de rectangles et de parallélogrammes, reliés par l'une des déformations suivantes :
- glissement d'un côté sur son support
- pivotement d'un côté autour du sommet.

Nous ne voulions pas privilégier la mise en œuvre de procédures numériques de comparaison. Or, la place importante accordée au calcul dans l'enseignement nous amène à faire l'hypothèse que la présence des figures cotées dans ce type de situation induit le calcul des aires suivi de la comparaison des nombres obtenus. C'est pourquoi nous avons fait le choix de donner les surfaces à comparer dessinées sur papier blanc, les longueurs des côtés et des hauteurs des parallélogrammes n'étant pas fournies.

Les surfaces à comparer sont telles que :
- S1 et S2 ont même périmètre ;
- S2 et S3 ont même aire ;
- S1 et S4 ont même aire.

Les comparaisons des aires et celles des périmètres concernent ici un rectangle et un parallélogramme. En fait, ce qui nous intéresse essentiellement est la comparaison des aires et des périmètres des parallélogrammes S2 et S4 avec ceux du rectangle S1. Ces parallélogrammes correspondent respectivement à des états des déformations pivotement et glissement. Le rectangle S3 a été introduit, dans le but de provoquer un conflit. En effet, par découpage recollement, on peut montrer que S2 et S3 ont la même aire et par inclusion, l'aire de S1 est plus grande que celle de S3. Un élève ayant répondu en même temps que l'aire de S2 est égale à celle de S1 (par exemple, parce que les côtés ont même longueur) et que l'aire de S2 est égale à celle de S3, aurait l'occasion de faire un retour en arrière et mettre en cause l'égalité des aires de S1 et S2.

Les figures ont été choisies ici de façon à ce que la différence des aires ne soit ni trop petite ni trop importante, de telle sorte que :
- la forme du parallélogramme soit assez proche de celle du rectangle ;
- le contrôle perceptif, associé à l'usage du calque puisse être mis en œuvre ;
- le choix par les élèves des formules exactes d'aire d'un rectangle et d'un parallélogramme puisse conduire également à la différence des aires, sans que les erreurs dues au mesurage fassent obstacle.

Les types de procédures suivants sont possibles :

a) Procédures basées sur l'équidécomposabilité ou sur le découpage-recollement suivis de l'inclusion et superposition

L'usage du calque permet la mise en œuvre d'une procédure basée sur l'équidécomposabilité associée à l'inclusion-superposition. Les procédures basées sur le découpage-recollement correspondent en fait à un emboîtement d'une situation de production à l'intérieur de la situation de comparaison proposée au départ. On produit d'abord un rectangle de même aire que le parallélogramme donné de façon à pouvoir ensuite comparer par inclusion-superposition. Ainsi, dans la comparaison des aires de S1 et S2, par exemple, on produit un rectangle de même aire que S2 (superposable à S3) et on en déduit, par inclusion, que l'aire de S2 est plus petite que celle de S1. Cette procédure conduit de même à déduire l'égalité des aires de S2 et S3, ainsi que celle de S1 et S4.

b) Reproduction des figures sur papier quadrillé ou papier pointé suivie de la mesure des aires de ces surfaces par des procédures telles que le pavage (associé éventuellement à un découpage-recollement).

c) Procédure numérique de comparaison consistant à calculer l'aire du rectangle et celle du parallélogramme puis à comparer les nombres ainsi obtenus.
$A(S1) = 6 \times 4 = 24\ cm^2$ et $A(S2) = 6 \times 3{,}5 = 21\ cm^2$.
$A(S2) = A(S3) = 21\ cm^2$ et $A(S1) = A(S4) = 24\ cm^2$

d) Comparaison de longueurs caractéristiques des surfaces : comparaison des bases et des hauteurs correspondantes.
Si l'on prend le côté horizontal du parallélogramme S2 pour base, la longueur du rectangle S1 et la longueur de cette base de S2 ont même mesure (6 cm). La hauteur correspondante à cette base de S2 ne mesure que 3,5 cm tandis que la largeur du rectangle S1 mesure 4 cm. On en déduit que l'aire de S1 est plus grande que celle de S2. De même, on déduit que les aires de S1 et S4 sont égales, ainsi que celles de S2 et S3.

e) Procédure basée sur la mise en œuvre du théorème-en-acte (exact), selon lequel « *le glissement d'un côté du parallélogramme sur son support conserve l'aire* ».
Bien que du point de vue de la formulation de l'énoncé, les situations proposées soient statiques, on peut envisager une lecture dynamique de la part de l'élève qui va associer les

surfaces à comparer par le biais des déformations du parallélogramme. Les surfaces S2 (respectivement S1) et S3 (respectivement S4) sont reliées par la déformation « glissement d'un côté sur son support ». La mise en œuvre du théorème en acte ci-dessus conduit donc à déduire l'égalité des aires de S2 et S3, ainsi que l'égalité des aires de S1 et S4.

f) Procédure basée sur la mise en œuvre du théorème-en-acte (erroné) selon lequel « *le pivotement d'un côté autour d'un sommet conserve l'aire.* »
Les surfaces S1 et S2 sont reliées par la déformation « pivotement d'un côté autour d'un sommet ». La mise en œuvre du théorème en acte ci-dessus conduit à conclure que les aires de S1 et S2 sont égales, alors qu'en realité l'aire de S2 est plus petite que celle de S1.

g) Procédure numérique de comparaison à partir du calcul de l'aire du parallélogramme par le produit des longueurs des côtés
Le produit des côtés de S2 donne le résultat : 6 x 4 = 24 cm^2, ce qui conduit l'élève à répondre que les aires de S1 et S2 sont égales. La mesure de l'aire de S3 est A(S3) = 21 cm^2 et le produit des côtés de S2 donne le résultat : 6 x 4 = 24 cm^2, ce qui conduit l'élève à répondre que l'aire de S2 est plus grande que celle de S3. De même, la mesure de l'aire de S1 est A(S1) = 24 cm^2 et le produit des côtés de S4 donne le résultat : 6 x 4,5 = 27 cm^2, ce qui conduit l'élève à répondre que l'aire de S4 est plus grande que celle de S1.

h) Procédure de comparaison des longueurs des côtés des deux surfaces.
Les mesures des côtés de S1 et S2 sont égales deux à deux (6 cm et 4 cm). La mise en œuvre d'une procédure de ce type conduit donc à conclure que les aires de S1 et S2 sont égales. Les surfaces S1 et S4 ont un côté de même longueur (à savoir 6 cm) et l'autre côté de longueurs différentes l(S1) = 4 cm et l(S4) = 4,5 cm ; Les surfaces S2 et S3 ont un côté de même longueur (à savoir 6 cm) et l'autre côté de longueurs différentes l(S2) = 4 cm et l(S3) = 3,5 cm. Cette démarche conduit l'élève à déduire que l'aire S1 est plus petite que celle de S4 et que l'aire de S3 est plus petite que celle de S2.

Cette procédure peut être interprétée de plusieurs façons :
- l'élève met en œuvre le théorème-en-acte (erroné) selon lequel « *deux parallélogrammes de mêmes côtés ont même aire* » ;
- l'élève ne dissocie pas les variations de l'aire et du périmètre de parallélogrammes : il compare donc les périmètres et en déduit l'ordre des aires.

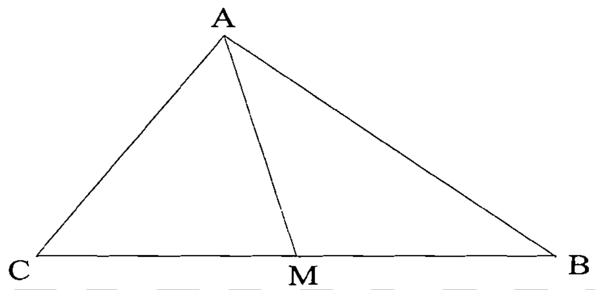
i) Procédure de « pavage » des surfaces : les rectangles étant pavés avec des carrés de côtés 1 cm et les parallélogrammes avec des petits parallélogrammes de côtés 1 cm (avec mêmes mesures d'angle que le parallélogramme à mesurer).
Les résultats des pavages décrits ci-dessus conduisent à répondre que les aires de S1 et S2 sont égales (24 cm^2), que l'aire de S3 est plus grande que celle de S2 et que l'aire de S4 est plus grande que celle de S1.

j) Procédure de mesure des périmètres des surfaces à comparer associé à la mise en œuvre des théorèmes en acte (erronés) selon lesquels « *l'aire et le périmètre varient dans le même sens* » ou « *deux surfaces de même périmètre ont même aire* ».
Les surfaces S1 et S2 ont même périmètre. Donc, la mise en œuvre de cette procédure conduit à répondre que S1 et S2 ont même aire. Le périmètre de S2 est plus grand que celui de S3 et le périmètre de S4 est plus grand que celui de S1. Cette procédure conduit à répondre que l'aire de S2 est plus grande que celle de S3 et l'aire de S4 est plus grande que celle de S1.

- Situation 4

Il s'agit[15] d'une situation statique de comparaison. Les surfaces à comparer sont usuelles, dessinées sur papier blanc.

Comparer les aires des triangles AMB et AMC, sachant que AM est la médiane du triangle ABC relativement au sommet A.

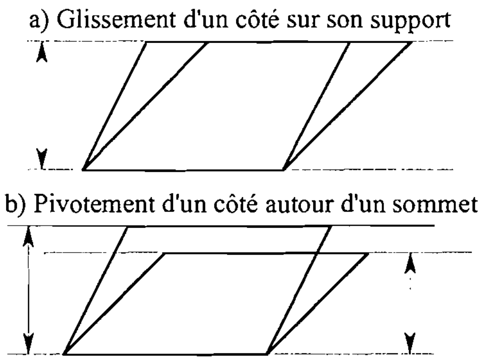


La procédure qui nous intéresse particulièrement ici est celle qui consiste en la comparaison des aires des deux triangles à partir de celles de longueurs caractéristiques. Ce qui permet de décider pertinemment l'égalité des aires des deux triangles est l'égalité des longueurs des côtés CM et MB (côtés pris pour base de chacun des deux triangles à comparer) et le fait qu'ils aient la même hauteur relative à ces bases. Le théorème-en-acte (juste) sous-jacent à cette procédure est : *Deux triangles de même base et de même hauteur ont même aire.* La mise en oeuvre de ce type de procédure correspond à un usage fonctionnel de la formule de l'aire du triangle : plutôt que son usage (plus courant) en tant que moyen de calcul de l'aire, la formule sert ici à exprimer la relation de dépendance de l'aire du triangle par rapport à chacune des base et des hauteurs correspondantes.

- Situation 5. Etude des effets des déformations sur l'aire et le périmètre d'un parallélogramme.

Il s'agit ici d'une situation dynamique de comparaison. Les surfaces à comparer sont usuelles. On compare les aires et les périmètres des différents états de chacune des déformations suivantes :

[15] Les situations 4 et 5 ne sont pas extraites du pré-test.



Si le support est le papier blanc, par nature statique, la mise en place de ce type de situations va se faire par l'intermédiaire du vocabulaire utilisé dans la formulation de l'énoncé des problèmes. Le caractère dynamique des déformations peut être évoqué par un énoncé du type "Penses-tu que l'aire du parallélogramme va changer si l'on fait glisser l'un de ces côtés sur son support comme dans la figure suivante ?". Cependant, d'autres supports que le papier favorisent davantage la mise en place de situations de comparaison dynamiques. C'est le cas des supports mécaniques (un parallélogramme articulé en métal, pour le pivotement, par exemple) ou des logiciels permettant de simuler les déformations sur l'écran d'un ordinateur[16].

Les situations de ce type favorisent la mise en œuvre de théorèmes-en-acte autour des déformations du parallélogramme dont les deux suivants sont exacts :
Le « glissement d'un côté d'un parallélogramme sur son support » conserve l'aire.
Le « pivotement d'un côté du parallélogramme autour d'un sommet » conserve le périmètre.

Mais aussi, des théorèmes-en-acte erronés comme les suivants :
Le « pivotement d'un côté du parallélogramme autour d'un sommet » conserve l'aire
Le « glissement d'un côté » d'un parallélogramme sur son support conserve le périmètre.

Ce type de situation est central dans la construction des invariants qui permettent de conserver l'aire et le périmètre des surfaces usuelles en particulier pour permettre
- l'acquisition des formules et leur usage du point de vue fonctionnel[17] ;
- l'appropriation de la dissociation des variations de l'aire et du périmètre, pour le cas particulier d'une famille de parallélogrammes.

---

[16] Dans l'ingénierie didactique construite et expérimentée dans le cadre notre travail de thèse nous avons proposé des situations de ce type, utilisant pour cela le logiciel Cabri-géomètre (Baulac, Bellemain & Laborde 1988).

[17] Comme dans la situation 4.

5. Situations de mesure

On s'intéresse ici au passage d'une grandeur à un nombre. Autrement dit, étant donnée une surface - objet du cadre géométrique - on peut mesurer, selon les différents cas, son aire, les longueurs de ses côtés, de son périmètre, de son diamètre, d'une diagonale, de ses hauteurs, etc. On peut aussi mesurer d'autres grandeurs associées à cette surface : la masse d'une réalisation de cette surface dans un certain matériau, le volume de peinture nécessaire pour la peindre, etc. La possibilité d'attribuer un nombre sous-entend le choix d'une unité de mesure pour la grandeur correspondante (l'aire, la longueur, la masse, le volume,...).

5.1. Variables didactiques

- Type de mesure demandée : mesure exacte ou mesure approchée par encadrement[18]

La mesure de l'aire d'une surface peut être exprimée par un nombre suivi d'une unité (mesure exacte) ou par un intervalle (mesures approchées par encadrement) avec un choix successif d'unités qui permettent une mesure de plus en plus proche de celle de l'aire de la surface. Dans les situations d'encadrement, on demande d'approcher l'aire d'une surface de bord irrégulier ou arrondi par des surfaces dont on connaît un moyen de calculer l'aire. D'une relation d'ordre établie dans le cadre géométrique par inclusion des surfaces on déduit un ordre par rapport aux aires. Puisqu'on cherche à encadrer par des surfaces auxquelles on sait attribuer un nombre, c'est un moyen indirect de trouver une approximation de la mesure de l'aire de la surface. Ce type de problème porte en germe l'idée d'intégrale.

Etudions plus précisément les situations de mesure exacte de l'aire c'est à dire celles où, par le choix d'une unité, on attribue un nombre à l'aire d'une surface.

La complexité de ces situations peut être très diverse en fonction de variables telles que :
- présence de la figure ou non ;
- longueurs marquées sur la figure ou seulement données dans l'énoncé ;
- nature des données numériques (nombres entiers ou décimaux,...) ;
- formule de l'aire fournie ou non.

Comme pour les situations de comparaison, nous analyserons des exemples extraits du pré-test passé en classe de cinquième dans le cadre de notre travail de thèse. Les situations qui vont nous intéresser ici concernent essentiellement des surfaces usuelles ou des surfaces décomposables en surfaces usuelles. Précisons que depuis le cours moyen les élèves manipulent les formules d'aire (y compris celles du parallélogramme et du triangle) sachant qu'on ne leur demande pas de les apprendre par cœur, mais seulement de

[18] Par des raisons liées aux limites de notre problématique de recherche, nous n'avons pas pu analyser ni les situations d'encadrement (l'étude des situations de mesure étant centrée sur celles concernant les mesures exactes) ni les situations autour des changement d'unité.

savoir les identifier sur un formulaire et s'en servir pour faire des calculs. Quant aux élèves ayant répondu au pré-test, ils avaient appris la formule de l'aire d'un rectangle en sixième mais au moment de la passation du pré-test, les formules de l'aire d'un parallélogramme et d'un triangle n'avaient pas été enseignées.

5.2. Recherche des procédures possibles

Dans les trois exemples suivants, les figures sont données en vraie grandeur, cotées avec les longueurs mesurées en centimètres. Les mesures des longueurs sont toujours des nombres entiers. Les formules ne sont pas fournies.

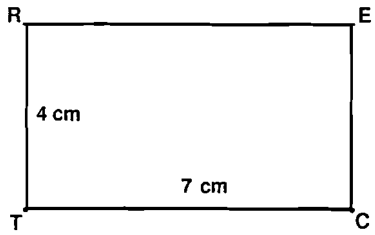
Ces choix ont été faits afin :

- de ne pas mélanger les difficultés liées au calcul et celles qui concernent plus directement le concept d'aire ;
- de permettre une mesure de l'aire du rectangle par pavage[19] ou la mise en œuvre d'un découpage recollement convenable pour transformer le parallélogramme en rectangle[20], si les élèves en ressentent le besoin[21].

Seules sont notées sur les dessins les mesures nécessaires au traitement des questions posées. Ce choix se justifie par le désir de ne pas provoquer de rupture du contrat habituel sur les formules : toutes les données nécessaires au calcul sont désignées et tout ce qui est donné est nécessaire aux calculs. Ceci justifie notre choix de demander à la fois les mesures de l'aire et du périmètre du parallélogramme. En effet, tout en restant cohérent avec le contrat habituel (puisque les mesures des côtés sont nécessaires pour le calcul du périmètre) nous avons donné à la fois les mesures des côtés et celle de l'une des hauteurs. Ceci permet à l'élève de produire aussi bien la réponse exacte (produit d'une base du parallélogramme par la hauteur correspondante) qu'une réponse erronée courante qui consiste à calculer l'aire du parallélogramme par le produit de ses côtés.

- Situation 6

Calcule l'aire et le périmètre de la surface suivante.



L'aire du rectangle RECT est :
Justifie ta réponse :
Le périmètre du rectangle RECT est :
Justifie ta réponse :

---

19 Les mesures des longueurs des côtés étant entières, cette procédure est possible.

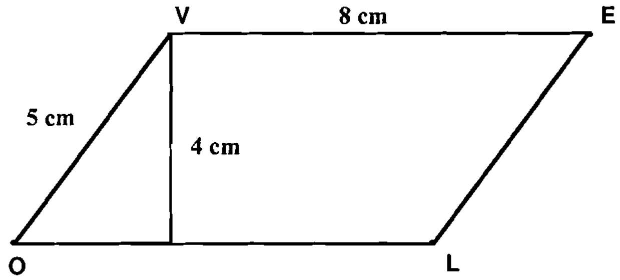
20 Rappelons que les élèves disposent de papier calque, ce qui facilite la mise en œuvre d'un découpage-recollement, au moins évoquée.

21 Ces procédures sont possibles, mais ne sont pas favorisées, car on ne demande pas de mesurer, mais de calculer (ce qui appelle plutôt l'usage d'une formule que la mise en œuvre de procédures de ce type).

La procédure favorisée est celle qui consiste à faire le produit des mesures des côtés A(RECT) = 7 x 4 = 28 cm^2. Pour mettre cette procédure en œuvre, l'élève doit connaître et se souvenir de la formule de l'aire d'un rectangle, ensuite, il identifie les mesures nécessaires au calcul[22]. On peut s'attendre aussi que certains élèves procèdent par pavage : en carrelant le rectangle[23] puis en dénombrant les carreaux ou en reproduisant la figure sur papier quadrillé ou papier pointé[24].

- Situation 7

Calcule l'aire et le périmètre de la surface suivante



L'aire du parallélogramme VELO est :
Justifie ta réponse :
Le périmètre du parallélogramme VELO est :
Justifie ta réponse :

Les procédures de calcul suivantes sont favorisées :
- utiliser la formule exacte de l'aire du parallélogramme, identifier sur la figure les mesures des longueurs pertinentes et faire le calcul ;
- mobiliser la formule exacte de l'aire du parallélogramme, mais faire l'erreur qui consiste à prendre les mesures des longueurs des côtés pour faire le produit ;
- fabriquer et utiliser une formule erronée qui consiste à faire le produit des longueurs des côtés ;
- faire le produit de toutes les longueurs marquées sur la figure.

Cependant, on peut envisager aussi d'autres types de procédure :
- découpage recollement du parallélogramme pour produire un rectangle de même aire, suivi du calcul de l'aire du rectangle ainsi obtenu[25] ;
- mise en œuvre d'un « pavage » avec des parallélogrammes de côtés 1 cm.

---

22 Pas de difficulté particulière, puisque les seules mesures données sont celles nécessaires au calcul.

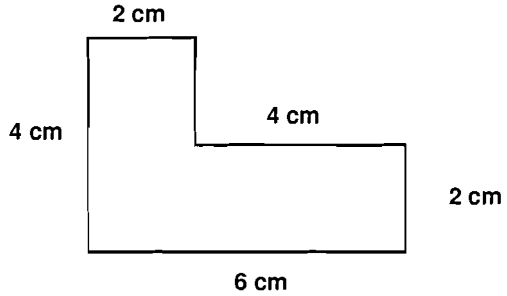
23 L'usage de la règle graduée était autorisé.

24 Les élèves disposent de papier quadrillé au demi centimètre et de papier pointé (au centimètre) à volonté.

25 La figure telle qu'elle est donnée et la possibilité d'usage du papier calque et du papier pointé permettent la mise en œuvre d'une procédure de ce type.

- Situation 8

Calcule en cm^2 la mesure de l'aire de la surface suivante.



Nous pouvons envisager les procédures de traitement possibles suivantes :
- la décomposition de la surface en deux rectangles suivie du calcul des aires des deux rectangles (par usage de la formule apprise en sixième), puis l'addition des nombres ainsi obtenus ;
- le découpage recollement de la surface pour obtenir un rectangle puis le calcul de l'aire de ce rectangle ;
- le pavage par des petits carreaux de un centimètre carré ;
- l'usage d'une formule fabriquée (par une combinaison des longueurs marquées sur la figure) pour calculer l'aire de la surface.

5.3. Classement des procédures et mise en évidence des invariants sous-jacents

Les procédures de résolution possibles pour ce type de situation sont classées suivant qu'elles font intervenir l'aspect unidimensionnel ou bidimensionnel de l'aire.

a) Procédures faisant intervenir l'aire en tant que grandeur unidimensionnelle

Les procédures de ce type sont associées à la « mesure directe » : « La mesure directe des grandeurs suppose qu'on dispose d'un moyen 'direct' d'associer à un objet un nombre qui sera sa mesure ou au moins d'en donner une approximation. » (Vergnaud, 1981, page 101)

• Procédure de pavage

Dans les opérations de pavage, le cadre géométrique est très important puisque la possibilité de pavage effectif dépend de la forme de la surface et de celle de l'unité d'aire choisie. Bien qu'on puisse associer à l'utilisation du pavage des multiplications, il est possible de traiter des situations de pavage en ne faisant appel qu'à des structures additives. Ce facteur intervient comme indice de facilité des problèmes de pavage par rapport à ceux de calcul avec usage d'une formule.

Les résultats des évaluations[26] montrent que cette procédure est disponible chez la plupart des élèves à l'entrée en sixième. De plus, dans l'ingénierie didactique réalisée par Douady et Perrin-Glorian (1984, 1985) les situations de pavage avec différentes unités ont été utilisées pour permettre la dissociation entre le cadre grandeur et le cadre numérique (on obtient des nombres différents, tout en sachant que l'aire est la même). L'apprentissage effectué a été tout à fait satisfaisant.

Ceci dit, l'usage abusif des procédures de pavage peut renforcer l'invariant selon lequel « *L'aire est le nombre de carreaux nécessaires pour recouvrir une surface* » qui ne permet de traiter qu'un nombre assez limité de situations.

• Procédures d'addition et de soustraction des aires

Cette procédure s'appuie sur le théorème en acte selon lequel : *Si S et S' sont quasi-disjointes,* $A(S \cup S') = A(S) + A(S')$

Soit une surface A décomposable en deux surfaces S et S' (ou en un nombre fini de morceaux : $S_1, S_2, ..., S_n$ disjoints[27] deux à deux). La procédure d'addition consiste à calculer la mesure de l'aire de A quand on connaît celles des surfaces composantes (S et S') et la procédure de soustraction consiste à calculer la mesure de l'une des surfaces composantes étant données les mesures de A et de l'autre surface composante.

b) Procédures faisant intervenir l'aire en tant que grandeur bidimensionnelle

Ces types de procédures font intervenir la « mesure indirecte » par usage des formules d'aire en général à propos des surfaces usuelles : carrés, rectangles, triangles, parallélogrammes, losanges, trapèzes, cercles, etc.

Nous pouvons nous intéresser ici au calcul de l'aire et du périmètre, par l'usage de formules ainsi qu'aux situations où on demande de calculer des longueurs caractéristiques d'une surface (un côté, une base ou une hauteur, par exemple) l'aire étant donnée. Ces deux types de situations ne sont pas du même niveau de complexité du point de vue des structures multiplicatives en jeu.

De plus, dans les situations de calcul de l'aire d'une surface, étant données les longueurs nécessaires pour le calcul, la formule est utilisée directement en tant que moyen de calcul tandis que, dans les situations de calcul d'une longueur, étant donnée l'aire et d'autres longueurs, une inversion de la formule est nécessaire : ceci exige une manipulation de l'écriture littérale qui ne relève plus du domaine numérique, mais du domaine pré-algébrique.

Les procédures de ce type renforcent le théorème en acte selon lequel « *L'aire est un nombre obtenu par l'application d'une formule* ». L'abus de situations favorisant la mise en œuvre de procédures de ce type, au détriment d'un travail plus global sur la construction du concept d'aire dans ses facettes multiples, peut provoquer de la part des

---

[26] Cf. (Moreira Baltar, 1997)

[27] Les surfaces S' et S" sont disjointes si $S' \cap S'' = \varnothing$. On dira qu'elles sont quasi-disjointes si elles n'ont que des points de bord en commun.

élèves une démarche de fabrication de formules erronées lors du traitement de situations autour du concept d'aire.

6. Situations de production d'une surface

6.1. Variables didactiques

- Type de situation de production : production d'une surface de même aire qu'une surface donnée ou production d'une surface d'aire plus grande (ou plus petite) qu'une surface d'aire donnée.

- Type de formulation de la consigne : dessiner ou trouver

Le verbe dessiner induit la mise en œuvre de procédures plutôt géométriques tandis que le verbe trouver laisse à l'élève plus de liberté de choisir les procédures géométriques ou les procédures numériques.

- Forme de la surface de départ et forme de la surface à produire : surfaces quelconques, rectangles, parallélogrammes,...

- Type de papier dans lequel la surface de départ est dessinée : papier blanc, papier quadrillé, papier pointé,...

- Figure de départ cotée ou non ;

- Figure de départ dessinée en vraie grandeur ou non ;

- Données numériques : aussi bien leur nature (nombres entiers, décimaux, ...) que les données elles-mêmes[28].

6.2. Exemples de situations de production à partir d'un rectangle de départ

- Situation 9

La figure a été dessinée en vraie grandeur, pour ne pas mélanger les difficultés relatives à la problématique dessin-figure, et celles relatives à la construction du concept d'aire. La surface de départ est un rectangle dessiné sur papier blanc. Les procédures géométriques sont favorisées par ce choix, bien qu'il soit possible[29], pour les élèves qui le désirent, de mettre en œuvre une procédure numérique de dénombrement d'unités.[30]

---

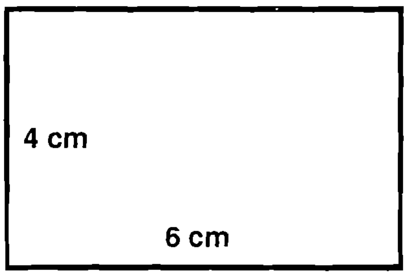
[28] Voir plus loin, notamment pour le cas des rectangles, les questions autour de l'influence du domaine de validité des procédures.

[29] Les élèves disposent de papier quadrillé, pointé et calque, et les instruments de dessin sont autorisés.

[30] L'usage du papier quadrillé comme support pour la surface de départ, aurait favorisé la mise en œuvre de cette procédure.

Toutes les questions sont posées sous la forme « Peux-tu ... ? Justifie ta réponse ». Cette formulation permet la mise en œuvre des théorèmes en acte (erronés) selon lesquels « *deux surfaces de même aire ont même périmètre* », « *deux surfaces de même périmètre ont même aire* » et « *l'aire et le périmètre varient dans le même sens* ». En effet, nous avons craint qu'une formulation directe du type « dessine une surface (un rectangle)... » implique l'existence de telles surfaces pour les élèves, le contrat habituel voulant que l'enseignant ne demande pas aux élèves de dessiner quelque chose qui n'existe pas. Nous nous attendons donc, avec la formulation choisie, à ce que certains élèves répondent qu'ils ne peuvent pas dessiner une surface correspondant aux consignes données car une telle surface n'existe pas. Ce type de réponse témoigne de la force des théorèmes-en-acte énoncés ci-dessus.

Voici un rectangle A dont les côtés mesurent 4 cm et 6 cm.



Rectangle A

a) Peux-tu dessiner *une surface* de même aire que A ? Justifie ta réponse.

b) Peux-tu dessiner *une surface* d'aire plus petite que celle de A et dont le périmètre est plus grand que celui de A ? Justifie ta réponse.

c) Peux-tu dessiner un *rectangle* d'aire plus petite que celle de A ? Justifie ta réponse.

d) Peux-tu trouver *un rectangle* de même aire que A et de périmètre plus grand que celui de A ? Justifie ta réponse.

e) Peux-tu trouver *un rectangle* de même périmètre que A et d'aire plus petite que celle de A ? Justifie ta réponse.

f) Peux-tu trouver *un rectangle* d'aire plus petite que celle de A et de périmètre plus grande que celui de A ? Justifie ta réponse.

Le schéma suivant représente les six questions de production à partir du rectangle.

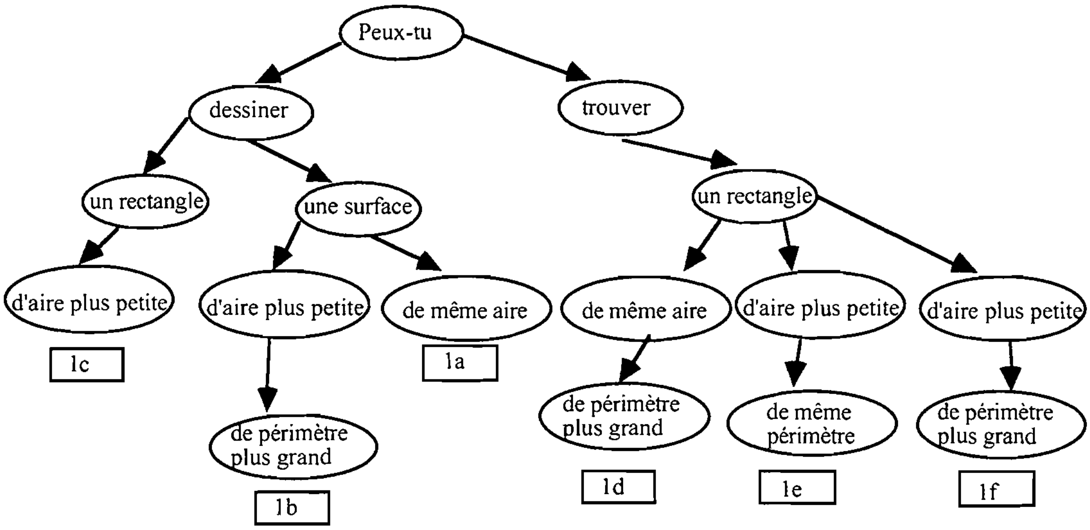


Schéma 3

Les deux premières questions (1a et 1b) concernent la production d'une surface quelconque et les quatre dernières la production d'un rectangle. Nous avons voulu, en jouant sur cette variable, vérifier l'hypothèse que l'acquisition de la dissociation de l'aire et du périmètre de surfaces quelconques n'empêche pas les élèves de continuer à mettre en œuvre les théorèmes en acte de variation de l'aire et du périmètre dans le même sens, pour le cas des rectangles.

6.2.1. Procédures attendues pour la production d'une surface quelconque de même aire que le rectangle donné

a) Procédure de découpage recollement[31]
L'usage du calque permet la mise en œuvre évoquée d'un découpage-recollement pertinent conduisant à la production d'une surface de même aire que le rectangle de départ.

b) Procédure basée sur le dénombrement des carreaux
L'élève mesure l'aire du rectangle et dessine sur le papier quadrillé ou sur le papier pointé, une surface de 24 cm^2. Dans ce cas, la surface produite est probablement pavable avec les carreaux de 1 cm^2.

c) Procédure basée sur la comparaison des longueurs caractéristiques
L'élève construit un parallélogramme de même base et même hauteur que le rectangle de départ. Cette procédure est basée sur le théorème en acte (exact) selon lequel *« deux parallélogrammes de même base et même hauteur ont même aire »*.

[31] Les procédures géométriques, telles que les découpages et recollements, étaient favorisées par les choix de demander de dessiner une surface (a priori quelconque).

d) Procédure de production d'un rectangle par tâtonnement
L'élève mesure l'aire du rectangle et cherche par essai-erreur à construire un rectangle de même aire que le rectangle A.

e) Procédure numérique de production d'un rectangle
L'élève calcule l'aire du rectangle et cherche deux nombres dont le produit est 24. Des recherches antérieures (Balacheff, 1988 et Moreira Baltar, Comiti, 1993) ont montré que chez la plupart des élèves cette recherche se fera dans les tables de multiplication (le champ numérique étant réduit aux nombres entiers).

f) Procédures périmétriques
L'élève produit une surface de même périmètre que la surface de départ. Dans ce cas, les interprétations suivantes sont possibles :
- l'élève ne sait pas très bien ce qu'est l'aire, il ne dissocie pas aire et périmètre du point de vue des objets géométriques en jeu ;
- l'élève ne dissocie pas l'aire et le périmètre de surfaces quelconques, du point de vue des variations respectives. Il met en œuvre le théorème-en-acte (erroné) selon lequel « *deux surfaces de même périmètre ont même aire* ».

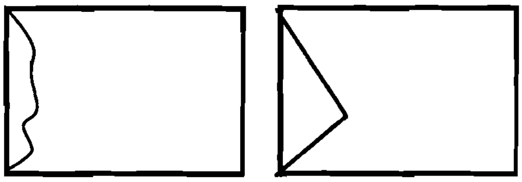
g) Procédure basée sur la comparaison des côtés
Ici l'élève construit une figure de mêmes côtés que le rectangle de départ. Nous pouvons relier ce type de procédure à la mise en œuvre (non exclusive) de plusieurs théorèmes-en-acte (erronés) :
Deux surfaces qui ont les mêmes côtés ont même aire.
Deux surfaces de même périmètre ont même aire.

Si la figure produite est un parallélogramme, nous pouvons encore envisager la mise en oeuvre des théorèmes-en-acte (erronés) suivants :
Parallélogrammes de mêmes côtés ont même aire.
Le 'pivotement d'un côté autour d'un sommet' conserve l'aire du parallélogramme.

6.2.2. Procédures attendues pour la production d'une surface quelconque d'aire plus petite et périmètre plus grand que ceux du rectangle donné

Il s'agit ici de faire varier en même temps et en sens opposés, l'aire et le périmètre d'une surface. La mise en œuvre d'une procédure géométrique est favorisée par le choix des valeurs des variables didactiques.

a) Procédures géométriques
Le traitement géométrique consiste à enlever un morceau du rectangle en remplaçant une partie du bord de façon à augmenter le périmètre comme dans les figures suivantes :



b) Procédures numériques

L'élève calcule l'aire et le périmètre du rectangle de départ puis il cherche deux nombres dont la somme est supérieure à 10 (démi-périmètre) et le produit inférieur à 24 (aire du rectangle). Dans ce cas, l'élève produit un rectangle, même si la forme de la surface à produire n'est pas spécifiée.

6.2.3. Procédures attendues pour les situations de production d'un rectangle

a) Procédures basées sur des arguments du type « aire et périmètre varient dans le même sens »

Il est possible que la force de la conviction de l'impossibilité de produire un rectangle respectant les contraintes de même aire et périmètre plus petit, de même périmètre et d'aire plus petite ou d'aire plus petite et périmètre plus grand, empêche même de chercher à produire de tels rectangles.

Les justifications peuvent faire intervenir des arguments explicites telles : si un rectangle a même périmètre que le rectangle de départ, il aura forcément même aire que celui-là ou si l'aire est plus petite, le périmètre est aussi plus petit. On peut s'attendre aussi à des justifications par l'usage d'exemples de rectangles de périmètre plus grand et dont l'aire est aussi plus grande, par exemple[32]. Ces arguments sont à relier aux théorèmes-en-acte (erronés) suivants :

Deux surfaces de même aire ont même périmètre.
Deux surfaces de même périmètre ont même aire.
L'aire et le périmètre d'une surface varient dans le même sens.
Deux rectangles de même aire ont même périmètre.
Deux rectangles de même périmètre ont même aire.
L'aire et le périmètre d'un rectangle variant dans le même sens.

b) Procédures « par tâtonnement »

La disponibilité de papier pointé et papier quadrillé permet la mise en œuvre de ce type de procédures. Dans ce cas, il y a des fortes chances que les tâtonnements soient associés à des procédures numériques décrites ci-dessus. Pour la conservation de l'aire avec diminution du périmètre, les élèves vont chercher[33] si, parmi des rectangles d'aire 24 cm^2, il y en a dont le périmètre est plus petit que 20 cm.

---

[32] Nous avons mis en évidence dans notre mémoire de DEA (Cf. Moreira Baltar et Comiti, 1993) l'apparition de ce type d'erreur lié au raisonnement (un exemple où la propriété ne se vérifie pas suffit pour nier l'existence d'un rectangle respectant cette propriété).

[33] Dans ce cas, la recherche des rectangles se fera probablement parmi les mesures entières des côtés, par les raisons énoncées auparavant ou à la limite, des mesures avec moitié puisque le papier est quadrillé au demi-centimètre.

c) Procédures par découpage recollement

Pour la production d'un rectangle de même aire et de périmètre plus grand que ceux du rectangle de départ, on coupe le rectangle par une parallèle sur la moitié de la hauteur et on recolle les morceaux ainsi obtenus de façon à obtenir un rectangle de côtés 2 cm et 12 cm.

d) Procédures numériques

Nous avons choisi les mesures des côtés du rectangle de départ de façon à ce que le domaine de validité des rectangles de côtés entiers respectant les contraintes de même aire et de périmètre plus grand ne soit pas trop restreint, pour permettre aux élèves d'en trouver facilement des exemples. Ce choix permet de diminuer l'effet du domaine de validité restreint mis en évidence dans notre mémoire de DEA. En effet, les exemples étant assez nombreux, les réponses erronées doivent se justifier par d'autres raisons plus liées à la conceptualisation de l'aire et du périmètre.

Pour la conservation de l'aire avec diminution du périmètre, l'élève cherche dans la table de multiplication des entiers une paire de nombres dont le produit est 24, et ensuite on vérifie si la somme est plus petite que 10 (demi-périmètre du rectangle de départ). Toutes les paires de nombres entiers différentes de (6,4) dont le produit est 24 sont telles que leur somme est plus grande que 10 (le demi-périmètre du rectangle de départ).

Pour la production d'un rectangle de même périmètre et d'aire plus petite que le rectangle de départ, il s'agit de chercher une paire de nombres dont la somme est 10 et le produit est plus petit que 24. Les réponses possibles pour les côtés entiers sont (3 cm, 7 cm), (2 cm, 8 cm) ou (1 cm, 9 cm).

Le traitement numérique de la production d'un rectangle d'aire plus petite et de périmètre plus grand que ceux du rectangle de départ, consiste à chercher une paire de nombres dont le produit est plus petit que 24 et la somme est plus grande que 10. Toutes les paires de nombres entiers telles que $l = 2$ et $9 < L < 12$ ou $l = 1$ et $10 < L < 23$ respectent les consignes énoncées ci-dessus[34].

e) Procédures basées sur la mise œuvre de théorèmes-en-acte numériques (erronés)

On peut s'attendre aussi à la mise en œuvre des théorèmes-en-acte numériques[35] suivants « *si on augmente une somme (respectivement un produit) alors chacun des termes (respectivement des facteurs) est augmenté* » et « *une somme (respectivement un produit) ne peut augmenter si l'un des termes (respectivement facteurs) diminue* ». La mise en œuvre de l'un de ces théorèmes-en-acte peut être repérée par une procédure numérique où l'élève augmente les deux côtés pour obtenir un rectangle de périmètre plus grand ou s'il conserve l'un des côtés et augmente l'autre. Ce type de procédure conduit forcément à la production de rectangles d'aire plus grande que celle du rectangle de départ, et l'élève peut conclure que c'est impossible de respecter les deux contraintes à la fois. La mise en œuvre de ce type de procédures conduit par exemple l'élève à diminuer à la fois la largeur et la longueur du rectangle pour produire des rectangles d'aire plus petite (obtenant ainsi un rectangle de périmètre plus petit).

---

[34] Le choix fait des données numériques permet ainsi de diminuer l'effet de domaine de validité.

[35] Cf. Balacheff (1988) et Moreira Baltar et Comiti (1993)

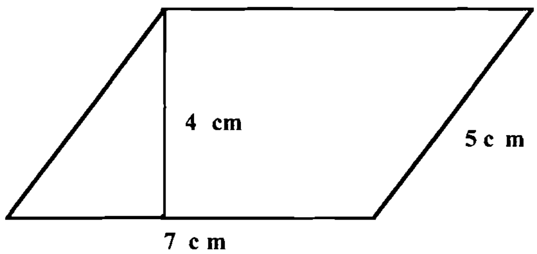
f) Procédures géométriques
Pour la production d'un rectangle de même périmètre et d'aire plus petite que ceux du rectangle de départ, l'élève dessine un rectangle à l'intérieur de A (par la prise en compte de la contrainte d'aire plus petite que celle de A). Le rectangle ainsi obtenu aura forcément le périmètre plus petit que celui de A, ce qui peut conduire l'élève à conclure qu'il est impossible de respecter les deux consignes à la fois.

6.3. Exemple de situation de production de rectangles à partir d'un parallélogramme de départ

- Situation 10

Il s'agit d'une situation de production d'un rectangle de même aire (puis de même périmètre) qu'un parallélogramme de départ. On donne la figure cotée, dessinée sur papier blanc en vraie grandeur. Les données numériques sont toutes entières.

Voici un parallélogramme P



a) Peux-tu dessiner un rectangle dont l'un des côtés mesure 7 cm et dont l'aire est égale à celle de P ? Justifie ta réponse.
b) Peux-tu dessiner un rectangle dont l'un des côtés mesure 7 cm et dont le périmètre est égal à celui de P ? Justifie ta réponse.

Les réponses à ces questions permettent d'observer si les élèves confondent les deux déformations du parallélogramme « glissement du côté sur son support » et « pivotement d'un côté autour d'un sommet » en ce qui concerne les variations de l'aire et du périmètre.

Pour la production d'un rectangle de même aire, les procédures suivantes sont possibles :

a) Procédure de découpage-recollement[36]
Avec l'usage du papier calque ou éventuellement par reproduction du parallélogramme sur le papier quadrillé ou papier pointé

b) Procédure basée sur l'usage implicite de la formule de l'aire du parallélogramme
Par l'utilisation directe des mesures du côté de longueur 7 cm, pris pour base et de celle de la hauteur correspondante (4 cm), pour dessiner le rectangle pertinent.

[36] La figure de départ peut induire la mise en œuvre d'une procédure de ce type.

c) Procédures correspondant à la production d'un rectangle dont les mesures des côtés sont les mêmes que celles du parallélogramme.
Ce type de procédure peut être interprétée en liaison avec plusieurs théorèmes-en-acte erronés :
Deux surfaces de même périmètre ont même aire.
Deux surfaces qui ont les mêmes côtés ont même aire.
Parallélogrammes de mêmes côtés ont même aire.
Le 'pivotement d'un côté autour d'un sommet' conserve l'aire du parallélogramme.

Pour la production d'un rectangle de même périmètre, on peut s'attendre à ce que certains élèves repèrent les mesures des côtés sur le dessin du parallélogramme et dessinent ensuite (sur papier blanc, papier pointé ou papier quadrillé) un rectangle de mêmes côtés.
Cependant, la procédure de reproduction du rectangle dessiné pour la question antérieure est également envisageable. La mise en œuvre de cette procédure[37] est à relier aux théorèmes-en-acte (erronés) suivants :
Deux surfaces de même aire ont même périmètre.
Deux rectangles de même aire ont même périmètre.
Le glissement d'un côté sur son support conserve le périmètre.

6.4. Classement des procédures de production d'une surface de même aire qu'une surface donnée et mise en évidence des invariants sous-jacents[38]

a) Procédures faisant intervenir l'aire en tant que grandeur unidimensionnelle
• Le dénombrement des unités d'aire
Cette procédure est liée aux procédures de type pavage dans les problèmes de mesure d'aire. Le théorème-en-acte sous-jacent est : « *Etant choisie une unité, des surfaces de même mesure ont même aire* ».
Cette procédure renforce l'invariant selon lequel « *L'aire est le nombre de carreaux nécessaires pour recouvrir une surface* ».
Les différentes valeurs de variables telles la forme de la surface de départ, la forme de l'unité de mesure, et celle de la surface qui doit être produite peuvent favoriser ou bloquer la mise en œuvre de ce type de procédure.
• Découpage recollement
C'est une procédure géométrique et le cadre numérique n'intervient pas. Si une surface S' est obtenue à partir d'une surface S par découpage recollement[39], on dira que S et S' ont même aire. Ceci peut être formulé en termes du théorème-en-acte suivant : *Le « découpage-recollement » conserve l'aire.*

---

[37] Selon ce raisonnement, si l'élève avait donné une réponse erronée à la question précédente, sa réponse ici serait exacte, bien que basée sur des théorèmes-en-acte faux. Si sa réponse à la question précédente était exacte, le rectangle aurait même aire mais son périmètre serait plus petit que celui du parallélogramme.

[38] Nous ne re-expliciterons pas les invariants déjà rencontrés dans les types de situations précédentes. Nous nous bornerons donc à développer les nouveaux invariants qui apparaissent.

[39] Respectant les contraintes qu'aucun morceau n'est perdu et qu'il n'y a pas de chevauchement.

Celui-ci repose sur l'invariance de l'aire par isométrie et sur l'additivité des aires. La mise en œuvre de ce type de procédure renforce la construction de l'invariant primitif selon lequel l'aire est une grandeur.

b) Procédures faisant intervenir l'aire en tant que grandeur bidimensionnelle

• Mise en œuvre de déformations qui permettent de conserver l'aire

Les formules de l'aire d'un triangle et d'un parallélogramme permettent de conclure que des triangles (et des parallélogrammes) de même base et même hauteur ont même aire. De même, le « glissement d'un côté du parallélogramme sur son support » conserve l'aire du parallélogramme, car une base et la hauteur correspondante sont conservées.
Donc, pour produire des surfaces de même aire, dans le cas de parallélogrammes, il est possible de mettre en œuvre des procédures basées sur le théorème-en-acte selon lequel *Le « glissement d'un côté d'un parallélogramme sur son support » conserve l'aire.*

6.5. Classement des procédures de production d'une surface d'aire plus grande ou plus petite qu'une surface donnée

a) Procédures géométriques

• Construire une surface à l'intérieur (ou à l'extérieur) de la surface de départ

Cette procédure se justifie par l'additivité des aires et par le fait que l'aire est une fonction positive : une surface incluse dans une autre aura une aire plus petite. Elle est reliée aux situations de comparaison par inclusion. Implicitement, on trouve la mise en œuvre du théorème-en-acte suivant : *Si S et S' sont quasi-disjointes,* $A(S \cup S') = A(S) + A(S')$
La mise en œuvre de ce type de procédure est souvent accompagnée d'une conservation de la forme (typique des conceptions géométriques), ce qui favorise l'apparition de difficultés de dissociation des variations de l'aire et du périmètre. On peut ainsi l'associer à l'invariant primitif selon lequel l'aire est associée à l'encombrement.

• Découper (ou ajouter) un morceau de la surface de départ

Cette procédure se justifie également par l'additivité des aires. Cependant, contrairement à la procédure précédente, la forme de la surface n'est pas prégnante, ce qui favorise la distinction entre les variations de l'aire et du périmètre.

b) Procédures numériques

• Utiliser la mesure de l'aire de la surface de départ (obtenue par comptage de carreaux ou par calcul) pour produire une surface d'aire plus grande (ou plus petite)

Cette procédure s'appuie sur le théorème-en-acte selon lesquels l'ordre établi pour les mesures d'aire est le même que celui des aires : *Etant donnée une unité de mesure, la surface dont la mesure est plus grande a une aire plus grande et deux surfaces de même mesure ont même aire.*

7. Invariants opératoires

Dans ce paragraphe, nous proposons une synthèse des différents invariants associés aux situations donnant du sens au concept d'aire de surfaces planes.

- Concepts-en-acte

Nombreux sont les concepts-en-acte en jeu dans la conceptualisation de l'aire : les concepts d'aire, de grandeur, de mesure, de nombre, ainsi que ceux de périmètre, d'encombrement, de multiplication, d'addition, de recollement, de découpage, d'équivalence, etc.

- Invariants « primitifs »

Nous avons identifié quatre invariants plus vagues, plus généraux et plus primitifs que les théorèmes-en-acte que nous énoncerons ensuite. Nous les notons I_i.

I1 : L'aire est la place occupée par une surface (dans le sens de l'encombrement).

I2 : L'aire est le nombre de carreaux nécessaires pour recouvrir une surface.

I3 : L'aire est un nombre obtenu par l'application d'une formule.

I4 : L'aire est une propriété de la surface invariante par certaines opérations (une grandeur).

- Théorèmes-en-acte

Nous les présentons ci-dessous selon une classification relative aux surfaces concernées : toutes surfaces, surfaces usuelles ou déformations du parallélogramme.

Pour tous les types de surfaces :

T1 : Si S et S' sont quasi-disjointes, $A(S \cup S') = A(S) + A(S')$ (vrai)

T2 : $A(f(S)) = A(S)$; pour une isométrie f et une surface S. (vrai)

T3 : Deux surfaces équidécomposables ont même aire. (vrai)

T3' : Le « découpage-recollement » conserve l'aire. (vrai)

T4 : Etant choisie une unité de mesure, la surface dont la mesure est plus grande a l'aire plus grande et deux surfaces de même mesure ont même aire (vrai)

T5 : Si deux surfaces S et S' sont équidécomposables de façon que S' soit plus « compacte » que S (S est plus « encombrante » que S') $A(S) > A(S')$. (faux)

T6 : Deux surfaces qui ont les mêmes côtés ont même aire. (faux)

T7 : Deux surfaces de même aire ont même périmètre. (faux)

T8 : Deux surfaces de même périmètre ont même aire. (faux)

T9 : L'aire et le périmètre d'une surface varient dans le même sens. (faux)

Pour les surfaces usuelles

T11 : Deux rectangles de même aire sont identiques. (faux)

T12 : Deux triangles (ou parallélogrammes) de même base et même hauteur ont même aire. (vrai)

T13 : Deux parallélogrammes de mêmes côtés ont même aire. (faux)

T14 : La mesure de l'aire d'un rectangle est le produit des mesures de ses côtés. (vrai)

T15 : La mesure de l'aire d'un parallélogramme est le produit des mesures de ses côtés. (faux)

T16 : La mesure de l'aire d'un triangle est le produit des mesures de ses côtés. (faux)

T17 : L'aire d'un carré est proportionnelle à la longueur de son côté[40]. (faux)

T18 : Deux rectangles de même aire ont même périmètre. (faux)

T19 : Deux rectangles de même périmètre ont même aire. (faux)

T20 : L'aire et le périmètre d'un rectangle variant dans le même sens. (faux)

---

[40] Par conséquent, si le côté du carré double, son aire double aussi.

Sur les déformations du parallélogramme

T21 : Le « glissement d'un côté d'un parallélogramme sur son support » conserve l'aire. (vrai)

T22 : Le « pivotement d'un côté du parallélogramme autour d'un sommet » conserve l'aire. (faux)

T23 : Le « glissement d'un côté » d'un parallélogramme sur son support conserve le périmètre. (faux)

T24 : Le « pivotement d'un côté du parallélogramme autour d'un sommet » conserve le périmètre. (vrai)

Remarques

Il est important de comprendre que certaines réponses données par les élèves peuvent être interprétées à la lumière de plusieurs théorèmes-en-acte. Par exemple, un élève qui fait varier l'aire et le périmètre d'un rectangle dans le même sens peut mettre en oeuvre T9 ou T20. Dans le premier cas, il ne dissocie pas les variations de l'aire et du périmètre pour n'importe quelle famille de surfaces. Dans le second où l'élève est capable de dissocier les variations de l'aire et du périmètre pour des surfaces quelconques, il est intéressant de s'interroger sur les raisons de la résistance de cette erreur dans le cas des rectangles. Une interprétation possible, peut se faire à travers la mise en oeuvre par l'élève des théorèmes-en-acte numériques selon lesquels :

- Si on augmente une somme (respectivement un produit) alors chacun des termes (respectivement des facteurs) est augmenté.
- Une somme (respectivement un produit) ne peut augmenter si l'un des termes (respectivement facteurs) diminue.

Par ailleurs, l'acquisition de certains théorèmes en acte peut s'expliquer par une démarche de généralisation de la part de l'élève. Par exemple, à partir du théorème-en-acte vrai T14, l'élève peut construire T15 et T16 (faux). De même, la mise en oeuvre d'une démarche de ce type peut le conduire à passer de T21 et T24 à T22 et T23.

Conclusion

L'un des apports de notre étude est d'avoir organisé la plupart des types de situations pouvant être rencontrées à l'école élémentaire et en début de collège, en explicitant les procédures de traitement possibles ainsi que les invariants sous-jacents.

Les invariants primitifs I1, I2 et I3 selon lesquels soit l'aire est attachée à l'encombrement (ce qui peut être relié aux conceptions géométriques) soit l'aire est un nombre obtenu par pavage ou par calcul (reliés aux conceptions numériques) ne suffisent pas pour traiter la variété de situations nécessaires à la construction du sens du concept d'aire. Nos analyses montrent que les procédures basées sur ces invariants primitifs ne permettent pas toujours de donner une réponse exacte aux problèmes posés. De plus, les exemples traités montrent comment des théorèmes-en-acte erronés liés à ces invariants permettent de produire des réponses exactes dans certains types de situations, ce qui peut rendre difficile leur identification en situation d'enseignement.

La construction par les élèves de l'invariant I4, selon lequel l'aire est une grandeur, permet d'établir les relations pertinentes entre les cadres géométrique et numérique. Un autre apport de notre étude est d'avoir explicité les liens entre situations et invariants, mettant ainsi en évidence comment différents types de situations permettent de construire différentes propriétés du concept.

Ces résultats nous paraissent pouvoir être un outil pour les enseignants aussi bien dans la conception et le choix des situations d'apprentissage que pour l'analyse et l'interprétation des erreurs des élèves.

Bibliographie

BALACHEFF N. (1988) *Processus de preuve chez des élèves de collège.* Thèse de Doctorat d'État, Université Joseph Fourrier, Grenoble.

BAULAC Y., BELLEMAIN F., LABORDE J.M. (1988) Cabri-géomètre, un logiciel d'aide à l'enseignement de la géométrie, logiciel et manuel d'utilisation, version 1.0. Macintosh de Apple

DOUADY R. et PERRIN-GLORIAN M.J. (1984) Aires de surfaces planes (1ère partie). *Petit x,* n° 6, pp. 5-33.

DOUADY R. et PERRIN-GLORIAN M.J. (1985) Aires de surfaces planes (2ème partie) *Petit x,* n° 8, pp. 5-30.

DOUADY R. et PERRIN-GLORIAN M.J. (1989) Un processus d'apprentissage du concept d'aire de surface plane. *Educational Studies in Mathematics*, 20(4), pp. 387- 424.

MOREIRA BALTAR P. et COMITI C. (1993) Difficultés rencontrées par des élèves de cinquième en ce qui concerne la dissociation aire/périmètre pour des rectangles, *Petit x*, n°34, IREM de Grenoble, pp. 5-29.

MOREIRA BALTAR P. (1996) *Enseignement et apprentissage de la notion d'aire de surfaces planes : une étude de l'acquisition des relations entre les longueurs et les aires au collège.* Thèse de Doctorat de l'Université Grenoble 1.

MOREIRA BALTAR P. (1997) A propos de l'apprentissage du concept d'aire. *Petit x*, 43, pp. 43-68.

ROGALSKI J. (1982) Acquisition de notions relatives à la dimensionalité des mesures spatiales (longueur, surface). *Recherches en didactique des mathématiques*, n°3.3, La Pensée Sauvage, Grenoble, pp. 343-396.

VERGNAUD G. (1981) *L'enfant, la mathématique et la réalité.* Berne : Peter LANG.

VERGNAUD G. (1990) La théorie des Champs Conceptuels. *Recherches en didactique des mathématiques*. 10 (2.3) 133-170.