GÉOMÉTRIE DANS L'ESPACE
LE POINT SUR LA LECTURE DES DESSINS PAR DES ÉLÈVES EN FIN DU COLLÈGE

Hamid CHAACHOUA
Équipe EIAH, Laboratoire Leibniz, Grenoble

Dès le début du collège, les élèves sont invités à représenter des solides usuels en perspective cavalière. Le travail sur la représentation et la fabrication de ces solides permettent de mettre en place des notions géométriques comme le parallélisme et l'orthogonalité. Ce travail se poursuit au lycée où l'étude des objets géométriques peut faire appel au dessin, et/ou faire appel à l'utilisation de maquettes. Notons que même lorsqu'on travaille au niveau des objets théoriques, l'étude de ces derniers se fait à l'aide de figures :

> « En géométrie plane comme en géométrie dans l'espace, tout point de vue axiomatique est exclu. La pratique des figures doit tenir une place centrale, car elle joue un rôle décisif pour la maîtrise des notions mathématiques mises en jeu. »
> (Encart n°1 : 1990, classe de seconde, p. 15)

Le rôle central des dessins mentionné par les programmes nous conduit à nous intéresser aux rôles du dessin dans l'enseignement de la géométrie dans l'espace.

Nous présenterons dans un premier temps la problématique du dessin et celle de la représentation des objets de l'espace. Ensuite, les résultats d'un test sur la lecture du dessin proposé par B. Parzysz (1989). A partir de ces résultats nous dégagerons des hypothèses sur les interprétations possibles que peuvent faire les élèves lors de la lecture d'un dessin et nous formulerons des conjectures sur d'autres règles d'interprétation. Enfin, nous proposerons un dispositif expérimental pour valider ces conjectures.

Nous avons choisis de travailler avec des élèves ayant terminé l'enseignement du collège, d'où notre choix de la classe de Seconde pour le dispositif expérimental.

1. Problématique du dessin

Représenter un objet géométrique par un dessin se traduit souvent par une perte d'informations puisque plusieurs propriétés de l'objet géométrique ne peuvent pas être traduites par des relations spatiales sur une feuille de papier, à moins de faire appel à des codes et à des conventions de représentations comme par exemple pour la perpendicularité de deux plans.

De même, les propriétés spatiales du dessin ne peuvent pas toujours renvoyer à des propriétés géométriques retenues pour le problème. Par exemple la position du dessin sur une feuille de papier n'est pas pertinente pour le problème géométrique. Certaines propriétés spatiales, qui renvoient à des propriétés géométriques peuvent aussi être non pertinentes parce que le dessin n'est qu'une instanciation matérielle d'un objet géométrique. Ainsi il se peut que dans le cas d'un dessin donné il y ait égalité de deux côtés alors que cette relation ne fait pas partie des données du problème à résoudre. Le dessin fournit alors un "cas particulier du problème".

C'est dans ce sens que nous empruntons à Laborde (1992) la notion de modèle pour notre cadre théorique.

> « Une modélisation met en jeu une certaine abstraction du domaine de réalité concerné en ne retenant de ce dernier qu'un certain ensemble d'objets et de relations qui sont représentés dans le modèle. Le modèle ne rend compte que d'une partie du domaine de réalité... A chaque modèle est donc attaché un *domaine de fonctionnement* dans le domaine de réalité dépendant des objets et relations retenus par la modélisation. [...]
> Un modèle fournit aussi une représentation du système d'objets et de relations retenus pour la modélisation ou encore, pour prendre une image plus parlante, une incarnation de ce système dans un support d'expression...Mais toute interprétation issue du support ne donne pas une information nécessairement valide sur le domaine de réalité. On peut ainsi délimiter un *domaine d'interprétation* à l'intérieur du support du modèle. » (Laborde, 1992, p. 3)

Dans cette perspective, le dessin peut être considéré comme modèle d'un objet géométrique. En fait, dans l'enseignement de la géométrie dans l'espace, le dessin peut être considéré comme un modèle d'un domaine de réalité. On peut distinguer deux grandes catégories de domaines de réalités : ceux de nature théorique et ceux du monde sensible. Dans notre article, nous nous limitons au cas où le dessin est modèle d'un objet géométrique de l'espace. A ce modèle on peut attacher un domaine de fonctionnement (ensemble des propriétés géométriques représentées par certaines propriétés spatiales du dessin) et un domaine d'interprétation (ensemble des propriétés spatiales du dessin ne pouvant pas être interprétées comme renvoyant à des propriétés de l'objet).

La représentation des objets géométriques de l'espace, de dimension 3, par des dessins sur une feuille de papier, de dimension deux, se fait par une ou plusieurs projections. De ce fait, dans le cas d'une seule projection, il y a forcément perte d'informations. D'où la nécessité de faire appel à des codes pour la lecture et l'écriture de ces représentations, comme le souligne Bkouche (1983, p.16)

« Une situation spatiale apparaît ainsi à travers une représentation qui la transforme en figure plane, ceci nécessite l'explicitation d'un code, code d'écriture et code de lecture... Dans ces conditions, l'appréhension de la situation spatiale à travers la médiation de la représentation plane ne s'appuie plus sur l'évidence comme c'est le cas en géométrie plane, on ne peut plus raisonner sur une figure qui est déjà distincte de la *réalité* qu'elle est censée représenter, ceci nécessite donc la mise au point de méthodes de raisonnement plus complexes...»

Ainsi, la problématique du dessin en géométrie dans l'espace, dans l'enseignement, se trouve liée au choix du mode de représentation des objets de l'espace. Si on se place dans la problématique de l'enseignement secondaire de la géométrie dans l'espace en France, le mode de représentation choisi est la perspective parallèle, et plus particulièrement la perspective cavalière.

Parzysz (1991, p. 219) avance l'hypothèse que la raison du choix de la perspective parallèle tient probablement à un souci d'équilibre entre le voir et le savoir.

« La raison de ce choix pour les dessins de géométrie, outre la facilité d'exécution, doit être cherchée dans le fait que la perspective parallèle réalise un compromis acceptable entre le voir et le savoir (transfert de propriétés). »

En effet, parmi les différentes représentations planes d'objets de l'espace, la perspective parallèle est celle qui permet le "plus" de conserver des propriétés (parallélisme, milieux, rapports des mesures de segments parallèles) tout en offrant de l'objet une image "voisine" de celle qu'il présente à la vue.

Dans cette mise en relations entre un objet géométrique de l'espace et un dessin le représentant, un autre objet intervient : objet géométrique plan, projection sur un plan de l'objet géométrique de l'espace. A ce propos, (Bessot, al., 1993, p.123) présentent un schéma des mises en relations établies par une modélisation géométriques des objets physiques.

« Cette démarche suppose une modélisation géométrique des objets matériels et des relations entre ces objets. Nous donnons brièvement des éléments de cette modélisation.
Un objet matériel peut être associé, dans une géométrie à trois dimensions, à une figure spatiale ou à des figures planes. Dans le modèle géométrique, figure spatiale (objet géométrique composé d'arêtes rectilignes, de faces planes polygonales, de surfaces cylindriques ou sphériques) et figures planes se correspondent par projections orthogonales, à une similitude près. Le dessin (vue ou système de vues) est un tracé matériel de cette ou ces figures: en opposition avec les dessins intervenant dans la géométrie élémentaire, *ce dessin est une épure au sens où les mesures jouent un rôle central* (pour la distinction dessin-figure voir Parzysz, 1988). De ce point de vue, la notion de projection orthogonale modélise les relations entre objet matériel et dessin (vue ou système de vues). Le schéma 1, ci-après, montre la complexité des mises en relation établies par cette modélisation.

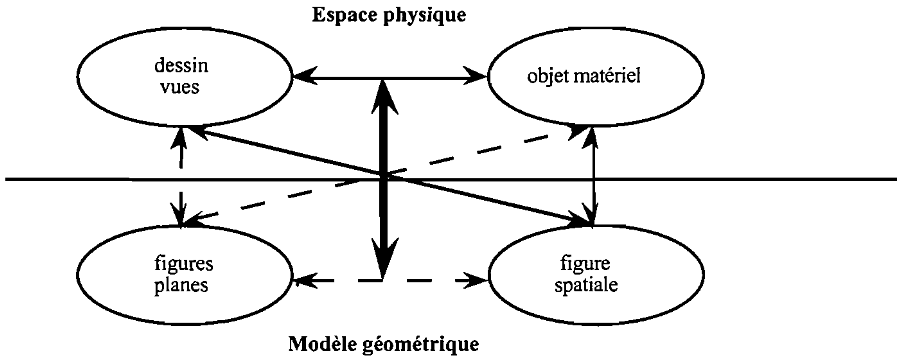


Schéma 1. Relations entre objet matériel, dessin et modèle géométrique »

Ce travail porte essentiellement sur la lecture des graphismes techniques où le dessin est un système de vue et les objets géométriques sont des solides géométriques. Cependant, ce schéma reste valable au delà du contexte dans lequel il a été produit. Nous considérons donc le schéma suivant :

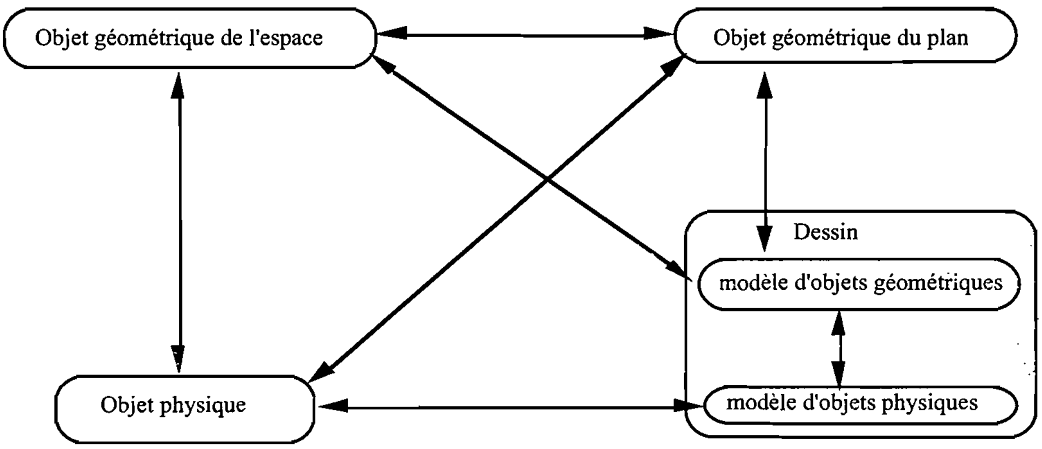


Schéma 2. Relations entre objet physique, dessin et objets géométriques

Selon la problématique étudiée, on peut considérer un ou plusieurs sous-schémas du Schéma 2. Pour notre cas d'étude, nous nous intéressons aux passages entre un objet géométrique de l'espace et un dessin représentation de cet objet en perspective cavalière.

À un objet géométrique de l'espace, on associe un objet géométrique du plan par une projection sur un plan. À ce dernier, on associe un dessin comme représentation matérielle. Pour la suite nous considérons le schéma suivant :

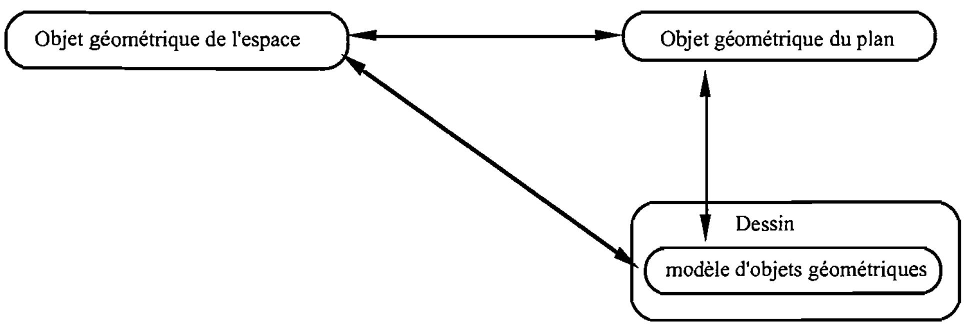


Schéma 3. Relations entre dessin et objets géométriques

1.1. Passage de l'objet géométrique au dessin

Le passage d'un objet géométrique de l'espace à un dessin qui le représente se fait à l'aide d'une traduction de certaines propriétés géométriques de l'objet en des relations spatiales sur le dessin. En fait ces relations spatiales sont des traductions des propriétés géométriques de l'objet plan, projeté de l'objet de l'espace. Ces propriétés constituent le domaine de fonctionnement du dessin.

Propriétés géométriques de la figure de l'espace

↓ projection

Propriétés géométriques de la figure plane

↓

Propriétés spatiales du dessin

Examinons d'abord les propriétés géométriques, qui sont conservées par la perspective parallèle. Il s'agit de la conservation du parallélisme, de l'alignement, des barycentres et des rapports de longueurs.

Propriétés géométriques de la figure de l'espace	**Propriétés géométriques de la figure plane**	**Propriétés spatiales du dessin**
Droites parallèles	Droites parallèles	Segments parallèles
Droites sécantes	Droites sécantes	Segments sécants
Points alignés	Points alignés	Points alignés
Barycentre	Barycentre	Barycentre
Rapports des longueurs	Rapports des longueurs	Rapports de longueurs

Ainsi, si on se limite aux règles de la perspective parallèle, le domaine de fonctionnement du dessin est très réduit.

En plus de ces règles, des conventions et des représentations-types sont utilisées dans l'enseignement permettant ainsi d'élargir le domaine de fonctionnement du dessin. C'est ce que nous proposons d'examiner dans le prochain paragraphe.

1.1.1. Conventions et représentations-types

Dans l'enseignement on fait appel d'une part à des conventions[1], d'autre part à des représentations-types que nous définissons par :

Une représentation-type est un dessin dont l'objet est d'illustrer une ou des relations

1 Pour plus de détails, voir Parzysz, 1989, où il présente une analyse détaillée sur les conventions utilisées dans les manuels au cours de ce siècle.

géométriques entre les objets géométriques de l'espace. Elle n'a pas fait objet d'une convention. Cependant, elle fait partie d'une tradition d'enseignement.

Nous distinguons une représentation-type d'une représentation-prototype. La deuxième renvoie aux dessins typiques au sens de Cordier (1991, p. 47)

> « La typicalité est une propriété des éléments d'une catégorie qui correspond à l'idée que certains éléments (sous-catégories, exemplaires) constituent des meilleurs exemples que d'autres de leur catégorie. »

ou encore au sens de dessins prototypiques au sens de Noirfalise (1991)

> « nous avons tenté d'illustrer l'existence de formes organisées, désignées en l'occurrence par le terme de formes prototypes. Mobilisées rapidement lors de la lecture ou de l'écoute de la consigne, ces formes servent de patrons de comparaison et orientent la saisie des indices. »

Un exemple de dessin prototypique est donné par Laborde et Capponi (1994) : un parallélogramme prototypique a sa diagonale perpendiculaire à un côté du parallélogramme.
Ainsi, une représentation-type peut être une représentation prototypique.

L'objet de ce paragraphe est de donner les conventions et les représentations-types qui sont principalement utilisées dans l'enseignement actuel afin d'étudier dans quelle mesure elles permettent d'élargir le domaine de fonctionnement d'un dessin. Cette étude a été faite à partir des manuels les plus utilisés dans l'enseignement actuel[2].

1.1.2. Conventions et représentations-types utilisées dans les manuels

• Représentation d'un plan

Convention P : on représente un plan P par un parallélogramme.

• Représentation d'objets cachés

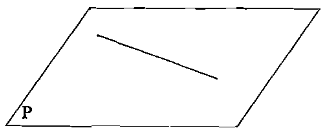
Convention OC : On représente les parties cachées ou non visibles par des pointillés.

• Représentations-types relevées dans les manuels

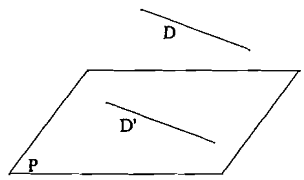
2 Il s'agit de : Dimathème seconde, 1990. Terracher Seconde, 1994. Transmath Seconde 1995.

a - Positions relatives d'une droite et d'un plan

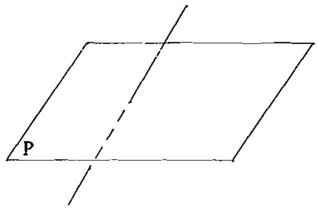
Représentation-type DP : on représente une droite incluse dans un plan, par un segment à l'intérieur du parallélogramme.

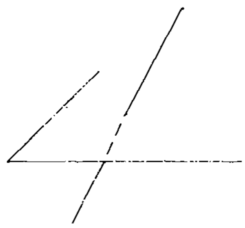


Représentation-type DPp : on représente une droite D parallèle à un plan P par : un segment, représentant une droite D' de P, à l'intérieur du parallélogramme, et un segment représentant D comme une droite parallèle à D', à l'extérieur du parallélogramme.



Représentation-type DPs : pour représenter une droite sécante avec un plan, on rend visible le point d'intersection à l'intérieur du parallélogramme. Pour cela on représente par des pointillés une partie de la droite qui est supposée être cachée

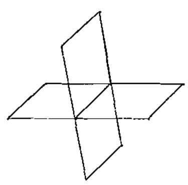




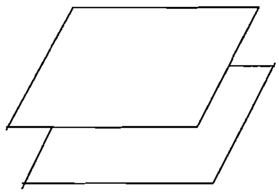
Une contrainte de cette convention est que le point d'intersection doit être à l'intérieur du parallélogramme ou à l'intérieur d'une région délimitée par un parallélogramme incomplet Pour ce dernier cas, le point est souvent à l'intérieur du triangle défini par les deux côtés qui délimitent le plan.

b - Positions relatives de deux plans

Représentation-type PPs : pour représenter deux plans sécants, on rend visible leur droite d'intersection à l'intérieur du parallélogramme.
De plus, il y a parallélisme de certains "bords" avec la droite d'intersection.



Représentation-type PPp : deux plans parallèles sont représentés par deux parallélogrammes dont les côtés sont parallèles deux à deux.



1.1.3. Règles, conventions et représentations-types explicitées dans les manuels

Les représentations-types sont utilisées par tous les manuels pour illustrer les propriétés du cours de façon implicite. Ils permettent de traduire des propriétés géométriques.

Terracher Seconde, 1990

Aucune convention n'est explicitée. Seules quelques règles de représentation en perspective cavalière sont illustrées avec un pavé droit.

Dimathème Seconde, 1990

Un paragraphe au début du chapitre[3], intitulé "conventions de représentation", présente ce que les auteurs désignent comme étant des "conventions" utilisées dans la représentation d'une figure de l'espace. Elles sont illustrées par la représentation d'un cube et d'un dessin représentant une droite sécante avec un plan. Ces conventions[4] sont :

- Représentation d'un cube ...
- Un plan est représenté par une portion de ce plan, en général un rectangle, dont la vue en perspective est un parallélogramme ...
- Deux droites parallèles sont représentées par deux droites parallèles ...
- Les segments cachés sont représentés en pointillés.
- Le milieu d'un segment est représenté par le milieu du segment dessiné.

Ces conventions sont celles de la perspective cavalière. (Dimathème, 1990, p 353)

Transmath Seconde, 1990

Deux conventions sont explicitées :

Première convention : les arêtes visibles sont dessinées en traits pleins; les autres sont dessinées en pointillés.

Seconde convention : deux droites parallèles sont représentées par deux droites parallèles. (Transmath, 1995, p198)

Aucune autre règle ou convention n'est présentée.

L'analyse de ces manuels montre une confusion entre conventions et règles de la perspective cavalière. De plus, seulement quelques règles ou conventions sont explicitées. Selon le manuel, les conventions ou règles explicitées varient. Cependant, tous les manuels font usage des conventions et représentations-types. Ces dernières permettent

3 Chapitre "Droites et plans de l'espace" p. 353.
4 pour les auteurs.

d'illustrer les propriétés d'incidence dans l'espace et plus précisément d'élargir le domaine de fonctionnement du dessin en tant que modèle d'un objet géométrique de l'espace.

1.2. Passage du dessin à l'objet géométrique

Nous nous intéressons aux propriétés ou aux relations géométriques qui peuvent être induites à partir de la lecture d'un dessin représentant un objet géométrique en perspective cavalière. Nous savons, que le dessin seul ne peut rendre compte de la situation. Néanmoins, si on utilise le dessin, comme terrain d'expérimentation, lors de la résolution d'un problème, alors le problème de l'interprétation des propriétés spatiales comme étant des propriétés géométriques se pose.

Or, le domaine d'interprétation d'un dessin, en géométrie dans l'espace, est très réduit et fonctionne selon une logique différente de celle utilisée pour interpréter un dessin de la géométrie plane. En effet, en tenant compte des règles de la perspective, nous retenons :

- Si deux segments, représentations de deux droites, sont sécants, alors les droites ne sont pas parallèles.
- Si trois points, représentants trois points A, B et C de l'espace, ne sont pas alignés sur le dessin , alors les points A, B et C ne sont pas alignés.
- Si un point A', représentant un point A, n'est pas barycentre d'un système de points (Ai',ai), représentants des points (Ai,ai) de l'espace, alors A n'est pas barycentre du système (Ai,ai). Par exemple si un point est à l'extérieur d'un triangle représentant une face d'un solide, on peut déduire qu'il n'appartient pas à cette face.

1.3. Conclusion

Nous avons montré l'intérêt des conventions et représentations-types utilisées dans l'enseignement. Elles permettent d'élargir le domaine de fonctionnement du dessin. Mais leur emploi n'est pas neutre. En effet, nous faisons l'hypothèse qu'il peut avoir des conséquences sur les conceptions des élèves, ces derniers pouvant développer des interprétations illicites. Nous proposons dans la deuxième partie un dispositif expérimental pour mettre à l'épreuve l'hypothèse de recherche ci-dessous :

Les conventions de représentation de la perspective cavalière deviennent des règles d'interprétation d'un dessin chez les élèves.

2. Dispositif expérimental

Les interprétations que nous cherchons à mettre en évidence trouvent leur origine dans les conventions et représentations-types utilisées dans l'enseignement.

Notre première hypothèse est que les conventions de représentations de relations d'incidence qui ont été explicitées dans les manuels ou par les enseignants, seront utilisées dans la lecture du dessin.

Nous nous intéressons donc plus particulièrement aux interprétations sous-jacentes à la lecture d'un dessin qui sont des conséquences des dessins prototypiques utilisés de façon implicite dans l'enseignement.

2.1. Test proposé par B. Parzysz

A propos de la "lecture" de dessins dans l'espace Parzysz (1989), dans sa thèse[5], rend compte d'un test construit pour savoir « comment les élèves du lycée interprètent - en ce qui concerne les positions relatives de leurs différents constituants - quelques dessins classiques relatifs à des situations courantes de la géométrie de l'espace, faisant intervenir des plans, des droites et des points. » (Parzysz, 1989, p. 263).

Cinq situations[6] ont été proposées à des élèves de seconde et première. Pour chacune de ces situations, un dessin, accompagné d'un texte décrivant les objets représentés mais non les relations des objets entre eux, est proposé. L'élève doit indiquer ses réponses dans un tableau[7]. Il doit choisir une proposition parmi celles qui lui sont proposées. Ces propositions portent sur les positions relatives des objets ou des relations d'incidence. Dans chaque situation, l'élève peut en outre choisir "Le dessin ne permet pas de répondre" ou "Je ne sais pas".

2.1.2. Résultats du test

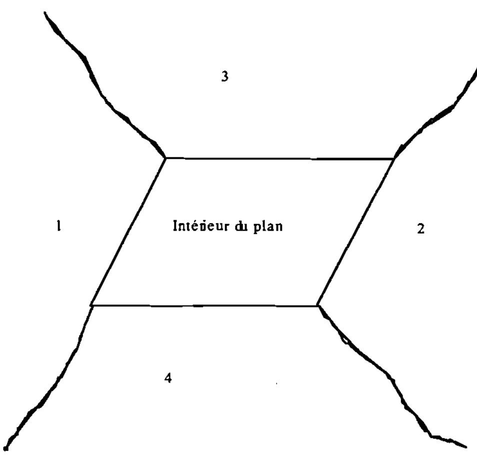
a - Régionnement de l'espace

La première situation a mis en évidence deux règles d'interprétation relatives à un régionnement défini par le parallélogramme représentant un plan : "int-plan" et "ext-plan".

Interprétation "int-plan"
Soit un parallélogramme représentant un plan.
Un point représenté à l'intérieur du parallélogramme, représentant un plan, est interprété comme un point appartenant à ce plan.

Interprétation "ext-plan"
Soit un parallélogramme représentant un plan.
Un point représenté à l'extérieur du parallélogramme, représentant un plan, est interprété comme un point n'appartenant pas à ce plan.

5 Parzysz B. 1989, Chapitre 10 de la thèse, "Lecture" de situations "classiques", pp 263-286.
6 cf. Annexes
7 ibid



De plus, les élèves font plus facilement le "prolongement mental" dans le sens horizontal que dans le sens vertical.

Ainsi, les régions 1 et 2 peuvent être considérées comme faisant partie du plan plus que les régions 3 et 4. Cependant, on peut se demander pour ces dernières s'il n'y a pas un régionnement spécifique que nous formulons sous forme de conjecture :

Conjecture 1 : "au-dessus / au-dessous"
Un point de la région 3 peut être interprété comme au dessus du plan. Un point de la région 4 peut être interprété comme au dessous du plan

b - Position relative d'une droite par rapport à un plan

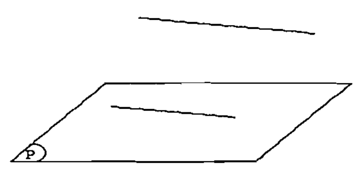
Les résultats ont mis en évidence la règle d'interprétation ci-dessous, qu'on notera "droite-int-plan"

Interprétation "droite-int-plan"
Soit un parallélogramme représentant un plan. Un segment à l'intérieur du parallélogramme, sera interprété comme une droite incluse dans P.

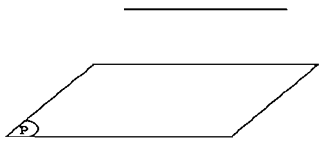
La nature des questions proposées et le fait que toutes les droites sont sur le même dessin ne nous ont pas permis de dégager d'autres règles d'interprétation possible. Nous formulons cependant des conjectures.

Conjecture 2 : Interprétation "droite-//-plan"
Soit un parallélogramme représentant un plan.

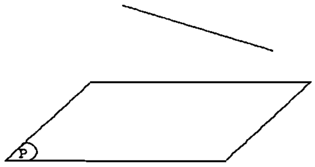
a - Un segment parallèle à un segment, représenté à l'intérieur du parallélogramme, sera interprété comme droite parallèle au plan.



b - Un segment parallèle à un des côtés du parallélogramme est interprété comme une droite parallèle à ce plan. Dans ce cas, les côtés du parallélogramme sont considérés comme des droites du plan.



Conjecture 3 : Interprétation "droite-ext-plan"
Soit un parallélogramme représentant un plan.
L'absence de pointillés sur la représentation d'une droite, extérieure au parallélogramme, peut induire que la droite n'est pas sécante avec ce plan.

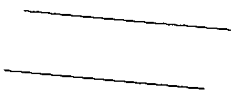


Conjecture 4 : Interprétation "droite-sec-plan"
Soit un parallélogramme représentant un plan.
Si un segment, représentant une droite, a une extrémité à l'intérieur du parallélogramme, et l'autre à l'extérieur du parallélogramme alors cette droite sera considérée comme étant sécante au plan P.

c - Position relative de deux droites entre elles

La situation 4 a mis en évidence une règle d'interprétation que nous appelons "droite-//-droite" :

Interprétation "droite-//-droite"
Si deux segments, représentant deux droites, sont parallèles alors ces deux droites sont parallèles.



De plus, les résultats montrent qu'en présence d'une représentation de deux droites sécantes avec un point indiquant l'intersection (fig. a), les élèves considèrent que les droites dont les représentations sont sécantes sans l'indication du point d'intersection, (fig.b) comme "ni parallèles ni sécantes".

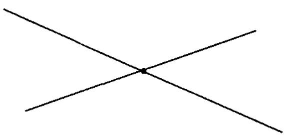


fig.a

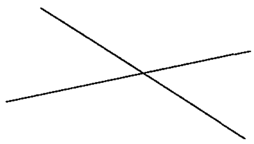


fig. b

Nous pensons qu'on aura des résultats analogues dans le cas où sur le même dessin sont représentées deux droites par deux segments, avec un "blanc" sur une droite à l'endroit de l'intersection, comme sur la figure (fig.c). Les élèves considéreront les droites dont les représentations sont sécantes, (fig.d) comme des droites sécantes.

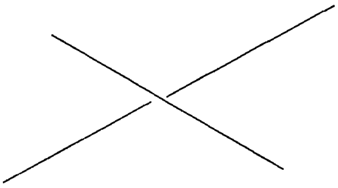


fig.c

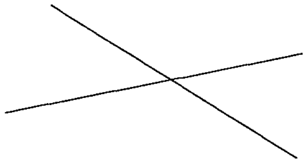


fig. d

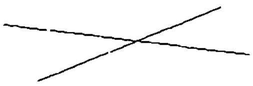
Dans le cas de fig.a, nous dirons qu'il s'agit d'une convention "droites sécantes", si elle a fait objet d'une institutionnalisation.

Dans le cas de fig. c, nous dirons qu'il s'agit d'une convention "droites non sécantes", si elle a fait objet d'une institutionnalisation.

Nous nous sommes alors demandés comment les élèves interpréteraient le dessin du type ci-dessus (fig.b ou fig. d) en l'absence de la représentation des droites selon l'une des convention "droites sécantes" ou "droites non sécantes" ? Et nous formulons la conjecture :

conjecture 5 : Interprétation "droite-sec-droite"

Si deux segments, représentant deux droites, sont sécants alors ces deux droites sont sécantes. (En dehors de possibilités de comparaison)

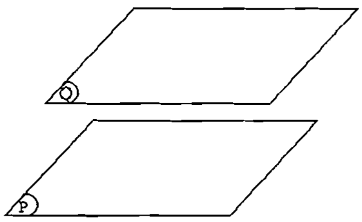


d - Position relative de deux plans entre eux

Les résultats précédents montrent que le dessin prototypique du parallélisme de deux plans induit chez les élèves une règle d'interprétation que nous notons "plan-//-plan".

Interprétation "plan-//-plan"

Si deux plans P et Q sont représentés par deux parallélogrammes ayant des bords parallèles, alors ces plans sont parallèles.



Dans le cas où seulement deux bords sont parallèles cette règle n'est plus vraiment induite. En effet, dans ce dernier cas, le nombre d'élèves ayant répondu que les plans sont parallèles est très faible.

2.2. Pourquoi un nouveau questionnaire[8]

Le test de B. Parzysz a mis en évidence l'influence des conventions et des dessins prototypiques sur la lecture des dessins par les élèves. Ainsi, nous avons dégagé des règles d'interprétation et nous avons formulé des conjectures relativement à d'autres règles d'interprétation que nous voudrions vérifier.

De plus, ce test n'a pas pris en compte la variable "solide" et, plus précisément, les dessins représentant des solides usuels. Nous pensons que c'est une variable importante pour la lecture des dessins de l'espace, d'autant plus que ce test a été fait en 1988 alors que, depuis, les programmes de géométrie dans l'espace ont changé dans l'enseignement secondaire. En particulier, le programme du collège est axé sur la géométrie du solide et au lycée les solides occupent une place importante dans les exercices. Enfin, certains cas d'incidence n'ont pas été examinés par ce test.

2.2.1. Choix du questionnaire

Nous avons proposé à des élèves un questionnaire dans lequel ils doivent, à partir d'un dessin, répondre à des questions portant sur des relations d'incidence. L'élève doit choisir entre trois réponses : "oui", "non" et "on ne peut rien dire". Chacune des réponses doit être justifiée. En effet, nous pensons que les justifications nous permettront de mieux interpréter les réponses d'élèves.

Afin d'éviter une interférence entre les interprétations concernant plusieurs objets, nous n'avons proposé qu'une question par dessin.

Ce travail a été réalisé suite à un enseignement de la géométrie dans l'espace en classe de Seconde. Nous avons choisi la classe de Seconde pour deux raisons :
- elle permet de faire le point des connaissances sur la lecture de dessins des élèves du collège
- c'est à ce niveau que les propriétés d'incidence de la géométrie dans l'espace sont étudiées.

Les exercices choisis tiennent compte, des représentations-type, du type de propriétés étudiées et de la variable solide.

Les onze exercices[9] sont répartis comme suit :

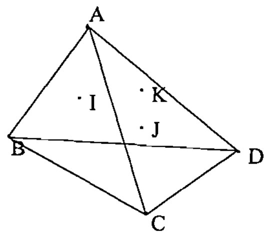
	Solide	Sans solide
Incidence de trois points	Ex 1	Ex 8
Positions relatives d'une droite et d'un plan	Ex : 2, 4, 9, 11	Ex : 3,5, 10
Positions relatives de deux droite elles	Ex 6	Ex 7

8 Pour plus de détails sur l'analyse a priori et l'analyse des résultats de ce questionnaire, cf. H. Chaachoua 1997.

9 La fiche des exercices est donnée en annexe.

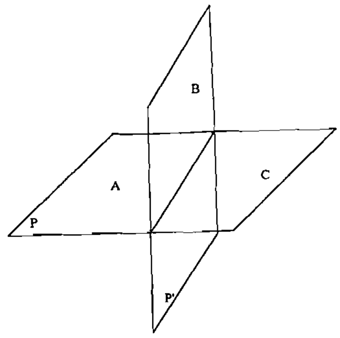
a - Exercices proposant l'étude de l'incidence de trois points

Exercice 1



Les points I, J et K sont-ils dans un même plan ?

Exercice 8



Les points A, B et C sont-ils dans un même plan ?

Dans ces deux exercices, nous avons représenté trois points non alignés. La question porte sur leur appartenance à un même plan. Deux variables ont été retenues :

- Nature des objets étudiés : solide ou non.
- Être ou non à l'intérieur d'un polygone

La réponse juste est "oui". Dans ce cas la justification attendue est que l'élève utilise une propriété géométrique pour la caractérisation d'un plan par trois points. On notera ces catégories de réponses par "P".

Certaines réponse peuvent exprimer que le plan est réduit au polygone qui le représente. Ces réponses manifestent l'interprétation du régionnement de l'espace "int-plan". On notera cette catégorie de réponses "Pg".

La variable "solide" doit renforcer les interprétations favorisant les réponses de la catégorie "Pg". Donc on pense qu'il y aura plus de réponses du type "Pg" pour l'exercice 1 que pour l'exercice 8.

b - Exercices proposant l'étude des positions relatives d'une droite par rapport à un plan

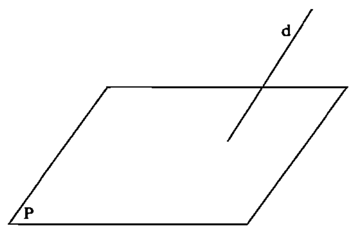
Nous avons distingué deux variables pour le choix des exercices : nature de l'objet étudié et interprétations possibles quant aux positions relatives d'une droite avec un plan. Nous allons présenter les exercices en nous intéressant d'abord à la première variable, et ensuite, pour chacun d'eux, nous préciserons le choix fait par rapport à la deuxième variable.

- Cas où les objets étudiés ne sont pas des solides

Étant donné que le test proposé par B. Parzysz a confirmé la règle d'interprétation "droite-int-plan", nous proposons d'examiner les conjectures 2 et 3 relatives aux règles d'interprétation respectivement "droite-//-plan" et "droite-ext-plan".

Il s'agit des exercices 3, 5 et 10. Dans les trois exercices nous avons représenté un plan par un parallélogramme.

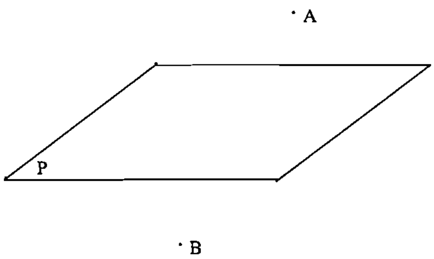
Exercice 3



La droite d est-elle sécante avec le plan P ?

Nous avons représenté la droite à l'aide d'un segment ayant une extrémité à l'extérieur du parallélogramme, et une deuxième extrémité à l'intérieur du parallélogramme.
Nous faisons l'hypothèse que la réponse "Oui, parce qu'un point de la droite appartient au plan" sera majoritaire. Cette réponse révèle l'utilisation de la règle d'interprétation "droite-sec-plan".

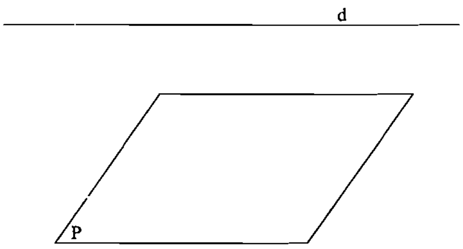
Exercice 5



La droite (AB) est elle sécante avec le plan P ?

Ici la droite n'est pas représentée par un segment mais elle est définie par deux points A et B représentés sur le dessin de sorte que A soit "au dessus" du parallélogramme et "B "au dessous" du parallélogramme.
Nous faisons l'hypothèse qu'il n'y aura pas de réponse "non".

Exercice 10



La droite d est-elle parallèle au plan P ?

Le segment représentant la droite est parallèle à un côté du parallélogramme. Le choix d'un côté horizontal a été fait pour renforcer la réponse "oui".
A travers les réponses des élèves, nous examinerons la conjecture 2 relative à la règle d'interprétation "droite-//-plan" (cas b)".

b - Cas où l'objet étudié est un solide

Nous avons proposé quatre exercices (2, 4, 9 et 11) avec une représentation d'un solide et un segment représentant une droite d. Pour l'ensemble des exercices nous avons choisi un cube comme solide. En plus du fait que c'est un solide usuel, nous l'avons choisi parce que dans l'enseignement du collège on commence à travailler la notion de parallélisme sur un cube. Nous pensons que le choix de ce solide pour étudier les problèmes d'incidence peut se justifier par la présence de faces parallèles, d'arêtes parallèles et de deux faces représentées en vraie grandeur. Ceci nous permettra en particulier de voir si les élèves privilégient les plans verticaux ou horizontaux.

• Variables

Deux variables ont été retenues : la question et le régionnement de l'espace par un cube.

Question

Deux types de questions sont examinés : être dans un plan ou être parallèle à un plan. Ces plans sont définis par une face de cube.

Régionnement de l'espace par un cube

Ce régionnement a des aspects culturels. Par exemple, dans le cas du dessin (fig. e), selon les personnes, on pense que d sera vue soit dans le plan (CDGH), soit dans le plan (ABCD), soit "au dessous" du cube, alors que dans le cas du dessin (fig. f) d sera vue dans le plan (ABFE) ou " au dessus" du cube.

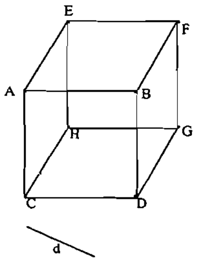


fig. e

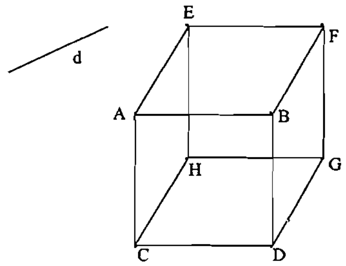
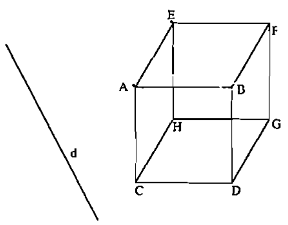


fig. f

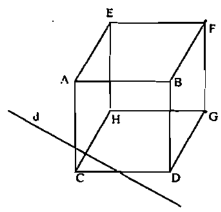
• Les exercices

Exercice 2



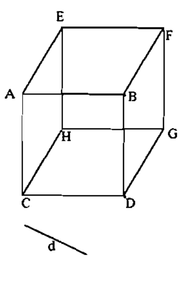
La droite d est-elle parallèle au plan AECH ?

Exercice 4



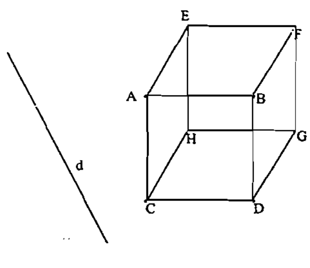
La droite d est-elle dans le plan ABCD ?

Exercice 9



La droite d est-elle dans le plan ABCD ?

Exercice 11



La droite d est-elle dans le plan ABCD ?

Dans les exercices 4, 9 et 11, il s'agit de dire si une droite d est dans le plan défini par la face frontale avant du cube. Nous avons fait varier la position du segment représentant la droite par rapport au cube.

Exercice 2

Nous cherchons à voir dans quelle mesure la variable "solide" influence le type de justification. Comme nous faisons l'hypothèse que la majorité des réponses sera "non", sans tenir compte de la variable "solide", nous supposons que la réponse majoritaire sera du type "Non, car d n'est parallèle à aucune droite du plan". C'est une conséquence de la règle d'interprétation "droite-//-plan".

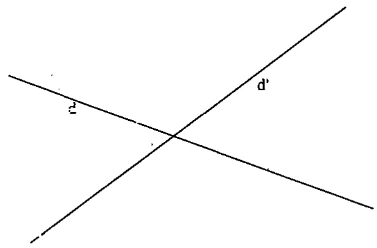
Exercices 4, 9 et 11

La variable est le régionnement de l'espace par un cube présenté ci-dessus. Nous faisons l'hypothèse que pour l'exercice 4, la majorité des réponses sera "oui" selon la règle d'interprétation "droite-int-plan", alors qu'elle seront "non" pour 9 et 11. De plus, nous voulons voir s'il y a des réponses différentes et quelle est l'influence de la variable "régionnement de l'espace" par un cube.

c - Exercices proposant l'étude de la position relative de deux droites entre elles

Pour cet item nous avons proposé deux exercices 6 et 7.

Exercice 7

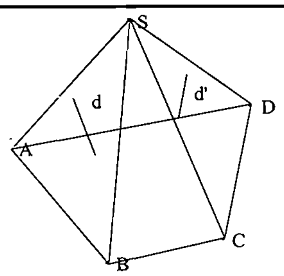


La droite d et d' sont-elles sécantes ?

Il s'agit d'examiner la conjecture 5 relative à la règle d'interprétation "droite-sec-droite". Deux droites sont représentées par deux segments sécants, en l'absence de représentation des droites selon l'une des convention "droites sécantes" ou "droites non sécantes".

Exercice 6

Cet exercice porte sur un solide, une pyramide SABCD, les deux droites d et d' étant représentées par deux segments à l'intérieur des triangles SAB et SCD.



Soit d une droite du plan (SAB) et d' une droite du plan (SCD). Les droites d et d' sont-elles sécantes ?

....

....

Contrairement aux autres exercices, pour cet exercice nous avons précisé certaines relations entre les objets géométriques. Ces données permettent de décider au niveau du dessin si les droites sont sécantes ou non. C'est ce type de situation que les élèves sont invités à résoudre dans des problèmes de géométrie dans l'espace où la construction est possible sur le dessin.

En prolongeant les représentations des droites d et d', on se trouve dans la même situation que pour l'exercice 7.

Nous nous intéressons aussi dans cet exercice, aux réponses des élèves ayant répondu "oui" à la question de l'exercice 7 en justifiant par l'absence de marquage, que les droites ne sont pas sécantes. En effet, l'utilisation de cette convention va dans le sens de l'illustration. Or lorsque l'élève résout l'exercice a priori, il ne sait pas si les droites sont sécantes ou non.

2.3. Recueil des données

Nous avons proposé ce questionnaire aux élèves de quatre classes[10] d'effectif total 103. A chaque enseignant, nous avons donné la consigne de ne pas répondre à des questions relatives aux dessins et de limiter ses interventions à l'explicitation de la tâche.

A chaque copie a été attribué un code constitué par des lettres en relation avec la classe et par un nombre en relation avec l'élève. Ensuite, dans chacune des copies, nous avons indiqué la réponse de l'élève (O "oui", N "non" ou OR "on ne peut rien dire"), et examiné si celle-ci avait été justifiée.

3. Analyse des données

3.1. Analyse globale

Ci-dessous, nous proposons d'abord une analyse globale[11] sans l'examen des justifications. Cet examen sera fait plus loin.

	Ex 1			Ex 2			Ex 3			Ex 4			Ex 5		
	O	N	O.R	O	N	**O.R**	O	N	**O.R**	O	N	**O.R**	O	N	**O.R**
Tot(103)	58	10	35	1	67	31	18	4	79	23	5	71	40	3	53

	Ex 6			Ex 7			Ex 8			Ex 9			Ex 10			Ex 11		
	O	**N**	O.R	O	N	**O.R**	**O**	N	O.R	O	N	**O.R**	O	N	**O.R**	O	N	**O.R**
Tot(103)	67	9	23	15	1	85	69	18	10	12	16	71	71	0	26	10	8	77

Le pourcentage du nombre des réponses "O.R" par rapport au nombre global des réponses est variable, d'un item à un autre, il va de 10% à 85%. Nous pouvons avancer au moins trois explications quant à cette variation :
- elle ne dépend pas que de la nature de l'item
- elle est due à une réticence des élèves à répondre "O.R", une telle réponse étant en opposition avec les clauses du contrat pédagogique relatif au problème.
- Elle est due au fait qu'un élève peut répondre "O.R" avec le sens "Je ne sais pas répondre".

Les réponses incohérentes ou sans justification seront désignées par la lettre X. Elles sont réparties comme l'indique le tableau ci-dessous :

---

10 Nous remercions les enseignants et les élèves des classes de Seconde du Lycée Stendhal à Grenoble qui ont participé à la mise en place de ce questionnaire.

11 On a eu 991 réponses. Les réponses correctes sont en gras.

	Ex.1	Ex.2	Ex.3	Ex.4	Ex.5	Ex.6	Ex.7	Ex.8	Ex.9	Ex.10	Ex.11	Tot
Oui (X)	0	0	1	3	6	6	5	6	3	6	2	38
Non (X)	1	7	2	1	0	2	1	2	6	0	1	23
O.R (X)	2	3	6	8	4	4	6	3	10	3	16	65

Ce tableau montre que le nombre de réponses "on ne peut rien dire" sans justification est faible[12]. On peut donc considérer que les élèves n'ont pas répondu "O.R" avec le sens "Je ne sais pas répondre".

Nous avons voulu que les élèves répondent de façon "spontanée" aux questions posées. Seulement, les enseignants qui ont présenté le questionnaire ont constaté qu'il y a eu retour sur des items, au cours du questionnaire, par certains élèves. A la fin de la séance, il a été demandé aux élèves d'une classe de signaler s'ils avaient effectué un retour aux questions précédentes.

Sur 26 élèves, 7 ont indiqué qu'ils ont changé d'avis au cours du questionnaire. Par exemple, l'élève B1 a répondu non pour l'exercice 1, en justifiant :

B1 : "Le point I est dans le plan ABC et les points J et K sont dans le plan ACD."

Cette réponse a été effacée[13] et remplacée par une réponse "Oui", accompagnée d'une nouvelle justification :

B1 : "On peut dire aussi que les points I J K sont dans le plan (IJK)"

Le même changement a eu lieu pour l'exercice 8.

Nous pensons que pour d'autres élèves il n'y a pas eu de retour aux questions précédentes, mais que celles-ci ont partiellement influencé leur réponse relative à la suite du questionnaire.

Pour notre analyse nous ne tiendrons pas compte de ces remarques.

Nous proposons de comparer les réponses majoritaires par rapport aux réponses attendues dans l'analyse a priori, pour l'ensemble des items[14] :

	Ex1			Ex2			Ex3			Ex4			Ex5		
	O	N	O.R	O	N	O.R	O	N	O.R	O	N	O.R	O	N	O.R
R.cor															
R. at															
R.maj	**58**	10	35	3	**67**	31	18	4	**79**	23	5	**71**	40	3	**53**

	Ex 6			Ex 7			Ex 8			Ex 9			Ex 10			Ex 11		
	O	N	O.R	O	N	O.R	O	N	O.R	O	N	O.R	O	N	O.R	O	N	O.R
R.cor																		
R. at																		
R.maj	**67**	9	23	15	1	**85**	**69**	18	10	12	16	**71**	**71**	0	26	11	8	**77**

De ce tableau nous tirons les remarques suivantes :

12 65 réponses "O.R" sans justifications sur 561 réponses "O.R".

13 il restait une trace sur la copie.

14 R.cor : réponses justes
R.at : réponses attendue
R.maj : réponses majoritaires

1) Les réponses majoritaires représentent au moins 70% des réponses, à l'exception des items ex1, ex2 et ex5 où le nombre de réponses majoritaires varie entre 50% et 70 %.

2) les réponses sont conformes à celles attendues uniquement pour les trois items, ex2, ex6 et ex10.

3) Les réponses majoritaires sont celles attendues ou bien celles qui sont correctes. De plus, le pourcentage des réponses ne correspondant ni à celles attendues (R.at) ni à celles qui sont correctes (R.cor), est très faible (entre 1% et 10%) sauf pour les exercices 1 et 6.

Pour mieux comprendre, il est nécessaire d'examiner les justifications. En effet, comme on le verra dans l'analyse ci-dessous, en analysant les justifications, deux réponses différentes, pour un même exercice par deux élèves, peuvent avoir la même origine. De même, certaines réponses justes seront accompagnées de justifications fausses. Cela montre, dans ce cas, que le recueil des données des tableaux est insuffisant pour répondre à nos questions, l'analyse des justifications ne s'en impose que plus.

3.2. Exercices proposant l'étude d'incidence de trois points

Nous constatons une augmentation de bonnes réponses entre l'exercice 1 et l'exercice 8. Et dans chacun de ces deux exercices, au moins un tiers des élèves n'a pas répondu correctement.

	Ex 1			Ex 8		
	Oui	Non	O.R	**Oui**	Non	O.R
Tot	58	10	35	69	18	10

Presque la moitié des élèves ont mobilisé la propriété "trois points non alignés définissent un plan" indépendamment de la nature de l'objet.

Cependant, il y a plus de réponses du type "P" pour l'exercice 8 que pour l'exercice 1. Presque toutes les réponses du type "P" pour l'exercice 1 sont du même type pour l'exercice 8 (50 / 56), alors que 17 réponses sont dans ce type pour l'exercice 8 mais du type "Pg" pour l'exercice 1. Ceci confirme l'importance de la variable "nature de l'objet" et, plus précisément, que l'élève se limite aux plans représentés plus souvent dans le cas où l'objet étudié est un solide que dans les autres cas.

Seulement 11 élèves ont mobilisé la règle d'interprétation régionnement dans l'espace "int-plan".

3.3. Exercices proposant d'étudier des positions relatives d'une droite et d'un plan

Nous distinguons deux cas selon la variable "nature de l'objet étudié".

a - Cas où l'objet étudié est un solide

Nous rappelons dans le tableau ci-après les résultats globaux pour les exercices de cette catégorie.

	Ex 2			Ex 4			Ex 9			Ex 11		
	Oui	Non	**O.R**	Oui	Non	**O.R**	Oui	Non	**O.R**	Oui	Non	**O.R**
Total	1	67	31	23	5	71	12	16	71	10	8	77

Il ressort que pour les exercices 4, 9 et 11 plus de 70% des réponses sont justes c'est-à-dire "On ne peut rien dire"; alors que pour l'exercice 2, près de 68% de réponses sont fausses. Deux explications possibles peuvent être avancées :

- La question posée dans l'exercice 2 est de savoir si la droite est parallèle à un plan, alors que dans les autres exercices, il s'agit de savoir si une droite appartient à un plan.
- Le rapport de l'élève avec le dessin a changé au cours du questionnaire, comme nous l'avons dit plus haut.

Exercice 2

La majorité des réponses sont conformes à notre attente c'est-à-dire "Non". Parmi eux, 21 élèves ont justifié avec des arguments relevant de l'évidence perceptive : "Non, ça se voit".

28 réponses "Non" avaient comme justification : "Non, car d n'est parallèle à aucune droite du plan" ou "Non, car d n'est pas parallèle à la droite (AC)". Elles sont des conséquences de la règle d'interprétation "droite-//-plan". Plus précisément, ces élèves utilisent le fait que si la droite n'est parallèle à aucune droite du plan elle n'est pas parallèle au plan P.

Les élèves ayant répondu "On ne peut rien dire", ont justifié essentiellement par le fait qu'il manque des informations.

Exercices 4, 9 et 11

Malgré un taux de réponse "On ne peut rien dire" assez élevé (70%) pour ces exercices, seulement 30% de ces réponses ont des justifications justes.

Une autre catégorie de justification pour les réponses "On ne peut rien dire" importante (environ 30%) est basé sur le fait que pour les élèves "la droite d est parallèle au plan (ABCD) ou incluse dans ce plan".

L'absence des marques ou des pointillés a permis à des élèves (environ 9%) de conclure sur l'intersection de deux droites ou d'une droite et d'un plan.

b - Cas où les objets étudiés ne sont pas des solides

Il s'agit des exercices 3, 5 et 10 dont les résultats sont rappelés dans le tableau ci-dessous:

	Ex 3			Ex 5			Ex10		
	Oui	Non	**O.R**	Oui	Non	**O.R**	Oui	Non	**O.R**
Total	18	4	79	38	3	53	71	0	26

Exercice 3

Même si près de 80% de réponses sont "On ne peut rien dire", les élèves ont utilisé certaines règles implicites du dessin : "Absence de pointillés. Il faut prolonger pour voir. Il faut mettre en évidence l'intersection".

Les 4 élèves ayant répondu "non" ont justifié leur réponses par l'absence de pointillé.

Pour les réponses "oui", 4 justifications renvoient à la règle d'interprétation "droite-sec-plan" et 7 utilisent d'une part un résultat géométrique : une droite est soit parallèle[15] à un plan soit elle est sécante à ce plan. D'autre part, la justification que d n'est pas parallèle à P utilise la règle d'interprétation "droite-//-plan"[16].

Exercice 5

Les justifications majoritaires pour la réponse "oui", sont :

- "Oui, car A et B sont de part et d'autre du plan P"

Certains élèves ont formulé par "A est au dessus de P et B au dessous de P". Ces justifications s'inscrivent dans ce que nous avons appelé interprétation "au dessus / au dessous"[17].

- "Oui, car (AB) n'est pas parallèle à P"

On pense que pour les élèves ayant donné ces justifications "la droite d n'est pas parallèle au plan" car la représentation de la droite (AB) est parallèle à aucun coté du parallélogramme (règle d'interprétation "droite-//-plan").

Les justifications "A et B sont de part et d'autre du plan P", "Car (AB) traverse P" et "Si on prolonge P" alors la droite est sécante" sont des conséquences du régionnement du plan "au dessus/au dessous" (19 élèves sont concernés).

La moitié des réponses "On ne peut rien dire" sont justifiées par le manque d'informations. Le cas "(AB) est incluse dans le plan P" n'a pas été évoqué.

Exercice 10

La majorité des réponses sont du type "Oui, car la droite est parallèle à une droite du plan" (35%) ou " Oui, car la droite d n'est pas sécante avec P" (12%).

Elève A16 : "oui"

Justification : "D'après la figure en perspective, d est parallèle à deux des bords du plan P. Comme une droite parallèle à une autre droite d'un plan est parallèle à ce même plan, d// à P."

c - Synthèse des justifications

Bien que le nombre de réponses justes, "on ne peut rien dire", soit important dans le cas des exercices 3, 4, 5, 9 et 11, le nombre de justifications justes ne dépasse pas 30%.

La variable "solide" a privilégié des lectures spécifiques du dessin. En effet :

- La majorité des justifications sont fondées sur une interprétation selon laquelle la droite d est soit parallèle au plan (ABCD) soit incluse dans ce plan.

---

15 parallèle ou incluse

16 Conjecture 2

17 Conjecture 1

- Certains élèves ont considéré que la droite d, de l'exercice 9, peut être dans les plans (ABCD) ou (CDGH).

- Le régionnement de l'espace par le cube a été mis en évidence par le fait que les élèves n'ont pas utilisé les mêmes justifications pour les exercices 4, 9 et 11, alors que la seule différence entre ces exercices est la position de la droite d par rapport au cube.

L'interprétation "droite-//-plan" concernant le parallélisme d'une droite avec un plan est la plus utilisée par les élèves. Cette règle a permis de justifier qu'une droite est parallèle à un plan lorsqu'elle est parallèle à un segment de celui-ci, et aussi de justifier qu'elle n'est pas parallèle à un plan lorsque sur la représentation elle n'est parallèle à aucun segment de ce plan.

Dans le cas des exercices où nous avons proposé des solides, les élèves ont considéré que la droite d était soit parallèle au plan (ABCD) soit incluse dans ce plan. En particulier, pour l'exercice 4, 42 élèves ont utilisé cette justification[18]. Or, la droite d n'est parallèle à aucune droite du plan (ABCD). Donc, c'est l'objet solide, ici le cube, qui a induit cette lecture.

La règle d'interprétation "droite-sec-plan" a été mobilisée seulement par 4 élèves pour l'exercice 3. 47% des élèves ont répondu qu'il manquait des informations. Parmi eux, 16% ont précisé que l'absence de pointillés ne permet pas de conclure. Il faut ajouter à ces derniers 4% d'élèves qui ont répondu "non" en justifiant par l'absence des pointillés. De même dans le cas des exercices 4, 9 et 11, plusieurs élèves ont écarté le cas "d sécante avec un plan" parce qu'il n'y a pas de pointillés.

Dans le test de B. Parzysz, environ 29% d'élèves avaient répondu "oui". Nous avons attribué ce faible résultat en partie au fait que l'interprétation peut se faire en référence avec une droite où il y aurait des ponctuations à l'endroit de l'intersection. Dans notre questionnaire nous n'avons proposé qu'une seule droite et le nombre de réponses "oui" est beaucoup plus faible (4%). Nous pensons que ce "faible" score peut être expliqué en partie par le fait que la représentation de la droite est presque parallèle à un côté du parallélogramme représentant le plan.

Néanmoins, nous pouvons conclure que cette règle d'interprétation n'est pas mobilisée par beaucoup d'élèves ce qui peut s'expliquer essentiellement par l'absence des pointillés utilisés normalement dans la convention de représentation d'une droite sécante avec un plan.

Enfin, toutes les règles d'interprétation concernant les positions relatives d'une droite et d'un plan, ont été utilisées par les élèves selon des proportions variables.

3.4. Exercices proposant l'étude des positions relatives de deux droites

Les résultats relatifs aux exercices 6 et 7 sont présentés dans le tableau ci-dessous

	Ex 6			Ex 7		
	Oui	**Non**	O.R	Oui	Non	**O.R**
Tot	67	9	23	15	1	85

18 Cette justification a été utilisée par 12 élèves pour l'exercice 9 et 17 élèves pour l'exercice 11.

La réponse majoritaire pour l'exercice 6 est "oui" et celle pour l'exercice 7 elle est "on ne peut rien dire".

Seulement 3 élèves ont répondu "Non" pour l'exercice 6, avec la justification "d et d' ne sont pas sécantes car leurs intersections respectives avec la droite d'intersection des plans (SAB) et (SCD) sont distinctes".

Les autres justifications pour les réponses "Non" sont : "d et d' ne sont pas dans un même plan" ou "les plans ne sont pas sécants".

Les justifications utilisées pour les réponses "oui" sont principalement :

- JO1 : "d et d' sont sécantes car elles sont incluses dans deux plans sécants". (47%)

- JO2 : "En prolongeant les droites, on voit qu'elles sont sécantes". (7%)

Les justifications utilisées pour les réponses "on ne peut rien dire" sont principalement

- JR1 : Il manque des informations. (48%)

Les types d'informations manquantes ne sont pas de même nature pour les exercices 6 et 7. En effet, pour l'exercices 6, on peut relever : "il faut voir si d et d' ont la même pente"; "on ne sait pas si elles sont à la même hauteur dans leurs plans respectifs". Alors que pour l'exercice 7, on peut noter : "il faut voir s'il existe un espace entre d et d'"; "on ne sait pas si d et d' sont dans deux plans parallèles ou confondus"; "on ne connaît pas la profondeur" ...

- JR2 : Il faut savoir si d et d' sont coplanaires. (20%)

Cas des justification JO1 en ce qui concerne l'exercice 6

Nous avançons l'hypothèse que leur justification est basée sur un théorème en acte :

Si deux droites sont incluses respectivement dans deux plans sécants, alors elles sont sécantes.

En effet, nous avons relevé dans les productions que :

- tous les élèves, sauf un, ont conclu sans tracer des prolongements aux droites d et d'. Notons que 5 élèves ont réalisé des tracés pour justifier que les plans (SAB) et (SCD) sont sécants.

- La majorité des élèves ont justifié le fait que les plans (SAB) et (SCD) sont sécants, soit en construisant leur intersection, soit en argumentant que les deux plans ne sont pas parallèles, et/ou ils ont un point commun S.

Cette règle a été explicitée dans leur justification sans qu'ils aient recours aux tracés. Nous avons montré que dans ce cas il ne s'agit pas d'une règle d'interprétation du dessin. Il reste à étudier dans quelle mesure le dessin renforce ou non ce théorème en acte.

Pour d'autres élèves nous avons mis en évidence la règle d'interprétation "droite-sec-droite"[19] sous condition que les plans contenant ces deux droites ne soient pas parallèles.

---

19 Interprétation "droite-sec-droite" : Si deux segments, représentants deux droites, sont sécants alors les deux droites sont sécantes

4. Synthèse des résultats sur l'ensemble du questionnaire

La contrainte "justifier", nous a permis de mettre en évidence des règles d'interprétation. De plus, nous avons pu identifier ces dernières, pour un même exercice, à travers des réponses du type "oui", "non" ou "on ne peut rien dire".

L'analyse a montré que les justifications basées uniquement sur l'évidence de la perception sont minoritaires[20]. Presque toutes les justifications utilisent des propriétés géométriques, sous contrôle perceptif sans doute. Seulement certaines étapes de ces justifications se limitent à une lecture du dessin en utilisant une règle d'interprétation.

4.1. Régionnement de l'espace

Les règles d'interprétation "int-plan" et "ext-plan" étaient confirmées par le test de B. Parzysz. Notons également, que la règle d'interprétation "int-plan" a été mobilisée par les élèves dans le cas de l'exercice 1.

Dans le cas de l'exercice 5, les élèves ont utilisé des justifications faisant apparaître deux régions "au-dessus" et "au-dessous" du plan. Ceci valide la conjecture "au-dessus/au-dessous".

4.2. Position relative d'une droite par rapport à un plan

La règle d'interprétation "droite-int-plan" a été confirmée par le test de B. Parzysz.

La règle d'interprétation "droite-//-plan" a été confirmée par notre questionnaire. Cette règle a permis de justifier qu'une droite est parallèle à un plan lorsqu'elle est parallèle à un segment de celui-ci, et aussi de justifier qu'elle n'est pas parallèle à un plan lorsque sur le dessin elle n'est parallèle à aucun segment de ce plan.

La règle d'interprétation "droite-ext-plan", a été examinée uniquement dans le cas du solide. Deux positions ont été privilégiées : être parallèle au plan (ABCD) ou dans un des deux plans (ABCD) et (CDGH). Nous pensons, que c'est la valeur de la variable "solide", cube, qui a induit ces lectures.

Enfin, pour la règle d'interprétation "droite-ext-plan", nous n'avons pas pu conclure. Rappelons que B. Parzysz n'a pas non plus conclu à ce propos. Dans notre cas, nous l'expliquons en partie par le fait que la représentation de la droite d était presque parallèle à un coté du parallélogramme.

4.3. Position relative de deux droites entre elles

Le test proposé par B. Parzysz a confirmé la règle d'interprétation "droite-//-droite". L'analyse des justifications de l'exercice 7, n'a pas révélé l'utilisation de la règle d'interprétation "droite-sec-droite". En revanche, dans les exercices où notre étude porte sur des solides, nous avons constaté que cette règle a souvent été utilisée par les élèves pour déduire que deux droites sont sécantes.

Un théorème en acte a été mis en évidence dans l'analyse de l'exercice 7 :

---

20 50 justifications sur 991 sont du type "ça se voit". Ceci n'est-il pas un élément du contrat où les justifications "autorisées" doivent être de nature géométrique ?

Si deux droites sont incluses respectivement dans deux plans sécants, alors elles sont sécantes

Lorsque nous avons étudié les positions relatives de deux droites, nous avons constaté que l'on a moins de réponses "on ne peut rien dire" dans le cas où ces deux droites sont rattachées à des plans, que si elle sont définies comme droites de l'espace sans rattachement à un plan.

Conclusion

Des conventions de représentation adoptées dans l'enseignement ont pour fonction d'illustrer une situation spatiale, et donc d'élargir le domaine de fonctionnement du dessin. Ces conventions deviennent chez des élèves des "règles d'interprétation" pour la lecture du dessin, ce qui n'était nullement l'intention de l'enseignement. Ceci valide l'hypothèse de recherche "convention" :

Les conventions de représentation de la perspective cavalière deviennent des règles d'interprétation d'un dessin chez les élèves.

Les élèves utilisent de façon conjuguée ces règles avec des théorèmes de la géométrie dans l'espace pour justifier leurs réponses. Il est à noter que ces théorèmes ne contredisent nullement les règles d'interprétation, puisque ces dernières ne sont que des illustrations des premiers. On peut déduire qu'il y a absence de conflits entre les connaissances géométriques et la lecture du dessin. Cela ne peut que renforcer l'usage de règles d'interprétation.

La notion de coplanarité joue un rôle important dans les problèmes d'incidence de deux droites dans l'espace. Or le dessin ne peut être informatif que si l'on utilise d'autres moyens de contrôle basés sur les règles de la perspective cavalière, comme c'est le cas pour l'exercice 6. En effet , c'est le seul[21] exercice de la série auquel on peut répondre par le dessin, par l'utilisation de la règle "si l'intersection de d avec Δ, intersection des plans (SAB) et (SCD), est confondue avec l'intersection de d' et Δ, alors les droites d et d' sont sécantes". Cette règle n'est pas annoncée dans le cours, mais elle doit être justifiée par l'utilisation des propriétés d'incidence. L'application de cette règle nécessite la construction sur le dessin des intersections des plans (SAB) et (SCD), ce qui n'est pas toujours possible. Cette remarque montre que dans certains cas le dessin peut fournir une réponse contrôlable par les propriétés géométriques et les règles de la perspective cavalière.

21 En plus de l'exercice 1, mais dans lequel la réponse ne dépend pas du dessin.

Bibliographie

BESSOT A., DEPREZ S., EBERHARD M., GOMAS B. (1993) Une approche didactique de la lecture de graphismes techniques en formation professionnelle de base aux métiers du bâtiment. In Bessot A. et Vérillon P. (eds) *Espace graphique et graphismes d'espace. Contribution de psychologues et de didacticiens à l'étude de la construction des savoirs spatiaux.* Grenoble : La Pensée Sauvage.

BKOUCHE R., SOUFFLET M. (1983) Axiomatique, formalisme, théorie. *Bulletin Inter-Irem "Enseignement de la géométrie"* (23) 3-24.

CHAACHOUA H. (1997) *Fonctions du dessin dans l'enseignement de la géométrie dans l'espace. Etude d'un cas : la vie des problèmes de construction et rapports des enseignants à ces problèmes.* Thèse. Université Joseph Fourier. Grenoble.

CORDIER F., CORDIER J. (1991) L'application du théorème de Thalès. Un exemple du rôle des représentations typiques comme biais cognitifs. *Recherches en didactique des mathématiques* 11 (1) 45-64.

LABORDE C. (1992) Enseigner la géométrie : permanences et révolutions, conférence plénière au *7ème congrès international sur l'enseignement des mathématiques, ICME 7*, Québec, Canada, août 1992.

LABORDE C., CAPPONI B. (1994) Cabri-géomètre constituant d'un milieu pour l'apprentissage de la notion de figure géométrique. *Recherches en Didactique des Mathématiques* 14 (1) 165-210.

NOIRFALISE R. (1991) Figures prégnantes en géométrie ? *Repère 2* , 51-58.

PARZYSZ B. (1989) *Représentations planes et enseignement de la géométrie de l'espace au lycée. Contribution à l'étude de la relation voir/savoir.* Thèse. Paris : Université Paris-7.

PARZYSZ B. (1991) Espace, géométrie et dessin. Une ingénierie didactique pour l'apprentissage, l'enseignement et l'utilisation de la perspective parallèle au lycée. *Recherches en didactiques des mathématiques* 11 (2.3) 211-240.

-126-

ANNEXE 01

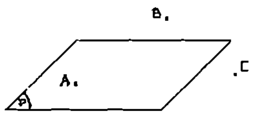
LE QUESTIONNAIRE (SECONDE VERSION)

1/1

NOM et Prénom: .... Redoublant? OUI NON

Classe: .... Etablissement: ....

DESSIN 1



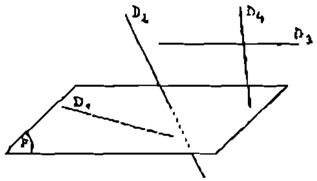
Ce dessin représente 3 points de l'espace, A, B, C, ainsi qu'un plan P.

Pour chacun des points A, B, C, dites si, d'après le dessin, il est dans le plan P.

(Cochez les bonnes réponses)

	est dans le plan P.	n'est pas dans le plan P.	Le dessin ne permet pas de répondre.	Je ne sais pas.
le point A				
le point B				
le point C				

DESSIN 2



Ce dessin représente 4 droites de l'espace D_1, D_2, D_3, D_4, ainsi qu'un plan P.

Pour chacune des 4 droites, dites si, d'après le dessin:

. elle est dans le plan P;

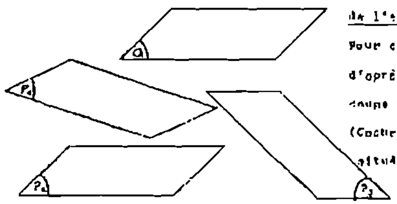
. elle coupe P en un point;

. elle n'a aucun point dans P.

(Cochez les bonnes réponses)

	est tout entière dans P.	coupe P en un seul point.	n'a aucun point dans le plan P.	le dessin ne permet pas de répondre.	Je ne sais pas.
la droite D_1					
la droite D_2					
la droite D_3					
la droite D_4					

DESSIN 4



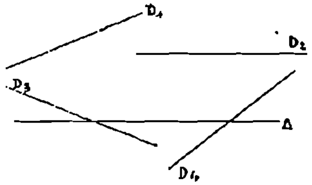
Ce dessin représente 4 plans P_1, P_2, P_3 et Q de l'espace.

Pour chacun des 3 plans P_1, P_2, P_3, dites si, d'après le dessin, il est parallèle à Q, ou coupe Q.

(Cochez la bonne réponse dans le tableau situé au dos de la feuille)

	coupe le plan Q.	est parallèle à Q.	n'a aucun point commun avec Q.	le dessin ne permet pas de répondre.	je ne sais pas.
le plan P_1					
le plan P_2					
le plan P_3					

DESSIN 4



Ce dessin représente 5 droites D_1, D_2, D_3, D_4 et Δ de l'espace.

Pour chacune des 4 droites D_1, D_2, D_3, D_4, dites si, d'après le dessin:

. elle coupe Δ;

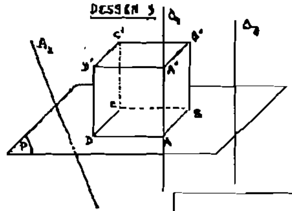
. elle est parallèle à Δ;

. elle n'est, ni parallèle, ni sécante à Δ.

(Cochez les bonnes réponses)

	coupe la droite Δ.	est parallèle à Δ.	n'est ni parallèle, ni sécante à Δ.	le dessin ne permet pas de répondre.	je ne sais pas.
la droite D_1					
la droite D_2					
la droite D_3					
la droite D_4					

DESSIN 5



Ce dessin représente un cube ABCDA'B'C'D' posé sur un plan horizontal P, ainsi que 3 droites Δ_1 (=(AA')), Δ_2 et Δ_3.

Pour chacune des droites $\Delta_1, \Delta_2, \Delta_3$, dites si, d'après le dessin, elle est verticale.

(Cochez les bonnes réponses)

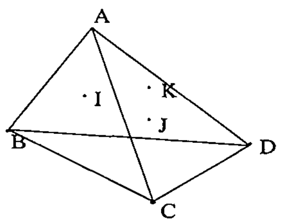
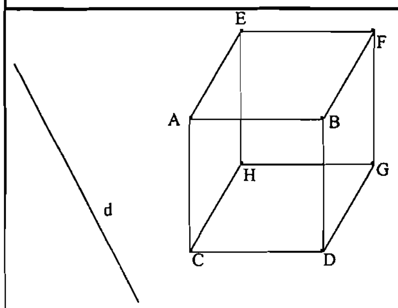
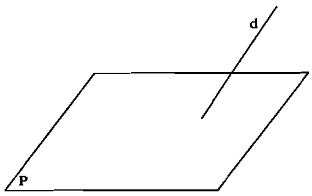
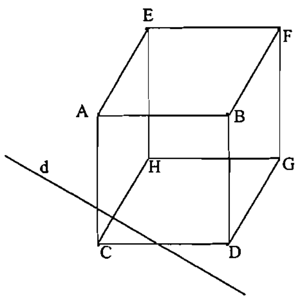
	est perpendiculaire à P.	n'est pas perpendiculaire à P.	le dessin ne permet pas de répondre.	je ne sais pas.
la droite Δ_1				
la droite Δ_2				
la droite Δ_3				

QUESTION SUPPLÉMENTAIRE: avez-vous déjà fait de la Géométrie dans l'espace au cours de mathématiques, cette année ou les années précédentes ?

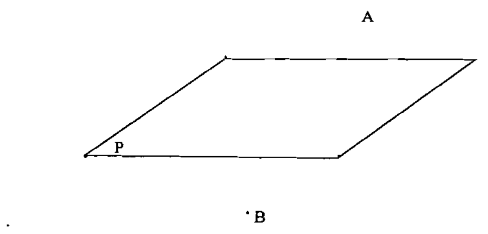
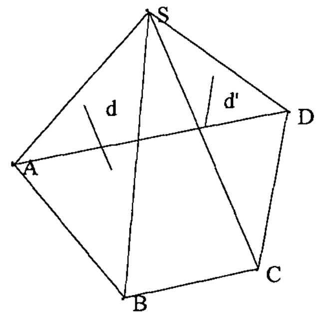
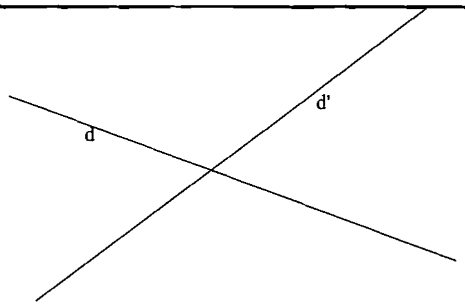
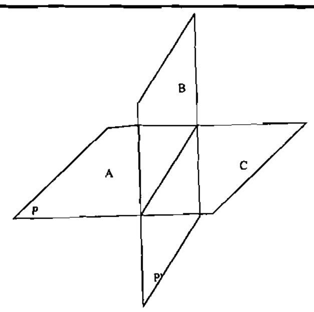
1/2

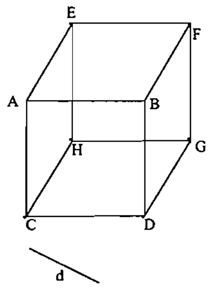
Pas du tout. Un peu. Moyennement. Beaucoup.

Annexe
Questionnaire[22]

	Les points I, J et K sont ils dans un même plan ? Oui Non On ne peut rien dire Justification : ....
	La droite d est-elle parallèle au plan AECH ? Oui Non On ne peut rien dire Justification : ....
	La droite d est-elle sécante avec le plan P ? Oui Non On ne peut rien dire Justification : ....
	La droite d est-elle dans le plan ABCD ? Oui Non On ne peut rien dire Justification : ....

22 C'est, en format réduit, celui proposé aux élèves

<table>
<tr>
<td>
</td>
<td>La droite (AB) est elle sécante avec le plan P ?
Oui Non On ne peut rien dire
Justification : ....
....
....
....
....</td>
</tr>
<tr>
<td>
</td>
<td>Soit d une droite du plan (SAB) et d' une droite du plan (SCD). Les droites d et d' sont-elles sécantes ?
Oui Non On ne peut rien dire
Justification : ....
....
....
....
....</td>
</tr>
<tr>
<td>
</td>
<td>Les droites d et d', de l'espace sont-elles sécantes ?
Oui Non On ne peut rien dire
Justification : ....
....
....
....
....</td>
</tr>
<tr>
<td>
</td>
<td>Les points A, B et C sont-ils dans un même plan ?
Oui Non On ne peut rien dire
Justification : ....
....
....
....
....</td>
</tr>
</table>



La droite d est-elle dans le plan ABCD ?

Oui   Non   On ne peut rien dire

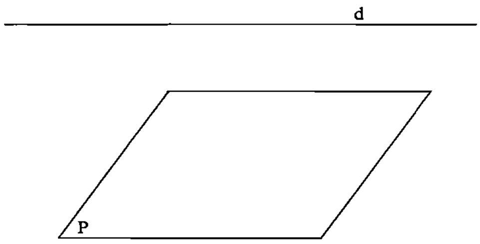
Justification : ....

....

....

....

....



La droite d est-elle parallèle au plan P ?

Oui   Non   On ne peut rien dire

Justification : ....

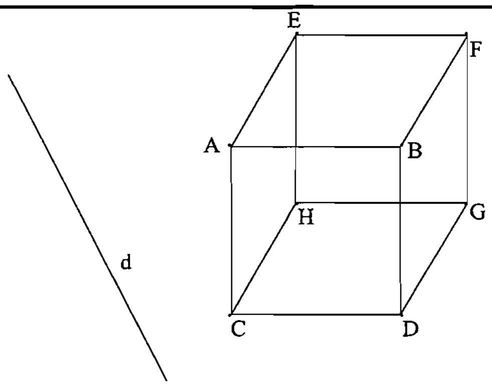
....

....

....

....

....



La droite d est-elle dans le plan ABCD ?

Oui   Non   On ne peut rien dire

Justification : ....

....

....

....

....

....

....

....