

# **LE RÔLE DE L'ANALYSE DES TÂCHES POUR UN ENSEIGNANT**

**Analyse des tâches pour le calcul d'une longueur  
dans une configuration faisant appel au théorème de Thalès**

Nathalie PFAFF,  
Lycée professionnel de Nogent sur Marne

## **Présentation de la recherche**

Le travail principal d'un enseignant repose sur l'analyse des activités de classe, a priori et a posteriori : a priori, pour mettre en place des séquences didactiques ; a posteriori, pour analyser le déroulement de ces séquences et, ainsi, comprendre les productions des élèves. L'analyse des tâches est un des points essentiels permettant de mener à bien cette analyse des activités de classe.

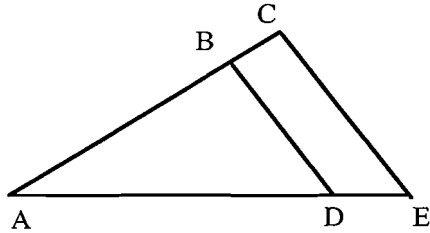
Mais qu'entend-on par analyse des tâches ? Ou plus exactement, quel type d'analyse des tâches est-elle utile à l'enseignant ? Cet article tente de répondre à cette question à partir d'un exemple : l'analyse des tâches pour le calcul d'une longueur dans une configuration faisant appel au théorème de Thalès.

Actuellement, le théorème de Thalès est enseigné en troisième. Les exercices liés au théorème de Thalès, que l'on trouve dans les manuels, sont de trois types :

## 1. Type calcul .

Le calcul peut concerner une longueur ou un rapport de longueurs. Connaissant trois longueurs de segments pour une figure munie de parallèles, on calcule une quatrième longueur ou un rapport de longueurs.

*Exemple.*

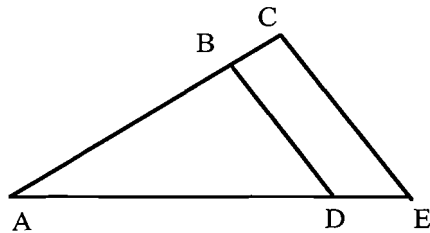


$(BD) \parallel (CE)$   
 $AB = 5 \text{ cm} ; AC = 7 \text{ cm} ; AD = 6 \text{ cm}$   
 Calculer  $AE$ .

## 2. Type démonstration.

La démonstration concerne le parallélisme de deux droites. Connaissant quatre longueurs de segments pour une figure, on démontre le parallélisme de deux droites.

*Exemple.*



$AB = 5 \text{ cm} ; AC = 7 \text{ cm} ; AD = 6 \text{ cm} ; AE = 8,4 \text{ cm}$   
 Démontrer que  $(BD) \parallel (CE)$ .

## 3. Type construction.

La construction consiste à diviser un segment en plusieurs segments. A partir d'un segment déjà tracé, on partage celui-ci en plusieurs segments de longueurs égales.

Cet article est consacré à l'analyse des tâches pour le calcul d'une longueur. Les deux autres types de problème (démonstration et construction) font appel à des opérations de pensée différentes, qui constituent d'autres directions de recherche déjà abordées par quelques auteurs, comme Duval (1988, 1991) pour la démonstration et Chevallard, Jullien (1990) pour la construction.

La première partie de cet article est consacrée à l'analyse des tâches d'un point de vue mathématique. Cette analyse permet d'identifier les différentes variables didactiques et ainsi, d'obtenir une classification des problèmes. Mais, cette analyse ne considère pas les conduites des sujets. Aussi, elle n'est intéressante pour un enseignant que si elle est accompagnée d'une analyse des tâches cognitives (seconde partie de l'article). Cette analyse s'inscrit dans le cadre théorique des champs conceptuels de Vergnaud.

« C'est une théorie psychologique du concept, ou mieux encore, de la conceptualisation du réel : elle permet de repérer les filiations et les ruptures entre connaissances du point de vue de leur contenu conceptuel ; elle permet également d'analyser la relation entre les concepts comme connaissances explicites, et les invariants opératoires qui sont implicites dans les conduites des sujets en situation,

ainsi que d'approfondir l'analyse des relations entre signifiés et signifiants.» (Vergnaud, 1990)

L'analyse des tâches d'un point de vue mathématique accompagnée d'une analyse des tâches cognitives permet de comprendre les différents processus de conceptualisation des élèves ; compréhension indispensable en vue d'un enseignement.

## I. Analyse mathématique

### 1. Analyse des programmes

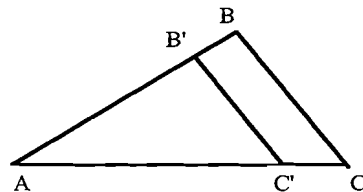
Depuis 1985, l'énoncé de Thalès est enseigné en troisième. Il concerne la proportionnalité des côtés d'un triangle coupé par une parallèle à l'un de ses côtés.

« Connaître et utiliser, dans une situation donnée, le théorème de Thalès relatif au triangle  $\frac{AB'}{AB} = \frac{AC'}{AC}$ , B' est sur la droite (AB), C' est sur la droite (AC), et sa réciproque. Connaître et utiliser dans la même situation la propriété  $\frac{AB'}{AB} = \frac{AC'}{AC} = \frac{B'C'}{BC}$ . » (instructions 1985).

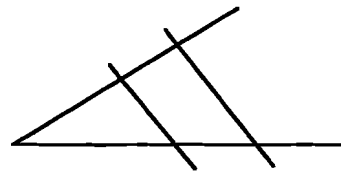
Ce programme limite l'étude du théorème de Thalès au triangle, ce qui ne fut pas toujours le cas dans les programmes des années précédentes. En effet, le théorème de Thalès a pris diverses formes selon les époques. L'analyse des programmes de géométrie, de 4<sup>ème</sup> et 3<sup>ème</sup>, de 1905 à nos jours, montre que *les figures et la proportionnalité associées au théorème ont varié.*

Trois types de figures sont principalement concernés :

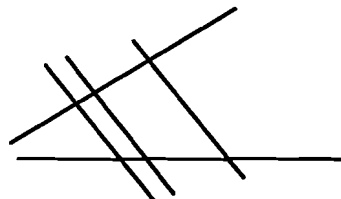
- un triangle coupé par une parallèle à l'un de ses côtés.



- deux droites sécantes coupées par des parallèles, le point d'intersection de ces droites sécantes étant visible sur la figure.



- deux droites sécantes coupées par des parallèles, le point d'intersection de ces droites sécantes n'étant pas visible sur la figure.



(Trois parallèles sont nécessairement tracées, contrairement aux deux figures précédentes où deux parallèles suffisent)

La proportionnalité concerne deux types de mesures :

- les longueurs des deux droites sécantes. (les longueurs des segments parallèles n'interviennent pas)
- les longueurs des trois côtés des triangles.

À partir de cette brève analyse des programmes, une première distinction entre les situations apparaît.

## 2. Analyse des réussites aux différentes situations

Plusieurs recherches (Cordier et Cordier (1991), Lemonidis (1991), évaluation du programme de 3ème par l'APMEP1990)) confirment et affinent ces distinctions. Ces auteurs étudient les variations entre les taux de réussite selon les situations proposées. Les différents types de figure et les deux sortes de proportionnalité, relevés lors de l'analyse des programmes, se différencient aussi au niveau des taux de réussite. De plus, un autre type de figure se distingue de ceux cités préalablement. Le placement des parallèles par rapport au point d'intersection des sécantes apparaît comme un facteur très important dans le taux de réussite. La figure comportant les parallèles du même côté du point d'intersection des sécantes est plus facile à résoudre que celle ayant les parallèles de chaque côté du point d'intersection. Les auteurs, cités précédemment, s'accordent pour reconnaître que la situation présentant le moins de difficultés est celle portant sur le calcul d'une longueur sur une sécante lorsque les deux parallèles sont situées du même côté du point d'intersection des sécantes.

La situation, la plus difficile à résoudre, est celle portant sur le calcul d'une longueur sur une des deux parallèles lorsque celles-ci sont de part et d'autre du point d'intersection des sécantes.

## 3. Analyse des procédures de résolution

Pour chaque situation, une analyse mathématique permet d'identifier les différentes procédures de résolution possibles.

Dans " Suivi Scientifique Inter IREM " (1988-89), l'IREM de Poitiers retrace les différentes présentations possibles du théorème suivant la fonction considérée. L'énoncé de Thalès peut être lié soit à la projection, soit à l'homothétie, soit aux deux fonctions. Les auteurs étudient les avantages et les inconvénients de chacune des deux fonctions selon la figure considérée.

La projection est difficilement maîtrisée lorsque les parallèles sont de chaque côté du point d'intersection des deux sécantes.

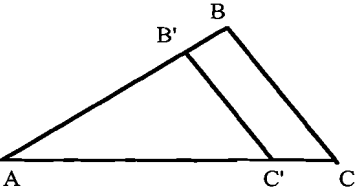
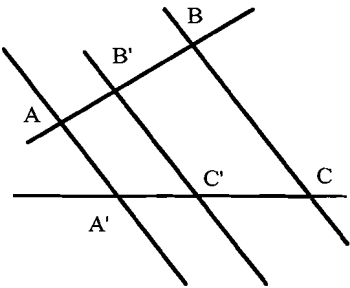
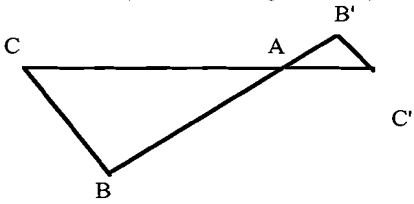
L'homothétie fait intervenir les trois côtés des deux triangles. Selon les auteurs de l'article, elle est autant reconnaissable sur un dessin où les parallèles sont du même côté du point d'intersection des deux sécantes que sur un dessin " croisé ". Par contre, le rapport des longueurs des côtés entre les parallèles ( $\frac{B'B}{C'C}$ ) n'intervient pas directement.

Par conséquent, d'après les constatations faites par l'IREM de Poitiers résumées précédemment, *une fonction peut s'avérer plus adéquate que l'autre, suivant la figure proposée et le calcul demandé.*

Néanmoins, les deux fonctions peuvent s'appliquer à tous les cas. Par exemple, pour un triangle muni d'une parallèle à l'un de ses côtés, cette parallèle se trouvant à l'intérieur du triangle, le calcul d'une longueur d'un des deux segments parallèles peut s'obtenir directement avec l'homothétie, mais un raisonnement basé sur les projections peut aussi permettre de calculer cette longueur. Toutefois, cette procédure nécessite plusieurs étapes de calcul et, par conséquent, elle s'avère plus compliquée que celle basée sur l'homothétie, ne serait-ce qu'au niveau du temps de résolution.

La fonction la plus économique pour traiter une situation dépend de la figure proposée et du calcul demandé. L'étude des différents cas possibles permet d'aboutir à une classification des problèmes résumée dans le tableau suivant.

TABLEAU 1  
Classification des problèmes

Type de figures	Type de calculs
<p>Cas T (comme triangle)</p> 	<p><i>Calcul d'un des côtés non parallèles :</i>  <math>p : AB' \rightarrow AC'</math>  <math>AB \rightarrow AC</math>  <math>h : AB' \rightarrow AB</math>  <math>AC' \rightarrow AC</math></p> <p><i>Calcul d'une longueur entre deux parallèles :</i>  <math>p : AB' \rightarrow AC'</math>  <math>B'B \rightarrow C'C</math>  L'homothétie ne relie pas directement B'B et C'C.</p> <p><i>Calcul d'un des côtés parallèles :</i>  La projection ne relie pas directement B'C' et BC.  <math>h : AB' \rightarrow AB</math>  <math>B'C' \rightarrow BC</math></p>
<p>Cas P (comme parallèle)</p> 	<p><i>Calcul d'un des côtés non parallèles :</i>  <math>p : AB' \rightarrow A'C'</math>  <math>B'B \rightarrow C'C</math>  L'homothétie ne relie pas directement les longueurs des deux sécantes.</p> <p><i>Calcul d'un des côtés parallèles :</i>  La projection et l'homothétie ne permettent pas de trouver directement la longueur d'un des côtés parallèles.</p>
<p>Cas TC (comme triangle croisé)</p> 	<p><i>Calcul d'un des côtés non parallèles :</i>  <math>p : AB' \rightarrow AC'</math>  <math>AB \rightarrow AC</math>  <math>h : AB' \rightarrow AB</math>  <math>AC' \rightarrow AC</math></p> <p><i>Calcul d'un des côtés parallèles :</i>  La projection ne relie pas directement B'C' et BC.  <math>h : AB' \rightarrow AB</math>  <math>B'C' \rightarrow BC</math></p>

La classification des problèmes distingue sept situations. D'autres situations pourraient être ajoutées en tenant compte du nombre de parallèles dans le triangle (2 ou 3 ou plus) ou de la question posée (longueur du petit ou du grand triangle). Cette classification n'est pas exhaustive mais elle montre que le calcul d'une longueur ne se résume pas à un seul type de problème. Différentes situations ont été identifiées grâce à une analyse mathématique, mais cette analyse mathématique ne conduit pas à la modélisation des opérations de pensée permettant de résoudre les situations. Par conséquent, cette classification ne peut pas être très utile aux enseignants si elle n'est pas accompagnée d'une analyse des tâches cognitives.

## II. Analyse des tâches cognitives

L'analyse des tâches cognitives complète l'analyse mathématique en mettant en évidence les invariants opératoires impliqués dans chaque situation. Les invariants opératoires sont les éléments cognitifs qui permettent à l'action du sujet d'être opératoire. Les théorèmes-en-acte et les concepts-en-acte sont des invariants opératoires.

« L'expression d'invariant opératoire permet d'une part de mettre en évidence le fait que se constitue en objet logique stable (invariant) pour le sujet une classe de phénomènes soumis auparavant à variation, d'autre part que le critère de l'acquisition d'un invariant est l'action (opératoire) ou les réponses du sujet en situation » (Vergnaud, Halbwegs, Rouchier, 1978).

La mise en évidence des différents invariants opératoires impliqués dans chaque situation permet de repérer les filiations et les ruptures conceptuelles entre ces situations. L'analyse des conduites des élèves face à ces situations permet de distinguer certains invariants opératoires. Cet article n'a pas pour but d'inventorier tous les invariants opératoires impliqués dans le calcul d'une longueur pour une configuration de Thalès, mais il a pour objectif de clarifier en quoi l'analyse des tâches peut être utile aux enseignants. Aussi, toutes les situations ne sont pas étudiées.

Cet article se limite à l'analyse de la situation portant sur le calcul d'une longueur d'un des côtés non parallèles. Quatre exercices ont été proposés à quarante élèves (vingt élèves de seconde professionnelle (première année de BEP), vingt élèves de quatrième technologique), lors d'un entretien individuel. Au contraire des élèves de quatrième, les élèves de seconde professionnelle ont déjà reçu un apprentissage sur le théorème de Thalès dans une classe antérieure, mais un seul d'entre eux se souvient de la formule "égalité de rapports". Par conséquent, ces élèves, comme ceux de quatrième technologique, cherchent une stratégie de résolution sans utiliser un algorithme pré établi.

Les exercices se différencient soit par la figure, soit par les valeurs des longueurs. Les trois premiers exercices comportent des valeurs simples pour lesquelles les opérateurs sont égaux à 2. La figure de l'exercice 1 comporte deux sécantes dont le point d'intersection n'est pas visible et trois droites parallèles (on l'appellera figure P comme

parallèle). La figure de l'exercice 2, appelée figure T comme triangle, consiste en un triangle coupé par une parallèle à l'un de ses côtés. La figure de l'exercice 3, appelée figure TC comme triangle croisé, comporte deux triangles situés de chaque côté du point d'intersection des sécantes. L'exercice 4 reprend la figure P proposée à l'exercice 1, mais les valeurs numériques sont modifiées. Les coefficients multiplicateurs ne sont plus égaux à 2. Le tableau suivant résume les exercices proposés et les résultats.

TABLEAU 2  
Exercices proposés et résultats

Ex. 1	Ex. 2	Ex. 3	Ex. 4
24 réussites (16 BEP, 8 4ème T)	9 réussites (5 BEP, 4 4ème T)	14 réussites (10 BEP, 4 4ème T)	3 réussites (3 BEP, 0 4ème T)
16 échecs	31 échecs	26 échecs	37 échecs

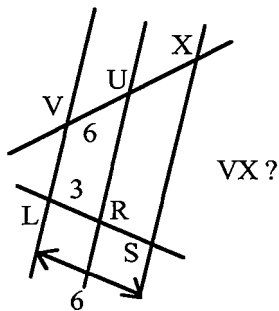
Ici, les dessins sont réduits, mais, sur les figures proposées aux élèves, les valeurs numériques correspondent véritablement aux longueurs des segments en centimètres. De plus, sur chaque feuille, le parallélisme des droites est précisé. Le fait que les figures proposées soient en vraie grandeur peut permettre aux élèves de s'aider d'une estimation visuelle pour trouver la réponse. Mais, lorsqu'un élève propose un résultat, l'expérimentateur demande toujours une justification de ce résultat. Les quelques réponses basées uniquement sur l'estimation visuelle des longueurs et non justifiées autrement sont classées dans les échecs.

Les résultats peuvent paraître surprenants tellement le nombre de réussites est faible (3 réussites sur 40 pour l'exercice 4). Mais, contrairement à un exercice proposé en cours de mathématiques, ici, les élèves n'ont aucune aide, pas de voisin et aucune référence à un cours précédent. Les réponses ne reflètent que leurs connaissances mobilisables pour la résolution d'un problème faisant appel au théorème de Thalès. De plus, les élèves ayant participé à l'expérimentation sont des élèves de seconde professionnelle ou de quatrième technologique. Ces élèves ont souvent des difficultés en mathématiques. Le choix de ces élèves permet d'obtenir des différences entre les réussites selon l'exercice proposé et, ainsi, d'analyser les problèmes de conceptualisation. En effet, ceux-ci auraient été difficilement repérables s'il n'y avait eu que des réussites.

Les échecs sont, la plupart du temps, dus à des absences de réponses et non à des erreurs. Très souvent, lorsque les élèves proposent une solution justifiée, celle-ci est exacte.

Pour comprendre les différences de réussite entre les exercices, il est nécessaire de repérer les stratégies utilisées par les élèves.

• **Exercice 1**



Onze élèves sur vingt-quatre, qui réussissent l'exercice 1, ne calculent pas la longueur VX directement, mais déterminent UX auparavant. Ils utilisent le fait que les longueurs des segments sur une droite sont égales, donc que les longueurs des segments sur l'autre droite coupée par les parallèles seront égales. Bien que le terme projection ne soit pas employé par les élèves, leur procédure se base implicitement sur la conservation de l'égalité des longueurs par la projection :

$$l([LR]) = l([RS]) \quad l(p[LR]) = l(p[RS]).$$

En reprenant les termes de Vergnaud (1987), *la fonction géométrique projection et la conservation de l'égalité des longueurs apparaissent, ici, respectivement comme un concept-en-acte et un théorème-en-acte*. Les stratégies employées par les élèves confirment la distinction relevée par Cortes (1995) entre *le concept-en-acte de fonction mathématique et le concept-en-acte de fonction numérique*, celui-ci impliquant l'identification d'une relation numérique entre les deux ensembles de nombres. La fonction mathématique, quant à elle, se limite à la correspondance entre deux ensembles de mesures avec le respect de la contrainte : « une seule image ».

La prise en compte de la fonction numérique projection n'est pas nécessaire pour résoudre l'exercice 1. Néanmoins, certains élèves emploient des procédures basées sur la fonction numérique projection, c'est à dire utilisant une relation numérique entre deux ensembles de nombres. Ceci leur permet de calculer la longueur VX directement, au contraire de la procédure basée sur la fonction géométrique projection qui nécessite le calcul de UX préalablement. Quatre élèves constatent que LS est le double de LR et en déduisent que VX est le double de VU. Ils associent les longueurs des segments d'une droite à celles des segments de l'autre droite puis ils déterminent l'opérateur scalaire.

$$\begin{cases} LR(3) \rightarrow VU(6) \\ \times 2 \\ LS(6) \rightarrow VX(?) \end{cases}$$

Cette procédure repose implicitement sur la propriété des fonctions linéaires :  $f(n.x) = n.f(x)$ . Ici, la fonction considérée est la fonction numérique projection.

D'autres élèves déterminent l'opérateur fonction de la projection. Ils constatent que VU (la projection de LR) est le double de LR et en déduisent que VX (la projection de LS) est le double de LS. L'expression algébrique de la fonction numérique,  $p(x) = a.x$ , n'est pas écrite mais le calcul de a, l'opérateur fonction, est, explicitement la traduction de la

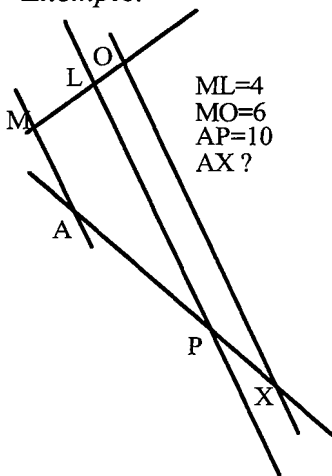


linéarité de la fonction numérique projection, alors que celle-ci est implicite lorsque la propriété  $p(n.x) = n.p(x)$  est employée, c'est à dire lors du calcul de l'opérateur scalaire.

#### •Exercice 4

A l'exercice 1, la découverte d'un des opérateurs (fonction ou scalaire) est facilitée du fait de la valeur de ceux-ci, à savoir 2. Cette procédure ne se transfère pas automatiquement à un cas où les opérateurs sont différents de 2, puisque la modification des opérateurs (exercice 4) entraîne un échec considérable (37 échecs sur 40). Certains élèves ne découvrent plus de relation numérique entre les deux ensembles de nombres. D'autres recherchent toujours une relation numérique mais sans conserver la linéarité de la fonction numérique.

*Exemple.*



DOS : « LO, ça fait 2 cm, donc... AX 16 cm.

Expérimentateur : Pourquoi ?

DOS : ML, ça fait 4 cm. AP 10... a fait le double de ML plus 2 cm. LO 2 cm. PX c'est le double de LO plus 2 cm. PX 6 cm. »

DOS identifie la fonction numérique projection mais il la définit avec une fonction affine :

$p(x) = 2x + 2$ . A l'exercice 1, il considérait la projection en tant que fonction linéaire :

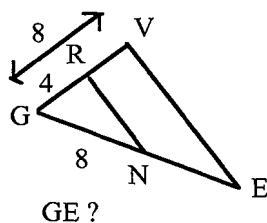
$p(x) = 2x$ . Il conserve l'opérateur 2 et, pour cela, transforme la fonction linéaire en fonction affine.

La linéarité de la fonction numérique projection n'est pas conservée.

*Cet invariant opératoire se construit à partir de plusieurs étapes successives :*

- Identification de la fonction géométrique projection
- Identification de la fonction numérique projection. Cette identification sous-entend la reconnaissance d'un processus opératoire liant les deux ensembles de nombres.
- Identification de la linéarité de la fonction numérique.

#### • Exercice 2



L'exercice 2 reprend la situation proposée pour le cas P, mais ici, les deux fonctions, homothétie ou projection, sont utilisables.

La différence entre les cas P et T est notable puisque vingt-quatre élèves (quinze BEP, huit 4ème T) réussissent l'exercice 1 contre neuf seulement (cinq BEP, quatre 4ème T) l'exercice 2.

*Le faible nombre de réussites montre que la projection est moins identifiable sur un dessin T que sur un dessin P. Plusieurs auteurs comme Duval (1988), Mesquita (1989) ou Padilla (1990) ont montré que certains détails visuels influencent la lecture géométrique*

du dessin. Par exemple, le fait de prolonger ou non des droites peut modifier la perception de celui-ci. D'après les résultats de Mesquita (op. cit.), le dessin de l'exercice 1, où les droites parallèles sont prolongées après leurs points d'intersection avec les sécantes, facilite la vision des parallèles. Par contre, le dessin de l'exercice 2, où les parallèles s'arrêtent aux points d'intersection, favorise l'appréhension du triangle au détriment des parallèles, ce qui peut diminuer la reconnaissance de la fonction géométrique projection.

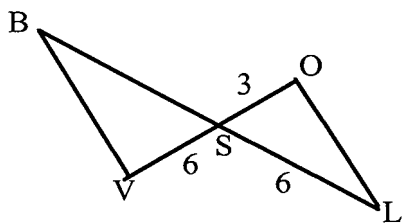
De plus, sur un dessin P, trois parallèles sont tracées donnant trois points distincts de leurs projections. Sur un dessin T, l'un des points est confondu avec sa projection. C'est un sommet du triangle. La parallèle passant par ce point n'est pas tracée. La fonction géométrique projection est, par conséquent, moins facilement identifiée à l'exercice 2 qu'à l'exercice 1.

La vision du triangle devrait favoriser l'emploi de l'homothétie. Pourtant, les bonnes réponses sont plutôt basées sur la projection. La non utilisation de l'homothétie dans ce cas où l'un des triangles est le double de l'autre paraît surprenant. En effet, Audibert (1982) constate que les élèves, dès la sixième, utilisent le processus de proportion double quand il s'agit d'agrandir un triangle. Piaget et Inhelder (1942) s'orientent vers onze ans l'âge où la proportion pour "le triangle doublé" est assimilée. Les résultats à l'exercice 2 semblent contradictoires avec ces constatations.

En fait, ici, contrairement aux situations de Audibert et de Piaget et Inhelder, *l'expérimentateur ne parle pas explicitement d'agrandissement de triangle*. Les sujets doivent reconnaître la situation comme découlant d'un agrandissement de triangle. Or, la majorité des élèves à qui j'ai demandé de décrire le dessin, ne distingue qu'un triangle avec un trait. Le deuxième triangle n'est pas perçu.

Le cas T s'avère beaucoup plus compliqué que le cas P puisque aucune fonction n'est facilement identifiable. La projection est plus difficilement perçue que dans le cas P parce qu'il n'y a que deux parallèles au lieu de trois et qu'elles s'arrêtent aux intersections. L'homothétie n'est identifiable que si le dessin apparaît comme étant composé de deux triangles, l'un « emboîté » dans l'autre.

### • Exercice 3



SB ?

Cet exercice reprend la situation de l'exercice 2, mais les parallèles sont situées de part et d'autre du point d'intersection des sécantes.

Le nombre de réussites à cet exercice est inférieur à celui concernant la situation P (exercice 1), mais il est supérieur à celui concernant la situation T (exercice 2).

Quatorze élèves (10 BEP, 4 4ème T) trouvent la bonne réponse contre neuf à l'exercice 2 portant sur le même type de calcul pour un dessin T. Ici, les deux triangles sont distincts, ce qui n'est pas le cas pour un triangle avec une parallèle où les deux triangles sont emboîtés. *Le fait que les deux triangles soient distincts facilite la prise en compte de l'homothétie*. D'ailleurs, toutes les procédures de réussite sont basées sur la fonction homothétie et non sur la projection. Mais, l'identification de l'homothétie en tant que fonction géométrique ne suffit pas, la fonction numérique doit être reconnue.

J'ai posé des questions à certains élèves sur la comparaison des angles des triangles pour savoir si la prise en compte de la fonction géométrique homothétie peut favoriser la reconnaissance de la fonction numérique. La plupart d'entre eux trouvent l'égalité des angles entre les deux triangles. Ils en déduisent la similitude des triangles lorsque je leur demande de comparer les triangles, mais ils n'établissent pas de processus opératoire entre les deux ensembles de nombres.

*Exemple.*

Expérimentateur : « Compare les angles.

COS : C'est les mêmes.

- Lesquels ?

- B et L, et V et O aussi, et c'est tout.

- Compare les triangles maintenant.

- Ils sont à peu près les mêmes, sauf qu'il est plus grand celui-là que celui-là. C'est tout ce que je peux dire. On dirait que celui-là, s'il y a la symétrie qui est comme ça, on le voit en profondeur, en optique quoi... Il y en a un qui est représenté à l'envers. C'est tout ce que je peux dire.

- Et alors, tu ne peux pas trouver SB ?

- Non. »

COS reconnaît la fonction géométrique homothétie, mais il ne considère pas une correspondance numérique entre deux ensembles de nombres.

La réussite à cet exercice nécessite la découverte de la relation numérique, qui est, ici, facilitée par le fait que les opérateurs (scalaire et fonction) soient 2. La réussite à cet exercice ne prouve pas que la linéarité de la fonction numérique soit établie de manière générale.

Un élève de BEP qui employait le théorème de Thalès sous forme d'égalité de rapports pour les exercices précédents, l'abandonne à cet exercice. « Oui. Théorème de Thalès. Non... Non, je ne trouve pas. Parce qu'on ne peut pas utiliser le théorème de Thalès. Parce que les deux droites parallèles ne sont pas du même côté. » Cet élève sait appliquer la formule égalité de rapports, apprise au collège, pour les cas P et T. C'est le seul élève qui réussit avec ce souvenir de formule. Un autre élève de BEP essaie d'utiliser une égalité de rapports à l'exercice 1, mais il abandonne, ne se souvenant plus de l'ordre dans lequel les longueurs interviennent dans l'égalité.

## Conclusion

Le théorème de Thalès regroupe plusieurs situations, chacune d'elles permettant plusieurs procédures de résolution. Toutes ces procédures peuvent se résumer grâce à une égalité de rapports valable pour toutes les situations. Cela justifierait l'apprentissage du théorème sous forme d'égalité de rapports comme l'enseignement le fait actuellement. Cet apprentissage de formule correspondrait à un apprentissage d'algorithme. Après avoir rappelé la définition d'un algorithme, « un algorithme est un ensemble de règles qui permet, en un nombre fini de pas, de trouver la solution d'un problème quelconque de cette classe s'il en a une ou sinon de montrer qu'il n'en a pas », Vergnaud (1990) précise

cette classe s'il en a une ou sinon de montrer qu'il n'en a pas », Vergnaud (1990) précise qu'il n'y a pas d'algorithme sans conceptualisation et sans relations entre la conceptualisation et l'algorithme.

Le résumé du théorème de Thalès par une formule égalité de rapports ne peut intervenir qu'après une prise en compte des différents concepts entrant en jeu, dont certains ont été identifiés par l'analyse des tâches cognitives.

L'analyse des tâches mathématiques a permis de distinguer plusieurs situations selon le type de figures et selon le calcul demandé. L'analyse des tâches cognitives a rendu cette classification opératoire en mettant en évidence certains concepts-en-acte et théorèmes-en-acte auxquels les situations font appel.

En analysant les manuels scolaires actuels, il apparaît que la plupart du temps le théorème de Thalès est établi à l'aide d'une formule rarement reliée explicitement à une proportionnalité. Cette formule d'égalité de rapports concerne souvent les trois côtés des triangles et, par conséquent, sous-entend la linéarité de la fonction numérique homothétique. Or, la fonction considérée, implicitement ou explicitement, est majoritairement la fonction projection. De plus, la formule est établie sur le seul cas T puis étendue au cas où les triangles sont distincts. Or, l'analyse des tâches cognitives a montré que les deux figures ne font pas appel aux mêmes opérations de pensée. Ces amalgames entre les deux fonctions et entre les différentes figures rendent la formule peu opératoire. Elle est rarement mémorisée ou mémorisée que sur un cas limité. Il y a un décalage important entre les concepts véhiculés par l'enseignement et ceux utilisés par les élèves, qui sont, la plupart du temps, des concepts-en-acte. Ces derniers ont pu être mis en évidence grâce à l'analyse des tâches cognitives.

## Bibliographie

APMEP (1990) Evaluation du programme de troisième. *Bulletin de l'APMEP*.

AUDIBERT G. (1982) *Démarches de pensée et concepts utilisés par les élèves de l'enseignement secondaire en géométrie euclidienne plane*. Thèse d'Etat. Université Sciences et Techniques de Montpellier.

CHEVALLARD Y., JULLIEN M. (1990) Autour de l'enseignement de la géométrie au collège. Première partie. *Petit x*. n° 27.

CORDIER F. et J. (1991) L'application du théorème de Thalès. Un exemple du rôle des représentations typiques comme biais cognitifs. *Recherches en didactiques des mathématiques*. Vol. 11.1.

CORTES A. (1995) Word problems : Operational invariants in the putting into equation process. *Proceedings of the nineteenth PME conference*. Recife. Brasil.

DUVAL R. (1988) Approche cognitive des problèmes de géométrie en termes de congruence. *Annales de Didactique et de Sciences Cognitives*. Vol. 1.

DUVAL R. (1991) Structure du raisonnement déductif et apprentissage de la démonstration. *Educational Studies in Mathematic*. N° 22.

LEMONIDIS C. (1991) Analyse et réalisation d'une expérience d'enseignement de l'homothétie. *Recherches en didactiques des mathématiques*. Vol. 11. 2.3.

MESQUITA A. (1989) *L'influence des aspects figuratifs dans l'argumentation des élèves en géométrie*. Thèse de l'Université de Strasbourg.

PADILLA V. (1990) Les figures aident-elles à voir en géométrie ? *Annales de Didactique et de Sciences Cognitives*. Vol. 2.

PIAGET J., INHELDER B. (1942) *Représentation de l'espace chez l'enfant*. 4ème édition. 1981. PUF.

VERGNAUD G. (1987) Les fonctions de l'action et de la symbolisation dans la formation des connaissances chez l'enfant. *Psychologie*. Encyclopédie la Pléiade. Gallimard.

VERGNAUD G. (1990) La théorie des champs conceptuels. *Recherches en didactiques des mathématiques*. Vol. 10. 2.3.

VERGNAUD G., HALBWACHS F., ROUCHIER A. (1978) Structure de la matière enseignée, histoire des sciences et développement conceptuel chez l'élève. *Revue française de pédagogie*. n° 45.