DES ALLUMETTES AUX POLYMINOS : INCURSION DES MATHÉMATIQUES DISCRÈTES DANS LA CLASSE DE TROISIÈME ?

Julien ROLLAND
Combinatoire Naïve et Apprentissage Mathématiques
Laboratoire LEIBNIZ, Grenoble

Introduction

Cet article est issu de notre mémoire de DEA (Rolland, 1995), dans lequel nous avons initié une étude didactique et épistémologique de la place et du rôle des mathématiques discrètes dans l'enseignement au collège. Nous avons fait le choix, dans cet article, d'analyser un problème issu d'un manuel de la classe de troisième, mais des problèmes de ce type se retrouvent de manière récurrente dans de nombreux manuels du collège. Nous mettons en évidence, dans un premier temps, le fait que sa présence au sein du manuel ne peut être légitimée par les savoirs officiellement mis en jeu. Dans un second temps, nous montrons en quoi le problème relève des mathématiques discrètes et les apprentissages qu'on pourrait lui associer. Une étude expérimentale du problème avec des Professeurs de Lycées et Collèges en seconde année de formation (PLC2) nous permet d'appuyer nos propos et montre l'intérêt de dépasser la problématique suggérée par le manuel. En guise de conclusion, nous donnons des pistes qui permettent d'utiliser une généralisation de ce problème pour une approche de la récurrence.

«petit x» n° 49, pp. 21 à 42, 1998 - 1999

I Bases de travail

I.1 Qu'est-ce que les mathématiques discrètes ?

Il n'est pas toujours aisé de déterminer ce qui est mathématique et ce qui ne l'est pas. De même, les frontières entre les différentes branches des mathématiques (algèbre, analyse, géométrie,...) restent forcément floues. Les mathématiques discrètes n'échappent pas à cette difficulté de catégorisation. Le dictionnaire des mathématiques Bouvier et al. (1979), s'inspirant sans doute de Berge (1968), définit ainsi la Combinatoire[1] :

> « La combinatoire étudie les configurations, elle veut les recenser, elle cherche leurs propriétés intrinsèques, elle étudie la transformation d'une configuration en une autre, les 'sous configurations' que l'on peut extraire d'une configuration [ ]. »

Définition qu'il faut éclairer en notant que l'on :

> « Cherche une configuration chaque fois que l'on veut placer des objets de façon à respecter certaines contraintes fixées à l'avance « (Berge, 1968)

Nous préciserons que l'on cherche une configuration chaque fois que l'on veut placer des *objets discrets* en nombre *fini* ou *dénombrable* de manière à respecter certaines contraintes. En termes plus mathématiques, une configuration est une application d'un ensemble d'objets dans un ensemble abstrait dénombrable muni d'une structure connue.

A ce stade, nous pouvons pointer différents questionnements relevant des mathématiques discrètes (pour des exemples de théories et de problèmes, on peut consulter Grenier et Payan, 1997).

a. Outre l'étude des propriétés intrinsèques d'une configuration connue, un des aspects classiques des mathématiques discrètes consiste à *démontrer l'existence ou la non-existence d'une configuration possédant certaines propriétés remarquables*. Nous pouvons citer comme exemple le célèbre problème des sept ponts de la ville de Königsberg étudié par Euler.

b. Le *dénombrement* des configurations qui constitue sans doute la partie la plus connue des mathématiques discrètes. En effet, c'est la seule dont la transposition didactique est ébauchée et qui a une place officielle dans les institutions secondaires, à travers les chapitres intitulés « analyse combinatoire » ou « dénombrement » des classes de Première et Terminale.

---

[1] En première approche nous considérerons les termes *combinatoire* et *mathématiques discrètes* comme synonymes. Cependant, nous conserverons dans la suite du texte le terme de mathématiques discrètes pour ne pas induire sa réduction à la seule *analyse combinatoire*.

c. Les mathématiques discrètes s'intéressent aussi au dénombrement approximatif des configurations ; une branche importante, dont les résultats sont notamment appliqués en économie (au sens large), s'occupe d'*optimisation* [2].

La nature des objets d'étude comme les questionnements spécifiques induisent une certaine manière de regarder les objets mathématiques dont découle la création d'outils (le graphe, ...), mais aussi des démarches ou méthodes propres (structuration, principe de Dirichlet, décomposition-recomposition, ...).

Nous avons tenté de définir les mathématiques discrètes en essayant de dégager des problématiques qui leurs seraient propres. Il est aussi possible, et c'est la voie que choisissent souvent les mathématiciens discrets quand ils ont à définir leur discipline, d'énumérer les caractérisations qui ne seront pas regardées. Pour cette définition « en creux », nous pouvons dire que les mathématiques discrètes ne s'intéressent pas aux notions de grandeur, taille, mesure, continuité, ce qui donne au graphe un caractère presque emblématique, puisqu'une représentation en terme de graphe évacue, a priori, ces notions (pour une étude écologique de l'objet graphe dans les manuels scolaires, on peut consulter Balmand, 1998).

Il reste à répondre à la question *« Qu'est-ce qu'un problème de mathématiques discrètes ? »*.

Nous avons défini des questionnements qui relèvent des mathématiques discrètes. Ainsi, nous dirons que nous sommes face à un problème de mathématiques discrètes, d'une part, quand le problème repose sur l'étude ou la recherche de configurations particulières et, d'autre part, lorsque des outils spécifiques comme le graphe ou la coloration apparaissent comme pertinents pour le résoudre. Ces deux points peuvent apparaître comme indépendants, en fait, on peut penser que si les outils du mathématicien discret sont pertinents, c'est sans doute que le problème est modélisable en termes de configurations discrètes.

I.2 « Point méthode »

Pour cette étude qui n'utilise « que » l'analyse de manuels, nous resterons prudent quand aux interprétations en termes d'apprentissage :

> « C'est la dialectique 'forme de l'énoncé / forme du travail des élèves' qui est déterminante dans le lien entre les activités des élèves et les conséquences en termes d'apprentissage, plus que le strict énoncé de l'exercice. Les prises de décisions de l'enseignant à propos des activités doivent porter sur les deux choses à la fois, et <u>cela ne peut figurer dans le manuel!</u>[3] » (Robert et Robinet, 1989).

---

[2] Un exemple classique de ce type de questionnement est le problème du voyageur de commerce, pour lequel il s'agit de trouver l'itinéraire le plus court qu'un voyageur de commerce doit emprunter s'il veut visiter une et une seule fois toutes les villes de sa tournée.

[3] Souligné dans le texte.

Cependant, nous pensons qu'il est possible de lire dans un manuel une part des règles du contrat didactique (Brousseau, 1987), nous permettant notamment d'analyser le statut des différents exercices. Ainsi, reprenant à notre compte les considérations faites par A. Bessot et A. Le Thi Hoai (1993), nous dirons que:

> « Dans un manuel, il existe des indicateurs linguistiques découpant le texte du savoir enseigné. Nous considérons ici un découpage en deux parties: une partie identifiable à un cours (le texte de l'enseignant) et une partie identifiable à des exercices à la charge de l'élève (le travail de l'élève). »

Poursuivant cette étude, nous pouvons dire que d'autres dénominations en langue naturelle permettent de distinguer plusieurs rubriques au sein de la partie « *exercices* ». Ce que nous pouvons retenir, c'est qu'il existe un découpage, que l'on retrouve dans la totalité des manuels, entre « *exercices d'application* » et « *exercices d'initiative et de réflexion* ». Ces deux rubriques se distinguent par des mentions comme « *pour s'entraîner* » et « *pour chercher »*"[4], « *savoir faire* » contre « *chercher* » ou encore « *appliquer* » en opposition à « *réfléchir* ». En outre, certains manuels proposent d'autres rubriques en marge de ce découpage. Il s'agit notamment du Magnard 3$^{\text{ème}}$ (1989) qui possède une rubrique « *Maths magazine* » qui se veut être « *une autre façon de faire des mathématiques* ».

Si le cours est censé préciser le savoir officiel à enseigner, les parties exercices viennent confirmer et donner du sens à ce savoir. Nous faisons alors l'hypothèse suivante :

> Le découpage de la partie « *exercices* » des manuels en différentes rubriques révèle, en partie, certain termes du contrat didactique du fait qu'il précise l'ensemble des prestations légitimement exigibles des élèves par l'enseignant utilisateur du manuel (et reconnues comme telles par les élèves utilisateurs du manuel).

De plus, en mettant en avant certaines facettes de la notion étudiée, les parties "*exercices*" institutionnalisent ce qu'il est important de savoir faire, légitiment par exemple les énoncés des contrôles et examens. En outre, le découpage de ces parties fait le partage entre ce qui peut être considéré comme indispensable et ce qui peut être considéré comme superflu, entre ce que l'enseignant est en droit d'exiger de toute la classe et ce qui pourra être "*réservé aux meilleurs*".

S'il reste classique de différencier, dans les manuels autant que dans les analyses didactiques, les parties « *Exercices d'application* » et « *Exercices de recherche* », nous voulons, ici, attirer l'attention sur un autre type d'exercice que nous appellerons les jeux mathématiques. Le « *jeu mathématique* » doit rester un jeu pour permettre de démystifier un éventuel caractère sérieux ou difficile des mathématiques, en mettant en avant leur caractère ludique. C'est pour cela que les exercices de ces rubriques sont souvent très contextualisés, les auteurs développent souvent une véritable histoire autour du problème avant d'en arriver aux questions. Mais le jeu doit aussi conserver un caractère

---

[4]Nathan (1989): " Pour s'entraîner: l'élève, pour résoudre doit utiliser un résultat du cours sans intermédiaires. Pour chercher: l'élève doit trouver un intermédiaire simple pour résoudre ".

mathématique pour que sa place au sein du manuel soit légitimée, vis à vis de l'élève comme du professeur. *C'est bien parce qu'il a à tenir ce rôle ambigu (c'est un jeu, mais c'est aussi un exercice), qu'autour du jeu mathématique doit se développer un contrat didactique spécifique.*

Au sein de la classe de mathématiques, ou quand il fait ses devoirs de mathématiques, l'élève doit, face à un jeu mathématique, accepter de jouer, de faire comme s'il n'avait pas à utiliser de connaissances reconnues par lui comme mathématiques. Mais il doit, tout de même, à terme, être capable de reconnaître comme mathématique cette nouvelle attitude de recherche proposée par ces problèmes. Cependant, si le jeu est cette "activité non imposée, ne visant à aucune fin utilitaire et à laquelle on s'adonne pour se divertir, en tirer un plaisir" (Grand Larousse, 1991), l'injonction « joue » reste paradoxale. C'est autour de ce paradoxe que le contrat doit se négocier pour permettre la réalisation de ce pari ambitieux, divertir et apprendre.

II Jouer avec des allumettes

C'est après un chapitre « Transformations du plan, image par composition » que l'on trouve, dans une partie « Math magazine » du manuel Magnard (1989), une série d'exercices ayant la particularité de tous se situer dans un contexte de manipulation d'allumettes. Nous sommes en présence de problèmes combinatoires, puisque, selon la définition que nous nous sommes donnée, il s'agit de déterminer une configuration d'objets discrets (les allumettes) possédant certaines contraintes.

II.1 Analyse de la présentation, statut du problème

Avant de regarder un de ces exercices plus en détail, intéressons-nous à leur présentation, au contexte dans lequel ils apparaissent (Annexe 1). Le titre de la page est : « casse-tête », ce qui leur donne d'emblée un statut particulier.

Regardons ce que nous pouvons trouver à l'entrée « casse-tête » du Grand Larousse (1991). Le casse-tête est un « travail qui demande une grande application, un problème difficile à résoudre », chinois, c'est un « jeu de patience dans lequel il s'agit de reconstituer des formes en en combinant les différents éléments, de défaire un assemblage d'éléments ».

Cette définition nous intéresse à plus d'un titre. Tout d'abord, le casse-tête possède un caractère ambivalent. En effet, il s'agit à la fois d'un travail, d'un problème et d'un jeu. Ensuite, la définition du « casse-tête chinois » fait référence à des combinaisons d'éléments (discrets et en nombre fini) et à des assemblages-désassemblages : il s'agit bien de mathématiques discrètes.

Cette définition fait expressément référence au jeu[5], mais elle fait aussi clairement appel à une tâche. De plus, il apparaît que, pour résoudre un casse-tête, il faut pour l'essentiel une « grande application ». Le Larousse (1979) dit du casse-tête que c'est un « *travail ou un jeu qui fatigue beaucoup l'esprit, qui présente des difficultés presque*

[5] C'est d'ailleurs dans les boutiques de jeux que s'achètent les casses-tête.

insolubles ». Ceci laisserait sous-entendre qu'il ne doit pas exister de méthode rationnelle pour en venir à bout, que sa résolution nécessite donc de tâtonner et peut être aussi d'avoir de la chance, mais qu'en tout cas, elle ne requiert aucune connaissance particulière. Nous voyons alors que le casse-tête semble être le parfait exemple du jeu mathématique. En effet, il permet de développer des compétences annexes (tâtonnement, application,...) sans nécessiter de connaissances mathématiques préalables.

Ainsi, dès le titre du chapitre, nous sortons du contrat usuel , pour aller vers un contrat de jeu. Ceci est attesté par plusieurs éléments :
- le fait que ces problèmes apparaissent dans une rubrique « Math magazine » qui, pour les auteurs, « développe 2 ou 3 articles sur le thème du chapitre : histoire des mathématiques, curiosité, jeu » ;
- l'emploi d'expressions comme « Voyez donc si... » (Exercice n°2), qui sont beaucoup moins directives que « Démontrer que... » ;
- l'emploi de termes comme « dessin évocateur », « bouquet de losanges », qui n'induisent pas automatiquement une argumentation de type mathématique, mais insistent sur un aspect perceptif ou esthétique.

Nous pouvons encore nous demander pourquoi choisir des allumettes plutôt que des segments par exemple. Les auteurs ne se servent pas du marquage dissymétrique par le bout rouge de l'un des côtés de l'allumette. Il apparaît même que ce marquage supprime un grand nombre de symétries dans les exercices proposés. Ainsi, même si l'on parle, si l'on dessine des allumettes, ce n'est pas avec elles qu'on travaille, mais avec un objet déjà idéalisé.

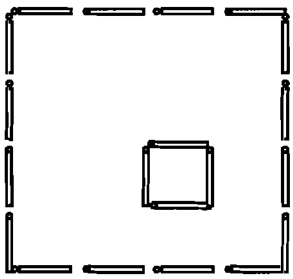
Mais alors, pourquoi un contexte d'allumettes ? Nous faisons l'hypothèse que les transformations mathématiques qui déplacent des segments ne sont pas toujours faciles à décrire, alors qu'en faisant référence à des allumettes on peut s'imaginer les déplacer. Ici, on se place dans une zone intermédiaire entre la réalisation effective et l'expérience mentale qui est facilitée par l'emploi d'un objet usuel. De plus, la réalisation effective pourra toujours venir en aide.

En parlant d'allumettes, on « démathématise » l'exercice pour l'entraîner encore du côté du jeu. Ici, aucun point, aucune droite ne sont ni nommés ni désignés, alors que toutes les transformations étudiées dans le cours le sont à partir de points et de droites. De plus, certains axes de symétrie ne sont pas portés par l'une des allumettes. Ce faisant, les auteurs font obstacle à une argumentation de type mathématique au profit de constatation empirique ou de monstration où le fait d'exhiber une solution particulière apparaît comme satisfaisant. Nous pouvons alors faire l'hypothèse qu'il est nécessaire de dépasser le point de vue des allumettes pour être en mesure de répondre aux question posées. Regardons pourquoi en analysant un de ces exercices.

II.2 Le château

L'énoncé est le suivant :

Le grand carré est le plan, sans fioritures, du domaine d'une grande famille d'Angleterre. Le duc désire habiter toujours son château, figuré par le petit carré. Mais, poussé tant par l'affectueuse sollicitude des siens que par la cherté des impôts locaux, il divise ses terres entre ses cinq nièces. Pour éviter toute polémique, il les divise en cinq parcelles égales par la forme et la taille. Pourriez-vous en faire autant avec dix allumettes ?



II.2.1 Analyse de la tâche en rapport avec les objectifs explicites des auteurs

Où l'on utilise la symétrie

Ce problème est issu de la rubrique « Maths Magazine » rattachée au chapitre « Transformations du plan, image par composition ». De plus, il est stipulé en préambule:

« Nous vous proposons quelques "casse-têtes" réalisés à partir d'allumettes.
Nous avons choisi des cas où les symétries jouent un rôle important, soit dans la figure de départ, soit dans la solution. »

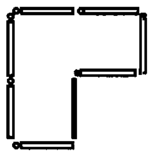
La seule manière de mettre en oeuvre ici la symétrie peut être décrite par le théorème en acte suivant :

« A figure de départ symétrique, la solution est symétrique ».

Et il est vrai que la figure de départ présente une symétrie orthogonale à 45 degrés par rapport aux bords de la feuille (et ce, même si on considère l'orientation des allumettes).

Une des consignes à respecter est que les cinq parcelles doivent être de la même *taille*, en prenant comme unité de surface celle du *château* ; ceci permet de conclure que la surface de chaque parcelle sera de 3 unités. La taille fixe des allumettes, les carrés déjà présents mais aussi la volonté d'utiliser la symétrie nous incitent à rester dans le cadre d'allumettes en positions horizontale ou verticale. Nous avons alors 2 possibilités pour la forme des parcelles (à l'orientation près) :

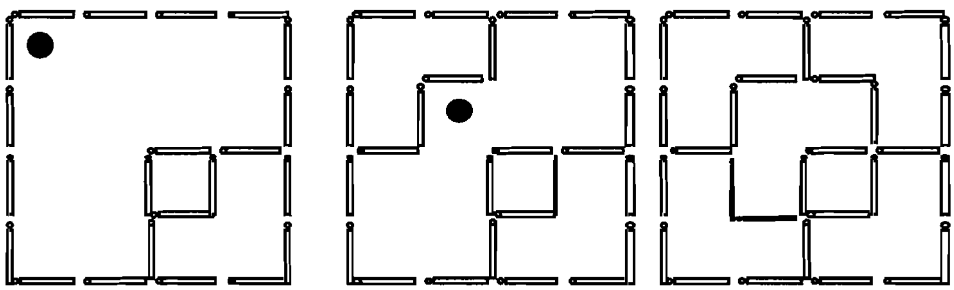
A



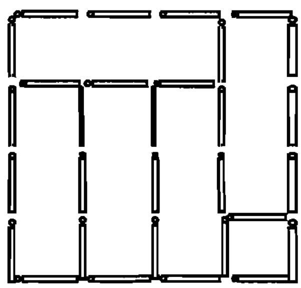
B

Deux stratégies conformes au théorème-en-acte ci-dessus permettent de rejeter la forme A : la première s'appuie sur le fait que la forme A ne possède pas la symétrie orthogonale à 45 degrés, la seconde utilise la propriété que, si on essaie de remplir le carré inférieur droit, la forme A ne permet pas conserver la symétrie initiale.

En ce qui concerne la forme B, en essayant de remplir successivement le carré marqué d'un point et *en voulant conserver la symétrie*, on aboutit à la seule solution suivante :



Ici, la symétrie a joué un rôle important. L'inconvénient est que la mise en oeuvre de ce théorème-en-acte, permettant d'aboutir dans ce cas particulier, peut trouver ici, une occasion de se renforcer. Or, il suffit de déplacer la position du « château » (en conservant la symétrie) pour qu'apparaisse une solution non symétrique :



Nous pouvons alors nous demander si un élève qui, d'une manière ou d'une autre, cherche à trouver dans un exercice résolu l'importance de la symétrie ne peut pas utiliser, en acte, ce théorème. Et même, puisqu'ici les auteurs présentent exercices et solutions sur la même page, nous pouvons nous demander si l'une des tâches réservées à l'élève n'est pas, justement, de voir comment intervient la symétrie dans la situation. En fait, la symétrie ne sert pas ou sert peu. En disant qu'elle joue un rôle important, on prend le risque de voir apparaître ou se renforcer des théorèmes-en-acte qui aboutiront à des erreurs dans des cas plus généraux.

Où l'on reste avec des allumettes

Si, comme le texte du problème et notamment la condition sur le nombre d'allumettes le suggère nous décidons de rester dans le cadre de manipulations d'allumettes, la seule stratégie disponible reste empirique, il faut tâtonner, essayer de placer des allumettes sans aucun moyen de contrôle. Et le recours à la symétrie ne peut être d'aucun secours. Les savoirs mathématiques alors mis en jeu sont difficilement repérables. Rester sur le nombre d'allumettes est un frein à la résolution de ce problème comme nous le verrons dans l'étude du protocole qui va suivre. L'étude du nombre d'allumettes peut toutefois amener à déterminer le périmètre de chacune des parcelles. En effet, considérons le fait que la frontière du domaine du Duc est constituée des 20 allumettes présentes, les 10 allumettes restant à placer, marquant la frontière entre deux parcelles sont comptées deux fois si l'on fait la somme des périmètres des cinq parcelles, qui est donc égale à 40 allumettes. Ainsi, chaque parcelle est bordée par 8 allumettes. Mais ce résultat ne permet pas de conclure quant à la forme des parcelles.

Pour conclure, nous dirons que la présentation de ce problème au sein du manuel met en avant deux problématiques. Une problématique associée au jeu dans laquelle on manipule des allumettes, pour laquelle les stratégies restent empiriques, les savoirs mathématiques absents et où les preuves ne peuvent se retrouver que du côté de la monstration. Une problématique liée à l'utilisation de la symétrie qui ne peut avoir pour effet que de renforcer des théorèmes-en-acte au domaine de validité très limité.

II.3 Une approche "discrète" du problème

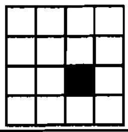
Ce problème possède la particularité de fournir un énoncé pseudo-concret (Henry, 1997) et une modélisation de ce problème qui utilise des allumettes. Nous venons de voir que, rester dans le modèle proposé par le manuel confine le problème dans son caractère ludique et ne permet pas la mise en place de stratégies mathématiques pertinentes. En fait, s'il est identifié ici comme casse-tête, nous pouvons approcher ce problème de manière discrète à l'aide d'une autre modélisation qui nécessite quelques définitions.

Un *polymino* est un assemblage plan de carrés (ou cases) tel que tout carré soit rattaché à la figure par au moins un de ses côtés (on peut donc passer d'un carré à un autre quelconque par une succession de carrés à arêtes communes). *L'aire d'un polymino* est le nombre de carrés qui le compose. *Paver un polymino* [6] consiste à le recouvrir par des polyminos d'aires inférieures de telle sorte que tout carré soit recouvert une fois et une seule.

[6] Les problèmes de pavage sont un axe de recherche très présent en mathématiques discrètes. Concernant le pavage de polyminos, des question de base restent ouvertes. Par exemple, on ne connaît pas de conditions d'existence du pavage de polyminos par des dominos dans le cas général.

La consigne devient:

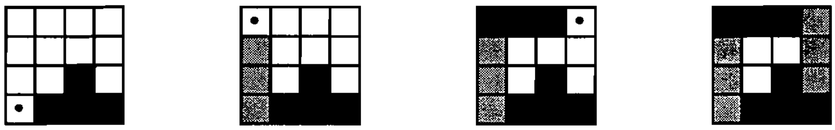
Comment à l'aide de 5 polyminos identiques, paver la figure suivante:



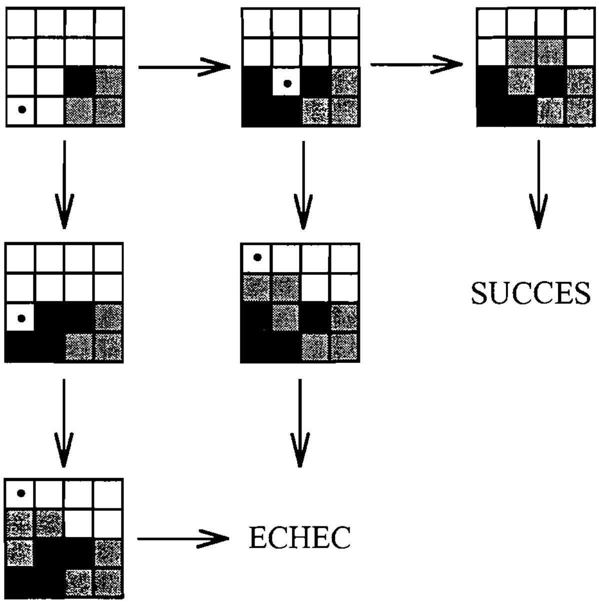
Nous pouvons commencer par déterminer le nombre de carré unitaire (unimino) que comportera chaque polymino. Comme il reste quinze uniminos à diviser en cinq, chaque polymino sera constitué de 3 uniminos (triminos). Parler de polyminos exclut de fait les parcelles non connexes, il reste donc deux polyminos possibles (à l'orientation près), les triminos :

A B

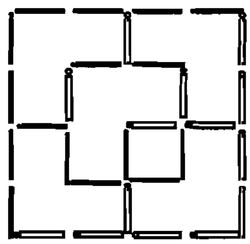
Commençons par le trimino A. L'utilisation du fait que la figure de départ possède un axe de symétrie nous permet de n'envisager qu'un seul cas de figure si l'on décide de commencer par combler le coin inférieur droit. Une fois ce choix fait, en voulant compléter la case marquée d'un point nous n'avons plus de choix à effectuer :



Nous aboutissons à une impasse. C'est donc que, si le polymino initial est pavable par des triminos ce ne peut être que les triminos B. En raisonnant toujours de la même manière regardons ce que nous obtenons:



Ce qui nous donne, avec des allumettes la seule solution suivante :



II.4 Savoirs mathématiques en jeu

Nous avons vu que, dans ce problème (comme pour les autres problèmes de la page), la symétrie n'apparaît jamais comme nécessaire, indispensable. Quand elle peut intervenir ce n'est que pour faire gagner du temps, limiter le nombre d'opérations. Mais ce nombre d'opérations n'est pas assez important pour justifier son emploi. Il reste alors à l'élève d'essayer tant bien que mal de mettre en oeuvre une connaissance sur la symétrie. L'apprentissage en jeu, dans tous ces exercices, au niveau de la symétrie est d'autant plus pauvre que n'apparaît qu'un type de symétrie. En effet, sur ce chapitre consacré aux transformations et même aux composées de transformations, on ne trouve que des exercices utilisant la symétrie axiale. De plus, avec la symétrie axiale, on ne demande qu'un seul type de tâche: reconnaître une droite de symétrie dans une figure donnée.

Nous ne disons pas que l'élève, dans cette situation, ne fera pas évoluer favorablement son rapport à la connaissance visée. Nous disons que cette dernière n'est pas nécessaire pour donner la bonne réponse. Bien sûr, l'élève peut mettre en place des stratégies en utilisant la connaissance visée, mais aucune ne pourra être une stratégie gagnante. La situation peut donc fournir un grand nombre d'essais où l'élève essaiera en vain de mettre en pratique la connaissance vue en cours. Dès lors, si l'on considère que l'apprentissage d'un savoir passe par l'apprentissage de son usage, nous pouvons envisager une hypothèse optimiste. Nous pouvons supposer que le concept de symétrie se précise. En effet, il est maintenant possible d'exclure la situation du champ des situations pertinentes. La situation ne serait alors présente que pour montrer les limites de la connaissance visée, pour donner un exemple de ce que l'on ne peut pas faire avec! Ceci dit, nous pensons que cette hypothèse est largement optimiste. En effet, à aucun moment dans le livre du professeur on ne fait allusion à de telles pratiques. Et, pour qu'une telle pratique puisse porter ses fruits, il faudrait que, sans devenir systématique, l'élève puisse envisager de telles possibilités. Or, il n'y a pas de place dans le contrat pour ce genre de pratiques.

La façon de poser ce problème fait obstacle à une analyse en terme de mathématiques discrètes. Ainsi, nous nous éloignons des savoirs au profit du jeu. Si l'élève se pose de bonnes questions, trouve de bonnes méthodes, rien ni personne ne viendra les institutionnaliser et les reconnaître en tant que connaissances mathématiques.

Où reconnaissons-nous des savoirs mathématiques dans la résolution « discrète » que nous venons de proposer ? Tout d'abord, dans l'étape de modélisation qui est une tâche relevant des mathématiques. Ensuite, lors de l'étude de l'adéquation entre l'énoncé initial et celui formulé en terme de polyminos, même si :

> « On notera que, lorsque le système à modéliser est non mathématique, les relations entre système et modèle ne sauraient être strictement "mathématiques" » (Chevallard, 1996-98)

Cette étape de modélisation permet en outre de problématiser la distinction entre condition nécessaire et condition suffisante à travers des questions comme*: « Que peut-on conclure si la figure initiale n'est pas pavable avec des triminos ? », « Que peut on dire sur le nombre de solutions une fois le pavage obtenu ? ».*

Différents travaux (Durand-Guerrier (1996), El Faqih (1991), Radford (1985)) mettent en évidence les difficultés que peuvent rencontrer les élèves (même au niveau universitaire) dans la distinction entre condition nécessaire et condition suffisante. La solution « discrète », s'inscrit tout à fait dans cette problématique. En effet, cette stratégie propose de catégoriser d'une part le type de polyminos candidats au pavage, d'autre part, la façon de paver. Il faut pouvoir montrer que *nécessairement*, seules ces deux formes conviennent et qu'il *suffit* d'étudier un certain nombre de cas restreints.

Si ce type de questionnement trouve une très forte résonance en mathématiques discrètes de par la nature des objets en jeu, il n'est pas spécifique de ce champ mathématique. Ceci permet cependant de formuler l'hypothèse que les mathématiques discrètes peuvent être un bon lieu pour l'apprentissage de notions protomathématiques, ces « notions mobilisées implicitement par le contrat didactique » (Chevallard, 1991), telles la modélisation ou la distinction entre condition nécessaire et condition suffisante.

II.5 Analyse d'un protocole

Le problème du « château » a fait l'objet d'une expérimentation auprès de Professeurs de Lycées et Collèges en seconde année de formation (PLC2). Ces PLC2, recrutés sur la base du volontariat, peuvent malgré tout être considérés comme assez représentatifs en ce sens que leurs origines sont diverses (agrégé, maître auxiliaire avec de l'ancienneté et étudiant provenant de licence). Durant cette expérimentation (enregistrée puis retranscrite, cf. Annexe 2), nous leur avons proposé de travailler en commun. Relevons quelques points qui vont dans le sens de ce que nous avons développé précédemment.

Tout d'abord, le fait que les PLC2 acceptent de rentrer dans le problème témoigne du caractère hors-contrat de ce dernier. En effet, il est légitime de penser que leur réaction eut été différente en présence d'un exercice classique de la classe de troisième. Nous pensons qu'il eut été jugé comme trop facile pour qu'ils acceptent que l'on puisse leur demander de le résoudre. Il est aussi à noter que, bien que ce soit un problème issu d'un manuel de troisième, Daniel a du mal à comprendre la consigne:

« Le premier il est ... pfouh! », « C'est ce que veut dire l'énoncé ? », « Je comprends pas », « Qu'est-ce qu'il faut faire exactement là ? », « J'ai toujours pas

pigé ». De fait, durant l'expérimentation, il reste en retrait en ne se positionnant qu'a partir des affirmations de ses camarades, sans rien proposer.

Le dialogue qui s'installe entre Hervé et Marie permet de repérer deux stratégies distinctes.

• *La première stratégie*, conformément à ce que l'on pouvait attendre au vu de l'énoncé, s'attache aux allumettes. Ainis, on retrouve régulièrement des allusions sur le nombre d'allumettes :
« Il y a combien d'allumettes ? », « Mais là, il n'y a pas 10 allumettes, il y en a 16 », « Oui, mais il faut compléter la figure avec 10 allumettes seulement ».

Pour cette stratégie, on s'intéresse au nombre d'allumettes et, donc, au périmètre de chaque parcelle ; par exemple, on peut voir que Marie compte le nombre d'allumettes qui bordent un trimino. Ici, le seul moyen d'action reste empirique, on dessine de petites barres, on tâtonne, sans aucun moyen de contrôle mathématique sur la place à donner aux allumettes. La seule validation consiste à compter le nombre d'allumettes:
« Donc ça m'en fait 1, 2, 3, donc ça m'en fait 5 pour l'instant, 6, 7, 8, 9, 10 ça marche ! ».

Cette stratégie n'a pas permis aux trois étudiants d'arriver à la solution recherchée.

• *Pour la seconde stratégie*, ce n'est plus au nombre d'allumettes que l'on s'intéresse mais à la *forme, à l'aire de chacune des parcelles*. En fait, même si ce n'est jamais formulé de la sorte, c'est bien à la question d'un pavage de polymino par des polyminos auxquels les étudiants sont alors confrontés. Il est à noter que le passage à cette seconde stratégie impose d'oublier la consigne sur le nombre d'allumettes; rester sur le nombre d'allumettes freine le passage aux aires :
« Oui mais moi je ne pensais même pas aux 10 allumettes, je pensais à la forme ».

L'intervention des aires permet de déterminer rapidement la taille des parcelles. Et, comme à aucun moment n'est évoquée la possibilité de parcelles aux côtés non entiers (en unités d'allumettes), ou des orientations des bordures de parcelles différentes de l'horizontale ou de la verticale, les deux formes (A et B) apparaissent :
« *De toute façon, il n'y a pas 36 façons de les répartir* »

La première (forme A) est invalidée avec un contre-exemple, et la seconde (forme B) permet, après quelques essais, d'aboutir à la solution.

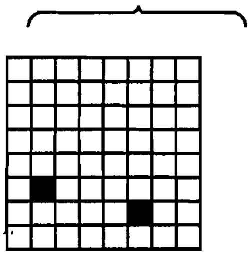
Pour conclure, nous dirons qu'il apparaît que le passage à la seconde stratégie, s'il est nécessaire pour aboutir à une solution, demande de se libérer de la première qui est très largement induite par le texte, notamment par la contrainte sur le nombre d'allumettes. En outre, cette contrainte, d'une certaine manière extérieure au problème puisque la solution est unique, induit des validations qui permettent de s'interroger quant à la distinction faite entre condition nécessaire et condition suffisante (ces doutes seront confirmées dans la suite de l'expérimentation). Ce qui est certain, c'est que la formulation de la question « *Pourriez vous en faire autant avec 10 allumettes ?* » permet d'inscrire leur réponse du côté du challenge, « *Oui, je peux le faire !* », plutôt que du côté d'une argumentation mathématique. Enfin, jamais la symétrie n'est évoquée par les PLC2 ce qui questionne la légitimité d'un tel exercice dans cette partie du manuel, avec des injonctions mettant en avant l'importance de la symétrie.

III Pour aller plus loin

Il est possible de généraliser le problème initial de la façon suivante, pour lequel la symétrie ne peut alors plus être invoquée :

On considère la figure ci-dessous constituée d'un polymino carré de coté 2^n auquel on enlève une case. Est-il possible de paver les cases restantes par des polyminos de cette forme:  ?

2^n



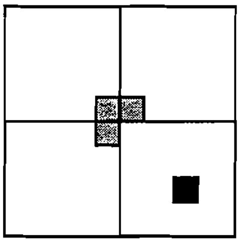
Outre le fait que ce nouveau problème permet de montrer que 2^{2n}-1 est divisible par 3, il peut être l'occasion de travailler sur la récurrence. En effet, cet énoncé permet d'illustrer et de faire le lien entre deux approches de la récurrence.

Solution 1. Démonstration par récurrence « ascendante »

On peut démontrer l'existence du pavage de manière tout à fait classique, en respectant la chronologie-algorithme que l'on retrouve présentée dans tous les manuels:

- On vérifie la propriété pour n=1, cela ne pose pas de problème: .
- Il faut alors montrer que, si la propriété est vrai au rang n, elle l'est encore au rang n+1.

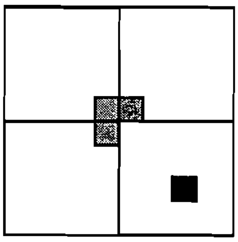
Considérons un carré de côté 2^{n+1} auquel on a enlevé une case. On peut le scinder en quatre carrés égaux dont l'un sera privé d'une case. Alors, en plaçant un trimino comme indiqué sur la figure, on obtient 4 carrés de côté 2^n privés d'une case, qui sont pavable par hypothèse de récurrence. Le carré de côté 2n+1, union de carrés pavables est pavable.
- On conclut par récurrence.



Mais il est possible d'utiliser la récurrence sous une autre forme, en utilisant un raisonnement par contre-exemple minimal. Ce qui aboutit à la solution suivante.

Solution 2. Démonstration par contre-exemple minimal

On considère le plus petit n tel qu'il soit impossible de paver. S'il existe, on le partage de la manière suivante :



Chacun des quatre carrés égaux est pavable par hypothèse de récurrence (autrement, il existerait un carré plus petit non pavable). C'est donc que le carré de côté 2n est pavable, d'où la contradiction. On peut utiliser ce raisonnement tant que le carré est scindable, c'est-à-dire tant que n est strictement positif, si n est nul, on se retrouve avec une seule case, qui puisqu'il faut enlever une case, est pavable.

Les avantages du contre-exemple minimal sont multiples. Tout d'abord, c'est un moyen d'éviter l'emploi de la méthode classique (cf. solution 1), pour laquelle on constate une très forte algorithmisation, et donc une perte de sens.

Des expérimentations on montré que, par exemple, les élèves et étudiants sont destabilisés si le pas de récurrence n'est pas égal à 1 ou s'il faut effectuer une récurrence « descendante ». On constate également qu'ils exercent peu de contrôle sur les conditions initiales à vérifier, les fondements de la récurrence. Faut-il le vérifier pour n=1 ? Pour n=1 et n=2 ?

Le contre-exemple minimal est une méthode qui permet de généraliser les techniques de démonstration par récurrence, en particulier:

- Cela peut permettre de sortir du schéma classique où la propriété à démontrer est indicée par le paramètre de récurrence qui est donné.

- La question du fondement de la récurrence ne se pose plus, soit ils ne sont pas nécessaire, soit ils sont donnés par le déroulement de la preuve.

- Enfin, le problème du « pas de récurrence » est résolu, puisqu'ici, il suffit d'obtenir un objet « plus petit ».

Regarder la récurrence sous cet angle, si cela nécessite un raisonnement par l'absurde, permet d'élargir le champ d'utilisation de la récurrence. En effet, s'il est possible de ramener toutes les démonstrations par récurrence « ascendante » sous forme de contre-exemple minimal, l'inverse n'est pas toujours possible.

Les techniques de décomposition-recomposition, le contre-exemple minimal occupent une place centrale en mathématiques discrètes, de par la nature même des objets de ce domaine mathématique. Ce qui conforte notre hypothèse, à savoir que les mathématiques discrètes peuvent être un bon lieu pour l'apprentissage de connaissances protomathématiques (en l'occurrence l'induction).

Conclusion

Les mathématiques discrètes restent un champ peu connu des mathématiques. Il est vrai qu'elles apparaissent officiellement dans le cursus scolaire, uniquement sous leur forme « analyse combinatoire » qui ne représente qu'une petite partie d'un champ riche et varié.

Il est toutefois intéressant de noter que, malgré cette absence, il est possible de repérer des problèmes discrets au sein des manuels. L'exemple que nous avons regardé illustre le fait que ces problèmes de mathématiques discrètes ne sont utilisés qu'à des fins « publicitaires », parce qu'ils sont différents et que leur présentation, contextualisée, permet d'envisager de nouvelles sources de motivation chez les élèves comme chez les enseignants. Ce faisant, on risque de nier leur intérêt mathématique. Ainsi, pour reprendre la question présente dans le titre, si les mathématiques discrètes font une incursion dans la classe de mathématiques, c'est vraiment par la toute petite porte. Ce constat est d'autant plus dommageable que, et c'est l'objectif de notre thèse (en cours) de le montrer, l'utilisation des mathématiques discrètes peut favoriser l'apprentissage de connaissances protomathématiques, notamment en ce qui concerne la récurrence et le contre-exemple minimal, la modélisation, ainsi que la distinction entre condition nécessaire et condition suffisante.

Références bibliographiques

BALMAND L. (1998) *Un objet combinatoire: Le Graphe. Analyse écologique et rapport d'enseignants*, Mémoire de DEA de Didactique des Mathématiques, IMAG, Université de Grenoble.

BERGE C. (1968) *Principes de combinatoire*. Paris: Dunod.

BESSOT A., LE THI HOAI A. (1993) *Une étude du contrat didactique à propos de la racine carrée*, petit x n°36. Grenoble: IREM.

BOUVIER, GEORGE, LE LIONNAIS (1979) *Dictionnaire des mathématiques*.

BROUSSEAU G. (1987) *Fondements et méthodes de la didactique des mathématiques*, Recherches en Didactique des Mathématiques 7.2. Grenoble: La Pensée Sauvage.

CHEVALLARD Y. (1996-1998) *Dictionnaire des mathématiques*, à paraître.

CHEVALLARD Y. (1991) *La transposition didactique, du savoir savant au savoir enseigné*, seconde édition, Grenoble: La Pensée Sauvage.

DIEUDONNE J. (1977) *Panorama des mathématiques pures le choix bourbachique*, Collection "discours de la méthode", Paris: Gauthier-Villars.

DURAND-GUERRIER V. (1996) *Logique et raisonnement mathématique. Défense et illustration de la pertinence du calcul des prédicats pour une approche didactique des difficultés liées à l'implication*. Thèse. Lyon: Université Claude Bernard.

EL FAQIH E.M. (1991) *Place de la logique dans l'activité mathématique des étudiants du premier cycle scientifique*. Thèse. Strasbourg.

GRENIER D. et PAYAN C. (1998) *Spécificités de la preuve et de la modélisation en mathématiques discrètes*, Recherches en Didactique des Mathématiques 18.1. Grenoble: La Pensée Sauvage.

HENRY M. (1997) Notion de modèle et modélisation dans l'enseignement, in *Enseigner les probabilités au lycée. Ouvertures statistiques, enjeux épistémologiques, questions didactiques et idées d'activités*, Reims: IREM.

RADFORD L. (1985) *Interprétations d'énoncés implicatifs et traitement logiques; Contribution à la faisabilité d'un enseignement de logique au lycée*. Thèse: Strasbourg.

ROBERT A., ROBINET J. (1989) *Enoncés d'exercices de manuels de seconde et représentations des auteurs de manuels*. Cahier de DIDIREM. Paris: Université Paris VII.

ROLLAND J. (1995) *Le rôle ambigu des problèmes de combinatoire dans les manuels de troisième*, Mémoire de DEA de Didactique des Mathématiques, IMAG, Université de Grenoble.

Manuel

LE GOFF A., PENNINCKX J., JULLIEN V., BRAS A. (1989) Mathématiques 3^{eme}, Paris: Magnard.

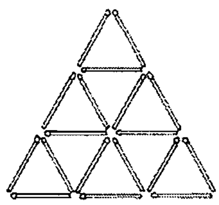
ANNEXE 1

Maths Magazine

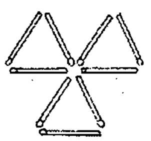
CASSE-TÊTES

■ Nous vous proposons quelques « casse-têtes » réalisés à partir d'allumettes. Nous avons choisi des cas où les symétries jouent un rôle important, soit dans la figure de départ, soit dans la solution.

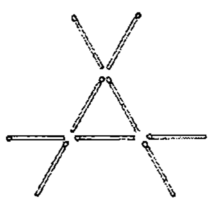
Jeu n° 1
a) Ôtez cinq allumettes pour obtenir cinq triangles identiques ;
b) déplacez six allumettes pour former six losanges composant une forme étoilée symétrique.



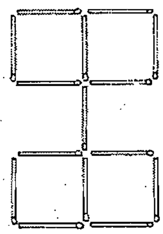
Jeu n° 2
Neuf allumettes pour ce dessin évocateur. Voyez donc si, en en déplaçant trois, vous n'en feriez pas, selon la même symétrie, un bouquet de trois losanges.



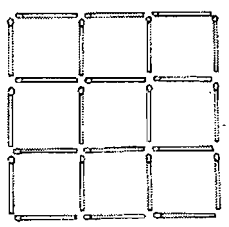
Jeu n° 3
Le dessin ci-dessous se compose de neuf allumettes. Déplacez-en quatre pour former cinq triangles (non nécessairement identiques, et l'un pouvant être un élément de l'autre).



Jeu n° 4
Prenez quinze allumettes et exécutez cette figure. Déplacez alors deux allumettes pour former un ensemble de cinq carrés identiques.

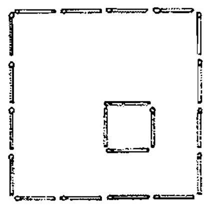


Jeu n° 5
Dans la figure ci-dessous, vingt-quatre allumettes composent neuf carrés égaux (encore qu'on puisse y voir quatorze carrés de tailles différentes). Certains de ces problèmes ne peuvent être résolus qu'en croisant les allumettes. A l'aide des vingt-quatre allumettes, faites : a) trois carrés ; b) quatre carrés ; c) cinq carrés ; d) six carrés ; e) sept carrés ; f) neuf carrés ; g) vingt carrés ; h) quarante-deux carrés ; i) cent dix carrés.

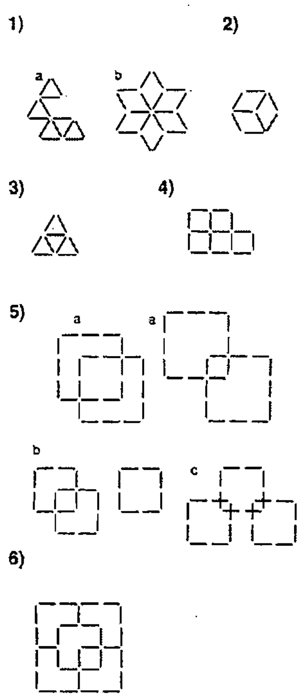


Jeu n° 6
Le grand carré est le plan, sans fioritures, du domaine d'une grande famille d'Angleterre. Le duc désire habiter toujours son château, figuré par le petit carré. Mais, poussé tant par l'affectueuse sollicitude des siens que par la cherté des impôts locaux, il divise ses terres entre ses cinq nièces. Pour éviter toute polémique, il les divise en cinq parcelles égales par la forme et la taille. Pourriez-vous en faire autant avec dix allumettes ?

(D'après *Mille casse-tête du monde entier*, Ed. Chêne)



Solutions :



ANNEXE 2

Les différents intervenants sont représentés par leur initial, C, G, J pour les observateurs, M, D, H pour les PLC2 (Marie, Daniel et Hervé)

Heure	Texte	Commentaires
13h04	**C**: Nous voudrions avoir votre avis sur des problèmes issus de manuels français ou étrangers. [...] Dans une première étape, il faut résoudre. Le but n'est pas de réussir mais de se confronter avec eux. Il n'y a pas d'ordre, vous pouvez faire ce que vous voulez avec ça, quoi. Éventuellement on souhaiterait aussi, si vous pouvez rédiger éventuellement quelque chose, enfin... suivant, pas forcément pour tout, mais enfin, s'il y a des traces écrites à la fin un peu mieux structurées. Bon, qu'on les ait, ça nous intéresse aussi. [...]	
13h07	**J**: Vous pouvez prendre ce que vous voulez, vous avez des feuilles, des grandes feuilles, des feuilles quadrillées, des stylos...	
13h09	**M**: On commence par les lire ? Vous avez un exercice de prédilection tout de suite ou on commence par le premier ?	Accord tacite du groupe
	D: Le premier il est ...pfouh! Il y a beaucoup à lire.	
	M: Le premier je vois même pas...	Lecture silencieuse de l'énoncé.
	D: Il y a combien d'allumettes ?	
	M: Ben moi j'en ai compté 20. T'as 16 autour.	
	D: Ca veut dire qu'on peut faire 5 parcelles égales avec 20 allumettes. Non ? C'est ce que veut dire l'énoncé ?	**M** essaie avec une « ligne » de 3 : échec. Tous maintenant tâtonnent sur leur feuille.
	M: Oui c'est la forme et la taille en plus.	
	D: La forme et la taille ah ouais...	
	M: J'ai fait comme toi, ça marche pas.	**M** regardant **D**.
	H: C'est sûr, ça marche pas mais ça permet déjà de voir pourquoi ça marche pas, peut être, je sais pas, moi j'ai déjà essayé de faire sans trop de contraintes.	
	M: Mais là il n'y en a pas 10 d'allumettes, il y en a 16.	
	H: Oui, mais il faut compléter la figure avec 10 allumettes seulement. C'est ça que j'ai compris hein ?	
	M: Ah d'accord, donc en 10 allumettes il faut faire cinq parcelles. D'accord, ben j'avais pas du tout compris.	
13h12	**H**: De toute façon vu la forme il va falloir certainement faire quelque chose comme ça.	Montrant la « bonne » forme.

M: Ouais, moi je pense aussi.
D: Pourquoi il faut 10 allumettes, je comprends pas.
M: 1, 2, 3, 4, 5, 6... oui mais le problème c'est que ...

Compte le nombre d'allumettes pour obtenir la « bonne » forme.

H: ah oui ça fait 2, 3, 4 non ça fait plus que ça, non ça va plus. 1,2,3,4, 5,6,7 non ça marche pas non plus ça. Ah oui mais attention, il y a les bords extérieurs qui existent déjà.

idem

M: ouais.
H: Donc il va pas y en avoir autant, pas avoir besoin d'autant d'allumettes pour chaque...
D: Ah ouais ouais. Il y en a qui vont servir deux fois.
D: Qu'est ce qu'il faut faire exactement là ?
M: il faut partager en 5 parcelles...
H: Il faut placer les allumettes de façon à ce qu'elles partagent en 5 ...
M: Voilà.

M et **H** prennent une feuille quadrillée et tâtonnent en utilisant un stylo de couleur.

D: J'ai toujours pas pigé.
M: Il faut partager en 5 parties égales et de même forme, de même taille, tout l'intérieur, enfin l'intérieur du carré sauf le petit, le château là, avec 10 allumettes.
D: Ah oui d'accord.
M: Enfin, je pense que c'est ça.
D: Pourquoi il y a « Pourriez vous en faire autant ? » ?
H: Ca veut dire « Est-ce qu'on est capable de le faire » quoi, ça veut dire ça. C'est vrai que c'est formulé hein...
M: Ouais, c'est un peu bizarre.
13h15 **H**: La formulation est tordue. Déjà « Le grand carré est le plan, sans fioritures, du domaine... » C'est pas clair.

Silence, chacun essaie dans son coin.

H: Alors, non seulement la taille et la forme ... mais de toute façon, compte tenu de la surface qu'il y a, elles peuvent avoir que trois centimètres, enfin que trois unités hein ... chacune. Donc de toute façon il va falloir savoir comment il faut combiner ces trois unités pour qu'elles aient même forme et qu'on puisse les placer là dedans.
M: Elles peuvent pas être droites.
D: Ah oui tu as raison.

H: Comment il faut les répartir quoi c'est ça. De toute façon, il n'y a pas 36 façons de les répartir, ou elles sont alignées...

M: Elles peuvent pas être alignées. Parce que pour...

Montre son dessin, tous les cas ne sont pas étudiés.

H: Elles peuvent être que comme ça alors.

Dessinant le « L ».

M: Ouais, mais je ne sais pas comment comme ça.

H: Donc après, c'est pratiquement ... ça devrait être fini après.

M: Non, moi j'arrive pas à les placer, j'ai toujours un carreau.

H: C'est même pas la peine de chercher. Si ça ça marche pas c'est que c'est impossible.

D: Oui d'accord.

M: Ben c'est pas possible... parce qu'à chaque fois il y aura...

H: Non mais là par exemple pour celle-là tu n'en mets que 2, j'ai à mettre que deux allumettes.

Plaçant les deux allumettes qui constituent le trimino de l'angle inférieur droit.

M: Oui mais moi je ne pensais même pas aux 10 allumettes, je pensais à la forme, il y a bien un moment où ça va bloquer parce qu'après quand tu veux faire forcément comme ça 1, 2, 3

H: Oui.

M: Celui-là 1, 2, 3 ah si ça va marcher.

13h16 **H**: Si ça marche.

M: Si mais ça va faire combien d'allumettes ?

H: Sinon c'est impossible le problème, c'est même plus la peine d'aller plus loin. Donc ça m'en fait 1, 2, 3, donc ça m'en fait 5 pour l'instant, 6, 7, 8, 9, 10 ça marche !

M: Ouais. Je vais voir si j'en ai 10 aussi, comme ça...Ouais O.K.

H: En fait là dedans la démarche, c'était quand même, moi je vois que ça m'a aidé ça, cette démarche de dire: Bon il reste que 15 unités, il faut que j'en mette 5 de surfaces égales. Tu vois, même en ne tenant pas compte de la forme, ça guide quand même sur la méthode, hein ?

M: ça restreint les cas.

H: ça restreint énormément les cas.

D: Il y a 2 façons je crois de... Non mais ça doit être la même.

H: On ne demande pas « Est-ce qu'il y a plusieurs façons ? »

M: Ouais on ne demande « Est-ce qu'on peut en faire autant ? »

D: Ouais il y en a une autre, c'est comme ça.

D n'a pas de feuille quadrillée, son dessin est imprécis et ... faux (5 cases sur 1 colonne).

H: Ouais ouais ça doit être possible. Ah oui mais ils ont plus la même forme après.

M: Ils ont plus la même forme.
D: Si!
H: Ah oui oui parce que tu as 4 oui oui.
M: Ah oui d'accord.

Le dessin de D n'est, en fait pas très lisible...

D: Enfin, il y en a peut être d'autres façons, je sais pas...