MUSÉE

Nous reproduisons dans ce musée un extrait du célèbre dictionnaire pédagogique publié, sous la direction de Ferdinand Buisson, au moment des lois Jules Ferry sur l'école obligatoire. Cet ouvrage en quatre volumes était destiné aux instituteurs. Une première partie avait l'ambition d'être "un vaste traité de pédagogie théorique" et la deuxième partie "un cours complet d'instruction primaire à l'usage de maîtres".

Nous avons choisi de présenter ici un article de la deuxième partie du dictionnaire. On peut voir qu'à l'époque on n'hésite pas à suggérer une initiation à l'algèbre dès l'école primaire, le passage à l'algèbre s'appuyant "naturellement" sur les pratiques de l'arithmétique élémentaire.

DICTIONNAIRE

DE PÉDAGOGIE

D'INSTRUCTION PRIMAIRE

PUBLIÉ SOUS LA DIRECTION DE

F. BUISSON

agrégé de l'Université
inspecteur général de l'enseignement primaire

AVEC LE CONCOURS D'UN GRAND NOMBRE DE COLLABORATEURS

MEMBRES DE L'INSTITUT, PUBLICISTES,
FONCTIONNAIRES DE L'INSTRUCTION PUBLIQUE, INSPECTEURS, PROFESSEURS
ET INSTITUTEURS DE FRANCE ET DE L'ÉTRANGER

II[e] PARTIE

TOME SECOND

PARIS
LIBRAIRIE HACHETTE ET C[ie]
79, BOULEVARD SAINT-GERMAIN, 79

1882

CALCUL ALGÉBRIQUE, APPLIQUÉ AUX PROBLÈMES D'ARITHMÉTIQUE ET DE GÉOMÉTRIE DE L'ENSEIGNEMENT PRIMAIRE. — Nous n'avons point à refaire ici le cours d'algèbre élémentaire à l'usage des écoles normales et supérieures, dont le plan et les développements essentiels sont résumés dans ce dictionnaire même avec une si grande autorité. — (V. *Algèbre* et *Equations*.)

Mais nous croyons devoir indiquer plus particulièrement les procédés pratiques par lesquels, même dans l'école primaire proprement dite ; et à plus forte raison dans les classes pour les adultes un peu avancés, dans les cours complémentaires, tels que ceux du volontariat, et dans la préparation pour l'admission aux écoles primaires supérieures), on pourra, on devra amener les élèves de plain-pied sur le terrain de l'algèbre et leur faire résoudre des problèmes par des équations sans leur laisser soupçonner qu'ils font autre chose que de l'arithmétique.

Nous supposons des élèves qui ne connaissent encore aucun des termes de la langue algébrique, et nous allons voir comment peu à peu et sans passer par l'ensemble de l'enseignement méthodique qui est nécessaire au maître, on peut leur apprendre chemin faisant et les mots techniques et les règles dont ils auront à se servir.

Problème 1. — Nous prenons pour exemple un problème d'arithmétique comme en fait tous les jours un élève d'école primaire, un problème quelconque d'intérêt simple. L'élève sait la règle :

Pour trouver l'intérêt d'un capital, il faut multiplier le capital par le taux et par le nombre de jours et diviser le produit par 36 000.

Demandons-lui s'il n'y aurait pas moyen d'écrire en abrégé cette longue phrase. Les mots *multiplier*, *diviser*, etc., peuvent être remplacés par les signes qui lui sont familiers $\times$, :, etc. Chacune des quantités qu'il doit passer en revue ne pourrait-elle pas aussi être désignée abréviativement par la lettre initiale de son nom : l'intérêt par i, le capital par c, le taux par t, le nombre de jours par n? La règle précédente peut donc se présenter ainsi :

$$i=\frac{c\times t\times n}{36000}.$$

Cette expression aussi claire que concise est appelée *formule*; elle montre en même temps ce que c'est qu'une *égalité*. On indique à ce moment les dénominations de *premier membre* et de *second membre* données aux deux parties qui constituent l'égalité.

Maintenant sera-t-il besoin d'arrêter les élèves pour leur faire, avant de passer outre, l'exposé complet et théorique des propriétés d'une égalité ? Non, car ils les connaissent déjà implicitement par l'arithmétique ; ils les appliqueront pour ainsi dire par intuition au fur et à mesure qu'elles vont se présenter : on va le voir.

Dans l'égalité

$$i=\frac{c\times t\times n}{36\,000},$$

qu'arriverait-il si nous supprimions le dénominateur du second membre ? Tous les élèves le diront aussitôt : ce second membre serait multiplié par 36 000. Par conséquent que faut-il faire pour rétablir l'égalité ? Multiplier aussi le premier nombre par 36 000. Voilà la nouvelle égalité trouvée :

$$36\,000\ i=c\times t\times n$$

Ce qui signifie : *le produit du capital par le taux et par le nombre de jours est égal à 36 000 fois l'intérêt.*

A cette occasion on apprend aux élèves que lorsque les facteurs d'un produit sont représentés par des lettres, on peut supprimer le signe $\times$ entre eux, et écrire ctn au lieu de $c\times t\times n$. Ils acquièrent ainsi la règle dite *règle des lettres* de la multiplication.

Ils ont tout à l'heure affirmé sans hésiter qu'*on peut multiplier les deux membres d'une égalité par un même nombre sans altérer l'égalité*. Ils ne seront pas plus embarrassés pour reconnaître qu'on peut pareillement les *diviser par un même nombre sans altérer l'égalité*. Grâce à cette propriété, nous allons pouvoir dégager et énoncer à part la valeur de chacune des trois quantités en divisant successivement les deux membres de l'égalité c, t, n, par tn,

$$ctn=36\,000\ i,$$

puis par cn et par ct. La suppression des lettres qui figurent à la fois au numérateur et au dénominateur n'a rien qui les surprenne ; ils entendent bien que $\frac{ctn}{tn}=c$. Donc nous obtenons les trois égalités :

$$c=\frac{36000\ i}{tn},$$

$$t=\frac{36\,000\ i}{cn},$$

$$n=\frac{36\,000\ i}{ct}.$$

En traduisant ces formules en langage ordinaire, les élèves y trouvent les règles à suivre pour connaître, sans répéter de longs raisonnements, le capital, ou le taux, ou le nombre de jours dans tous les problèmes d'intérêt simple.

A ce moment on dit aux élèves qu'on appelle *équation* une égalité dans laquelle se trouvent une ou plusieurs lettres représentant des quantités inconnues ; que ces lettres sont ordinairement les dernières de l'alphabet, x, y, z ; que tirer la valeur de l'inconnue de l'équation où elle se trouve, c'est ce qu'on appelle résoudre une équation.

On les exercera à regarder une équation comme l'énoncé d'un problème écrit en langue algébrique, à le traduire en langage vulgaire. Par exemple l'équation

$$3x-2=2x+3$$

signifie : trouver un nombre tel que son triple diminué de 2 soit égal à son double augmenté de 3.

Ces deux autres équations

$$3y-7x=4,$$
$$2y+5x=22,$$

se traduiront ainsi : trouver deux nombres tels que l'excès du triple du premier sur 7 fois le second soit égal à 4 et que le double du premier augmenté du quintuple du second soit égal à 22.

Réciproquement on les habituera à écrire sous forme d'équation l'énoncé d'un problème, en s'attachant d'abord aux questions les plus faciles.

A ce principe fondamental : *on peut multiplier ou diviser les deux membres d'une égalité ou d'une équation sans altérer l'égalité*, on joindra avant d'aller plus loin cet autre principe aussi évident que le premier : *on peut augmenter ou diminuer d'une même quantité les deux membres d'une égalité ou d'une équation sans altérer l'égalité des deux membres.*

On en fera l'application à la résolution d'une équation simple comme l'équation ci-dessus :

$$3x-2=2x+3.$$

Supprimant les $2x$ au deuxième membre pour que l'inconnue x ne se trouve qu'au premier, on devra diminuer ce premier membre aussi de $2x$, ce qui donne

$$3x-2x-2=3.$$

Puis, pour faire disparaître le terme connu -2 qui est au premier membre, il suffit d'augmenter ce premier membre de 2 ; car alors $2-2$ se détruisent ; on augmentera aussi le deuxième membre de 2 et on a alors

$$3x - 2x = 2 + 2.$$

On déduit de là la règle de la transposition des termes : *pour faire passer un terme d'un membre dans l'autre, on le supprime dans le membre où il est et on l'écrit dans l'autre avec un signe contraire, c'est-à-dire en lui donnant + quand il avait — et — quand il avait +.*

Du premier principe on déduit la règle par laquelle on peut chasser les dénominateurs d'une équation, ce qui rend les calculs plus faciles : *pour chasser les dénominateurs d'une équation, on réduit tous les termes, les termes entiers aussi bien que les termes fractionnaires, au même dénominateur, et on supprime ce dénominateur commun.*

Pour terminer la résolution, il n'y a plus qu'à opérer la réduction en un seul terme des nombres d'x qui sont dans un membre et celle des nombres connus qui sont dans l'autre et à tirer enfin la valeur de l'inconnue par une simple division.

Ce n'est pas le moment de parler du changement qui survient dans la nature de l'équation, quand la quantité par laquelle on multiplie les deux membres est l'inconnue elle-même ou une quantité qui contient l'inconnue.

Maintenant, pour mettre de la précision dans le langage, il importe qu'on sache bien que les *termes* sont les quantités séparées par les signes + ou —, et qu'on ait une idée nette de l'origine et de la nature du terme appelé *négatif*. C'est d'un problème familier qu'il convient de la déduire. On supposera, par exemple, qu'un homme n'ayant que 5 francs doive 8 francs ; ce qu'il possède à ce moment peut être représenté par 5 — 8. En donnant ses 5 francs, il n'a plus que zéro et une dette de 3 francs, et on lui ôtera ces 3 francs quand cela sera possible ; pour le moment on l'indique en écrivant 0 — 3 ou plus simplement — 3, puisque le zéro est ici tout à fait inutile. Le terme négatif — 3 représente donc le reste d'une soustraction dans laquelle le plus grand nombre devait être retranché du plus petit. *Dans ce cas on retranche le plus petit du plus grand, et on donne au reste le signe* —. Un terme négatif peut être regardé comme exprimant une dette, tandis que le terme positif exprime un avoir.

Nous pourrions suivre maintenant l'ordre méthodique du cours d'algèbre pour joindre à chaque partie de ce cours les applications du calcul algébrique qui s'y peuvent rapporter. Mais nous croyons faire mieux ressortir la portée de ces applications et la possibilité pour le maître d'en tirer les plus heureux effets, même pour des élèves étrangers à l'algèbre proprement dite, en donnant quelques exemples de problèmes dans lesquels, comme dans le précédent, le calcul algébrique abrège ou éclaircit singulièrement les opérations de l'arithmétique pure. — V. aussi dans le Dictionnaire, à la suite de l'article *Algèbre*, notre paragraphe sur la préparation aux examens.

Problème 1. — On veut faire de l'argent au titre de 0,835 en fondant ensemble de l'argent au titre de 0,9 et du cuivre. Combien faudra-t-il prendre d'argent au titre de 0,9 et de cuivre pour avoir 1 kilogramme d'argent au titre de 0,835? (Problème donné à Paris en 1877 aux *aspirantes; brevet supérieur*. — (V. Dictionnaire, p. 302.)

Soit x le nombre de grammes d'argent à 0,9. Le poids d'argent pur qu'il renferme est $x \times 0,9$. Le quotient de ce nombre divisé par le poids total 1000 grammes devant être le titre 0,835, on a l'équation :

$$\frac{x \times 0,9}{1000} = 0,835.$$

Multipliant les deux membres par 1 000, puis par 10, on trouve :

$$9x = 835,$$
$$x = \frac{8350}{9} = 927,777.$$

Le poids d'argent est donc $927^{gr},778$.

Celui du cuivre est $1000 - 927,778 = 72^{gr},222$.

Problème 2. — On partage une somme de 10.000 francs entre quatre personnes. La 1[re] aura 2 fois autant que la 2[e], moins 2 000 francs ; la 2[e] aura 3 fois autant que la 3[e], moins 3 000 francs ; la 3[e] aura 6 fois autant que la 4[e], moins 4 000 francs. Quelle est la part de chaque personne? — (Problème donné dans l'*Académie de Besançon*, 1878. — *Aspirantes ; brevet supérieur*). — Dict., p. 302.

Désignons par x le nombre de francs que doit avoir la 4[e] personne ; la part de la 3[e] sera $6x - 4000$.

La 2[e] aura $(6x - 4000) \times 3 - 3000$. Le produit de $6x - 4000$ par 3 doit être égal à 3 fois $6x$, moins 3 fois 4 000 ; car $6x$ devant d'abord être diminué de 4000, le produit $18x$ est trop fort de 3 fois 4 000 ou de 12000. On a donc pour la part de la 2[e] :

$$18x - 12000 - 3000$$

ou

$$18x - 15000.$$

La première aura

$$(18x - 15000) \times 2 - 2000$$

c'est-à-dire

$$36x - 30000 - 2000$$

ou

$$36x - 32000.$$

La somme des quatre parts devant être égale à 10000, on peut écrire :

$$x + 6x - 4000 + 18x - 15000 + 36x - 32000 = 10000.$$

Par la réduction on a

$$61x - 51000 = 10000,$$

puis

$$61x = 10000 + 51000,$$
$$61x = 61000,$$

d'où

$$x = \frac{61000}{61} = 1000.$$

La part de la 4[e] est donc de 1 000 francs.

On trouvera ensuite : pour la 3[e], 2 000 francs. — pour la 2[e], 3 000 francs. — pour la 1[re], 4 000 francs.

OBSERVATION. — Des explications données plus haut, il est bon de déduire la règle suivante : *pour multiplier par un nombre positif une quantité composée de plusieurs termes, on multiplie chaque terme du multiplicande, en lui conservant son signe, par le multiplicateur.*

Problème 3. — A quel moment, entre 2 heures et 3 heures, les deux aiguilles d'une montre sont-elles en ligne droite ?

(*Paris*, 1876. — *Aspirants ; brevet simple.*) — DICT., page 284.

Les deux aiguilles peuvent être : 1° l'une sur l'autre ; 2° l'une sur le prolongement de l'autre.

Premier cas. — Soit x le nombre des minutes du cadran qu'aura à parcourir la grande aiguille à partir de 2 heures, c'est-à-dire à partir du n° 12, pour atteindre la petite entre le n° 2 et le n° 3. Le nombre de minutes parcourues par cette dernière aiguille sera $x - 10$. Or, la vitesse de la grande aiguille étant 12 fois plus grande que celle de la petite, le nombre x de minutes que parcourt la première vaut 12 fois le nombre $x - 10$ de minutes parcourues dans le même temps par la seconde.

On peut donc écrire l'équation

$$x = (x - 10) \times 12.$$

En effectuant la multiplication, on trouve

$$x = 12x - 120,$$

puis $$120 = 11x,$$

d'où $$x = \frac{120}{11} = 10\,\frac{10}{11}$$

Les deux aiguilles sont donc l'une sur l'autre à $2^h\ 10^m \frac{10}{11}$.

Deuxième cas. — Désignons par x le nombre de minutes comprises entre le n° 12 et le point où la grande aiguille est sur le prolongement de la petite; le nombre des minutes parcourues dans le même temps par la petite est $x - 10 - 30$ ou $x - 40$. Comme dans le cas précédent, x vaut 12 fois $x - 40$, et on a l'équation

$$x = (x - 40) \times 12.$$

On trouve ensuite

$$x = 12x - 480,$$
$$480 = 11x,$$

$$x = \frac{480}{11} = 43\,\frac{7}{11}.$$

Ainsi, les deux aiguilles sont l'une sur le prolongement de l'autre à $4^h\ 43^m \frac{7}{11}$.

Problème 4. — Une personne place les $\frac{3}{4}$ d'un capital à 4,75 %, et le reste à 5,5 %; elle retire ainsi $493^{fr},75$ d'intérêt au bout de 72 jours. Quel est ce capital? — (Problème donné dans l'*Académie de Lyon*, 1876. — *Aspirants; brevet simple.* — Dict., page 286.)

Remarquons d'abord que 72 jours sont la 5e partie de l'année, et représentons par x le capital cherché : les $\frac{3}{4}$ de ce capital sont $\frac{3x}{4}$ et le reste est $\frac{x}{4}$.

D'après la règle ordinaire, l'intérêt de la 1re partie serait pour 1 an. . . . . $\frac{3x \times 4,75}{4 \times 100}$;

pour 72 jours il sera $\frac{3x \times 4,75}{4 \times 100 \times 5}$ ou $\frac{3x \times 4,75}{20\,000}$.

L'intérêt de la 2e partie serait pour 1 an. . . . . $\frac{x \times 5,50}{4 \times 100}$;

pour 72 jours. . . . $\frac{x \times 5,50}{4 \times 100 \times 5}$ ou $\frac{x \times 5,50}{20\,000}$.

La somme des deux intérêts étant $493^{fr},75$ on a l'équation

$$\frac{3x \times 4,75}{20\,000} + \frac{x \times 5,50}{20\,000} = 493,75.$$

Pour la résoudre, supprimons d'abord les virgules, ce qui revient à multiplier tous les termes par 100, et effectuons en même temps les multiplications indiquées dans les deux numérateurs; nous aurons

$$\frac{1425x}{20\,000} + \frac{550\,x}{20\,000} = 49\,375.$$

Multipliant ensuite les deux membres par 20 000, on obtient

$$1425x + 550x = 987\,500\,000,$$

puis $$1975x = 987\,500\,000$$

et $$x = \frac{987\,500\,000}{1975} = 50\,000.$$

Le capital demandé est 50 000 francs.

Problème 5. — Deux négociants ont chacun une facture : l'une de 980 francs, payable dans 20 jours l'autre de 1 000 francs, payable dans 255 jours. Ils les échangent, mais à la condition que la seconde sera augmentée de $12^{fr},50$. A combien pour cent s'élève l'escompte?

(*Seine*, 1877. — *Aspirantes; brevet simple.*)

Observation. — Aux termes du problème, il semble qu'il suffirait d'ajouter $12^{fr},70$ aux 1000 francs de la seconde facture et de le traiter par la règle de l'échéance moyenne. A ce point de vue, la question proposée ne serait guère raisonnable. On comprendrait peu en effet cette fantaisie de deux négociants échangeant leurs factures sans motif apparent, comme deux enfants qui échangeraient deux images. On comprend encore moins que, ces factures portant l'indication et le montant de marchandises livrées par les vendeurs, la seconde subisse une augmentation à laquelle le créancier reste étranger.

La seule interprétation raisonnable consiste à supposer que le premier négociant, n'ayant pas d'argent disponible pour l'échéance prochaine de vingt jours, propose l'échange à l'autre, et que celui-ci ayant sa caisse mieux garnie accepte la proposition. Dans ce cas, ils calculent la valeur à laquelle se réduit chaque facture au moment de l'échange, par l'escomple commercial et à un certain taux convenu. Comme ils trouvent que le montant de la facture de 1 000 francs est inférieur de $12^{fr},70$ à celui de la facture de 980 francs après l'escompte, la différence est remise en espèces par le second négociant au premier.

Un peu plus de clarté dans l'énoncé de la question aurait dispensé de ce long commentaire. Au manque de clarté il joint un autre défaut, celui d'être trop élevé pour des aspirantes au brevet obligatoire, en exigeant l'emploi de l'algèbre.

En effet, soit x le taux demandé.

L'escompte de la 1re facture pour 20 jours est

$$\frac{980 \times x \times 20}{36\,000} \text{ ou } \frac{196x}{360}.$$

L'escompte de la 2e facture pour 255 jours est

$$\frac{1000 \times x \times 255}{36000} \text{ ou } \frac{2550x}{360}.$$

La valeur actuelle est donc pour la 1re facture

$$980 - \frac{196x}{360} \text{ ou } \frac{352800 - 196x}{360}.$$

La valeur actuelle pour la 2e facture est

$$1000 - \frac{2550x}{360} \text{ ou } \frac{360\,000 - 2550x}{360}.$$

Or la 1re de ces valeurs surpassant la 2e de $12^{fr},70$, on peut écrire l'équation

$$\frac{352\,800 - 196x}{360} - \frac{360\,000 - 2550x}{360} = 12,70.$$

Pour la résoudre on peut d'abord effectuer la soustraction des deux fractions qui ont le même dénominateur, et pour cela il faut retrancher $360000 - 2550\,x$ numérateur de la deuxième de $352\,800 - 196\,x$, numérateur de la première.

D'abord on retranchera 360000 du nr de la 1re ce qui donne

$$352\,000 - 196x - 360\,000$$

Mais auparavant le nombre 360 000 aurait dû être diminué de $2550x$; on a donc ôté $2550x$ de trop, et par suite le 1er reste est trop faible de $2550x$. En l'augmentant de ce terme, on a pour le reste cherché

$$352\,000 - 196x - 360\,000 + 2550x$$

De là découle cette règle importante :

Pour retrancher une quantité composée de plu-.

sieurs termes d'une autre quantité, on l'écrit à la suite de celle-ci en changeant ses signes + en — et — en +.

D'après cette règle on a ici

$$\frac{352\,800 - 196x - 360\,000 + 2550x}{360} = 12{,}70.$$

Puis par la réduction, et en multipliant les deux membres pour chasser le dénominateur, on obtient

$$2354x - 7200 = 4572,$$
$$2354x = 4572 + 7200,$$
$$2354x = 11772,$$
$$x = \frac{11772}{2354} = 5.$$

PROBLÈMES EXPRIMÉS PAR DES ÉQUATIONS A DEUX INCONNUES.

Problème 6. — Une bourse contient 44 francs en pièces de 5 francs et en pièces de 2 francs; combien y a-t-il de pièces de chaque espèce?

Soit x le nombre de pièces de 5 francs et y le nombre de pièces de 2 francs. Les x pièces font une somme égale à 5 x; les y pièces font une somme égale à 2 y; on a par conséquent l'équation

$$5x + 2y = 44.$$

Le problème se trouve ainsi exprimé par une seule équation à deux inconnues.

Pour la résoudre, on raisonne comme s'il n'y avait qu'une inconnue et que l'autre x par exemple, fût connue. Tirant donc la valeur d'y, on trouve

$$y = \frac{44 - 5x}{2}.$$

Ce résultat apprend que *le nombre des pièces de 2 francs est égal à la moitié de l'excès de 44 sur le quintuple du nombre des pièces de 5 francs.*

Comme les deux nombres cherchés doivent être entiers, on supposera pour x les nombres entiers 1, 2, etc., et on trouvera les quatre solutions suivantes:

$$x = 2 \quad x = 4 \quad x = 6 \quad x = 8$$
$$y = 17 \quad y = 12 \quad y = 7 \quad y = 2.$$

Problème 7. — Deux barriques sont pleines d'un vin qui vaut 85 centimes le litre. Elles sont vendues à des prix qui diffèrent de 36 francs. On sait que les $\frac{5}{6}$ de la capacité de la première valent les $\frac{12}{13}$ de la capacité de la deuxième. Quelle est la capacité de chacune de ces barriques, à un décilitre près?

(*Académie de Douai*, 1876. — *Aspirants; brevet simple.*)

Désignons par x le nombre de litres de la première et par y le nombre de litres de la deuxième.

A la vente la première produit x fois 85 centimes ou $85x$ (centimes). La deuxième produit y fois 85 centimes ou $85y$. La différence des deux sommes étant 36 francs ou 3600 centimes, on a d'abord cette première équation

$$85x - 85y = 3600. \qquad (1)$$

D'après l'énoncé on a cette autre équation

$$\frac{5}{6}x = \frac{12}{13}y \quad \text{ou} \quad \frac{5x}{6} = \frac{12y}{13}. \qquad (2)$$

Réduisant au même dénominateur 6×13 les deux fractions qui composent l'équation (2) et supprimant en même temps le dénominateur commun, on trouve

$$65x = 72y, \qquad (3)$$

ce qui signifie : 65 fois la capacité de la première valent 72 fois la capacité de la deuxième.

De l'équation (1) et de l'équation (3) qui remplace avec une forme plus simple l'équation (2), tirons la valeur de l'inconnue x, comme si y était un nombre connu, nous aurons

$$x = \frac{85y + 3600}{85},$$
$$x = \frac{72y}{65}.$$

Ces deux expressions représentent l'une et l'autre, mais sous des formes différentes, la capacité de la première. On peut donc écrire l'équation

$$\frac{72y}{65} = \frac{85y + 3600}{85},$$

ou en divisant les deux dénominateurs par 5

$$\frac{72y}{13} = \frac{85y + 3600}{17}.$$

Des deux équations qui étaient la traduction du problème, on a ainsi tiré une équation ne contenant plus qu'une des deux inconnues. Il ne s'agit plus que de la résoudre. Voici le tableau des opérations.

$$72y \times 17 = 85y \times 13 + 3600 \times 13,$$
$$12 + 24y = 1105y + 46800,$$
$$1124y - 1105y = 46800,$$
$$119y = 46800,$$
$$y = \frac{46800}{119} = 393{,}27.$$

La capacité de la deuxième barrique est 393 litres 2 décilitres. En employant l'équation (3) on aura pour trouver la capacité de la première

$$65x = 393{,}27 \times 72,$$
$$65x = 28315{,}44,$$
$$y = \frac{28315{,}44}{65} = 435^{l}{,}6.$$

Problème 8. — Un certain capital est placé à un certain taux. Retiré au bout d'un an et augmenté de 1000 francs, ce capital est placé à 1 de plus pour cent et produit à la fin de l'année un revenu supérieur de 80 francs au revenu précédent.

Au commencement de la troisième année, le capital est augmenté de 500 francs et placé encore à 1 de plus pour cent que l'année précédente; il produit alors 70 francs de plus que pendant cette année.

Calculer le capital primitif et le taux auquel il avait été placé. — (*Académie de Nancy; Brevet complet; aspirants*, 1876.)

Soit x le capital demandé et y le taux inconnu auquel il est placé. L'intérêt de ce capital au bout de l'année est $\frac{xy}{100}$.

Le capital placé au commencement de la 2e année est $x + 1000$, le taux est $y + 1$; l'intérêt de ce capital à la fin de la 2e année est donc

$$\frac{(x + 1000) \times (y + 1)}{100}.$$

Or cet intérêt surpassant de 80 francs l'intérêt produit pendant la première année, on a l'équation.

$$\frac{(x + 1000) \times (y + 1)}{100} - \frac{xy}{100} = 80. \qquad (1)$$

Le capital au commencement de la 3e année est $x + 1500$; le taux est $y + 2$; l'intérêt produit pendant cette 3e année est donc $\frac{(x + 1500) \times (y + 2)}{100}$.

Cet intérêt surpassant de $70 + 80$, c'est-à-dire de 150 francs l'intérêt de la 1re année, on a cette autre équation

$$\frac{(x + 1500) \times (y + 2)}{100} - \frac{xy}{100} = 150. \qquad (2)$$

Il s'agit de résoudre les équations (1) et (2).

Multipliant d'abord les deux membres par 100 dans chacune, on a

$$(x+1000)\times(y+1)-xy=8000. \quad (3)$$
$$(x+1500)\times(y+2)-xy=15000. \quad (4)$$

Pour effectuer la multiplication indiquée au 1[er] membre de chacune, on multiplie chaque terme du multiplicande par chaque terme du multiplicateur, et on trouve ainsi

$$xy+1000y+x+1000-xy=8000, \quad (5)$$
$$xy+1500y+2x+3000-xy=15000. \quad (6)$$

Supprimant $xy-xy$ qui se détruisent, puis diminuant de 1000 les deux membres de l'équation (5) et de 3000 les deux membres de l'équation (6) on obtient

$$1000y+x=7000, \quad (7)$$
$$1500y+2x=12000,$$

ou en divisant les deux termes de la 2[e] par 2

$$750y+x=6000. \quad (8)$$

Les deux équations primitives se trouvent ainsi réduites à leur plus simple expression dans les équations (7) et (8) et le problème proposé se trouve transformé en celui-ci : un capital est placé à un certain taux; trouver ce capital et ce taux en sachant que ce capital augmenté de 1000 fois le taux vaut 7000 francs, et qu'augmenté seulement de 750 fois le taux, il vaut 6000 francs.

Pour résoudre ces deux équations à deux inconnues, on pourrait, comme dans le problème précédent, tirer dans chacune la valeur d'x, comme si y était un nombre connu, et égaler l'un à l'autre les deux résultats. Ici il y a un moyen plus simple à employer parce qu'il y a le même nombre d'x dans les deux équations. En effet, si l'on retranche chaque membre de l'équation (8) du membre correspondant de l'équation (7), les restes seront encore égaux et on aura

$$250y=1000,$$

et
$$25y=100,$$

d'où
$$y=\frac{100}{25}=4.$$

En remplaçant y par sa valeur 4 dans l'équation (7) on aura

$$4000+x=7000,$$

d'où
$$x=7000-4000,$$

et
$$x=3000.$$

Ainsi le capital est 3000 francs; le taux est 4 °/ₒ.

Problème 9. — On a deux lingots de même poids et de titres différents. Si on fond le 1[er] lingot avec un quart du 2[e], on obtient un alliage au titre de 0,936; si on fond le 1[er] lingot avec la moitié du 2[e], on obtient un alliage au titre de 0,920. Quel est le titre de chaque lingot?

(*Acad. de Nancy*, 1876. — *Aspirants; brevet complet.* — DICT., page 301.)

Pour simplifier le langage, désignons par p le poids commun des deux lingots, quoiqu'il ne soit pas demandé. Nommons x le nombre de millièmes qui exprime le titre du 1[er], et y le nombre de millièmes du titre du 2[e].

Le poids de métal fin contenu dans le 1[er] est en millièmes px; le poids contenu dans le quart du second est $\frac{py}{4}$. Le titre du premier mélange sera donc $\dfrac{py+\frac{py}{4}}{p+\frac{p}{4}}$.

Comme il doit être égal à 936 millièmes, on écrit l'équation

$$\frac{px+\frac{py}{4}}{p+\frac{p}{4}}=936. \quad (1)$$

Sans répéter la même explication sur le 2[e] mélange, on voit qu'il donne cette autre équation

$$\frac{px+\frac{py}{2}}{p+\frac{p}{2}}=920. \quad (2)$$

En multipliant le numérateur et le dénominateur de (1) par 4, ceux de (2) par 2, et en les divisant par p, on trouve

$$\frac{4x+y}{4+1}=936 \quad \text{ou} \quad \frac{4x+y}{5}=936, \quad (3)$$
$$\frac{2x+y}{2+1}=920 \quad \text{ou} \quad \frac{2x+y}{3}=920. \quad (4)$$

Chassant le dénominateur des équations (3) et (4), on a

$$4x+y=4680, \quad (5)$$
$$2x+y=2760. \quad (6)$$

Retranchant membre à membre l'équation (6) de l'équation (5), on obtient

$$2x=1920,$$

d'où
$$x=\frac{1920}{2}=960.$$

Le titre du 1[er] lingot est donc de 960 millièmes.

Pour avoir le titre du 2[e] on remplace dans l'équation (6) le terme $2x$ par sa valeur 1920, ce qui donne

$$1920+y=2760,$$
$$y=2760-1920,$$
$$y=840.$$

Le titre du 2[e] lingot est 840 millièmes.

Observation. — Le poids inconnu p de chaque lingot ayant disparu des équations, on en conclut qu'il est inutile au problème et qu'il est quelconque, pourvu qu'il soit le même pour les deux lingots. [G. Bovier-Lapierre.]

CALCUL MENTAL. — Arithmétique I-L. — Le calcul mental est applicable à tous les degrés de l'enseignement arithmétique. Il forme en quelque sorte un petit cours d'arithmétique élémentaire parallèle à l'autre. Nous ne pouvons présenter ici le tableau détaillé de cet enseignement purement oral; nous nous bornerons à en esquisser le plan.

1° Au début les élèves énoncent les dix premiers nombres, en comptant des objets visibles, à leur portée, comme des jetons, de petits cailloux, des haricots, les doigts, etc., et en ajoutant successivement un objet de plus au nombre précédent; de la même manière les nombres depuis onze, douze, jusqu'à vingt; depuis vingt-un jusqu'à trente, et ainsi de suite jusqu'à cent.

Le maître appelle leur attention sur les dizaines. Il leur en donne une image sensible, matérielle, par de petits paquets composés par exemple de dix bâtonnets comme ceux des allumettes; il se sert aussi de la pièce de dix centimes qu'il met à la place de dix pièces d'un centime, en lui rendant son nom de décime qu'on a eu tort de lui enlever. Dans la dénomination des dizaines, on emploie encore en Suisse et dans une partie de la France les termes *septante*, *huitante*, *nonante* : le maître pourra s'en servir sans scrupule pour rétablir la régularité de la nomenclature, sauf à indiquer bientôt après les termes qu'un usage capricieux leur a substitués.

2° Il exerce ensuite les élèves à trouver les valeurs que prend chaque nombre, quand il est augmenté de deux, de trois, de quatre, etc., sans toutefois dépasser cent. Il leur apprend le nom de l'opération qu'ils ont effectuée sur les divers problèmes qui leur avaient été posés et le nom par lequel on désigne le résultat. Qu'il ne se presse pas trop de venir au secours de l'enfant dans une addition où les nombres se composent de dizaines et d'unités. Celui-ci, guidé par son bon sens, parviendra toujours à sortir d'embarras, et découvrira même la voie la plus naturelle.

Pour mettre plus de variété dans ces exercices, le maître fera entrer dans les problèmes, outre les objets déjà indiqués plus haut, les mesures de temps, telles que le jour, l'heure et la minute; le gramme, en disant que c'est le poids de la pièce d'un centime; le franc, en ajoutant que cette pièce pèse cinq grammes et qu'elle vaut autant que cent centimes; le mètre, le décimètre, et le centimètre en montrant à l'aide d'un mètre de bois ou de cuivre que le mètre se divise en dix décimètres et en cent centimètres; le litre en mettant sous leurs yeux une boîte cubique ayant un décimètre sur ses trois dimensions. C'est ainsi qu'il amènera les élèves à faire connaissance avec le système métrique, sans le leur présenter sous la forme d'un tableau scientifique, où les diverses mesures sont énumérées avec des étiquettes propres à effaroucher les enfants.

3° Par des problèmes analogues aux précédents, ils apprendront à diminuer de un, de deux, de trois, etc., un nombre donné, sans excepter le cas où dans le nombre à retrancher il y aurait plus d'unités que dans l'autre. Demandez à l'un d'entre eux par exemple ce qui reste de soixante-trois centimes, après qu'il en a dépensé vingt-huit. Il est presque certain qu'après un instant de réflexion, il ôtera d'abord vingt-trois centimes de soixante-trois, ce qui lui donne quarante centimes pour reste, puis qu'il ôtera encore cinq centimes de ce reste, pour arriver à trouver trente-cinq centimes, en moins de temps que nous n'en mettons ici à l'expliquer.

4° Ayant ainsi acquis la pratique intelligente de l'addition et de la soustraction, pour des nombres qui ne surpassent pas cent, les élèves vont être mis en face de nouveaux problèmes, sans être avertis qu'il s'agit d'une nouvelle opération, la multiplication.

Pour procéder méthodiquement, le maître leur fait d'abord découvrir combien valent 2 fois 1, 2 fois 2, 2 fois 3... jusqu'à 2 fois 9, au moyen de deux groupes composés chacun de deux petits cailloux par exemple, composés de trois, de quatre, etc. Il répètera les mêmes questions, en les appliquant à d'autres objets, et quand il sera assuré que les élèves n'éprouvent plus d'hésitation pour énoncer les résultats, il leur enseigne de la même manière ce que valent 3 fois, 4 fois.... 9 fois chacun des neuf premiers nombres. Interrogés ensuite plusieurs fois sur des problèmes où les nombres sont pris dans un ordre quelconque, ils gravent les produits dans leur mémoire d'une manière aussi sûre et aussi rapide que l'ancienne méthode était lente et fastidieuse.

Ils remarqueront d'eux-mêmes qu'en tout cela ils n'ont fait autre chose que d'effectuer des additions dans lesquelles les nombres étaient égaux. A ce moment, on prononce le nom donné à cette addition abrégée en prenant la précaution de distinguer bien nettement le multiplicateur du multiplicande ; mais on démontre qu'ils donnent le même produit quand ils sont mis l'un à la place de l'autre, et pour cela il suffit de faire voir que 3 groupes de 5 haricots peuvent être remplacés par 5 groupes composés de 3 haricots.

Au moyen de questions convenablement choisies, ils apprendront que le produit de deux facteurs devient double, triple, quadruple, etc., quand l'un des facteurs devient lui-même double, triple ou quadruple. Si on leur dit par exemple que chaque jour Pierre a écrit 3 pages et son frère Paul 6 pages, il n'en est aucun qui ne dise qu'à la fin de la semaine le travail de Paul est double de celui de Pierre. Ils auront ainsi un moyen de trouver plus promptement un produit sur lequel ils pourraient être un peu embarrassés. Aussi un élève, à qui on demande combien font 4 fois 16, se rappelant que 4 fois 8 valent 32, double aussitôt ce premier produit pour arriver à 64, après avoir observé que 16 est le double de 8. Ils acquièrent de cette manière la pratique de cet important principe : *pour multiplier un nombre par un autre qui est le produit de deux facteurs on peut multiplier ce nombre par le premier facteur et le résultat ensuite par le second.*

5° Les élèves, sachant maintenant trouver le produit de deux nombres, vont être conduits, toujours par les questions du maître, à effectuer l'opération inverse. On propose à l'un d'entre eux de partager par exemple 8 billes à 2 camarades, 12 billes à 3, etc. Quand ils auront résolu une suite de problèmes semblables, ils connaîtront ce que c'est que la division. On leur indique alors les termes de *dividende* et de *diviseur;* mais on ne citera le nom de *quotient* qu'après avoir montré que le résultat de la division exprime combien de fois le dividende contient le diviseur. Ce sera ici le moment de dire ce qu'on appelle *demie, tiers, quart, cinquième,* etc.

Ils ne trouveront pas plus de difficultés pour diviser par un nombre d'unités un dividende où le nombre des dizaines ne serait pas divisible par le diviseur, par exemple 65 francs à diviser entre 4 personnes. En regardant cette somme comme formée de 6 pièces de 10 francs et de 5 pièces de 1 franc, l'élève chargé d'effectuer le partage, donnera d'abord une pièce de 10 francs à chaque personne; puis, remplaçant les 2 pièces de 10 francs qui restent par 20 pièces de 1 franc, il a encore à partager 25 francs, ce qui fait 6 francs pour chaque personne, avec 1 franc de reste. En remplaçant aussi ce franc par 10 pièces de 1 décime, il donne 2 décimes à chacune, et enfin, s'il remplace encore les 2 décimes qui lui restent par 20 centimes, il a terminé la division et trouvé 16 francs et 25 centimes pour chaque part.

6° Nous ne pouvons indiquer ici les divers moyens par lesquels les opérations peuvent être abrégées dans certains cas ; la sagacité des maîtres saura les découvrir et les mettre au profit de l'élève. Nous appellerons plutôt leur attention sur l'importance et la simplicité des moyens qu'ils ont à leur disposition pour rendre les calculs sur les fractions aussi faciles que ceux qui ont été effectués précédemment. Qu'ils se gardent bien de commencer par parler de numérateur et de dénominateur; qu'ils ne prononcent pas même le nom de fraction ; mais qu'ils proposent une suite de petits problèmes, tels que les suivants :

Combien une demi-heure vaut-elle de quarts d'heure?

Combien 2 heures et quart font-elles de quarts d'heure?

Combien y a-t-il de mètres dans une longueur égale à 8 tiers de mètre?

Quelle est la longueur formée par trois règles, ayant, l'une 3 huitièmes de mètre, l'autre 1 huitième de mètre, et la dernière 2 huitièmes de mètre?

Aucun élève ne sera embarrassé pour donner la réponse. Ils la trouveront aussi facilement pour ces autres problèmes :

Emile doit prendre les 3 quarts d'un sac de 24 billes ; combien en aura-t-il ?

On demandait son âge à une jeune fille ; elle répondit : les 5 huitièmes de mon âge font 10 ans.

Dans le premier ils diront : le quart de 24 est 6 ; donc Emile aura 3 fois 6 billes ou 18 billes. Dans le second : puisque 5 huitièmes de l'âge cherché font 10 ans, 1 huitième vaut 5 fois moins ou 2 ans ; donc l'âge est égal à 8 fois 2 ans ou 16 ans.

C'est maintenant qu'il y a utilité à employer les noms de *fraction*, de *numérateur* et de *dénominateur*. — On pourra aussi aborder la réduction des fractions au même dénominateur, en apprenant à convertir des demies et des quarts en huitièmes, des demies et des tiers en sixièmes, etc. — V. l'article *Calcul* dans la 1re PARTIE.

[G. Bovier-Lapierre.]

Lectures et exercices. — On pourra quelquefois piquer l'émulation et la curiosité des élèves en leur racontant quelques exemples de ces tours de force de calcul mental accomplis par des enfants. En voici un ou deux que la très-grande majorité de nos élèves ne résoudrait que la plume à la main.

En 1820, on entendit parler d'un enfant italien de sept ans, Vincent Zuccaro, qui avait une étonnante facilité de calcul et qui, en quelques instants, résolvait de tête des problèmes compliqués. Une expérience publique fut faite à Palerme sous la surveillance de deux professeurs de mathématiques en présence de plus de quatre cents personnes. Voici deux des problèmes qui furent posés à l'enfant :

1er *problème*. — Un navire est parti de Naples pour Palerme à midi, a fait 10 milles par heure. Un autre, qui fait 7 milles par heure, est parti au même moment de Palerme pour Naples. A quelle heure se rencontreront-ils et combien de milles aura fait chacun d'eux, la distance entre les villes étant de 160 milles ?

Vincent Zuccaro répond aussitôt : Le premier navire aura fait 105 milles $\frac{15}{17}$; le deuxième, 74 $\frac{2}{17}$.

— Oui, mais à quelle heure la rencontre ?

— Cela s'entend : à 10 heures et $\frac{10}{17}$ après le départ.

L'enfant, ayant aperçu la liaison entre les deux parties de la réponse, pensait que les assistants l'avaient comprise comme lui et qu'il était inutile de l'énoncer.

2e *problème*. — Dans trois attaques successives ont péri le quart, puis le cinquième, puis le sixième des assaillants qui se trouvent alors réduits à 138. Combien étaient-ils d'abord ?

L'enfant répond : 360.

D. Comment avez-vous trouvé ce nombre ?

R. S'ils avaient été 60, il en serait resté 23 après les attaques ; mais 23 est le sixième de 138, donc les assaillants étaient d'abord six fois 60, c'est-à-dire 360.

D. Mais pourquoi avez-vous supposé 60 plutôt que 50 ou 70 ?

R. Parce que ni 50 ni 70 ne sont divisibles par 4 ni par 6.

(D'après la *Revue encyclopédique*, t. XLIII, p. 239.)

CALENDRIER. — Connaissances usuelles, VIII ; Cosmographie, IX. — *Étym.* : du latin *calendarium*, tableau des *calendes*. Les calendes (d'un mot grec qui signifie *appel*) étaient le 1er jour du mois, celui où les prêtres annonçaient au peuple assemblé les fêtes du mois.

Nous savons déjà ce que c'est que l'*année* *. Si nous considérons une étoile placée, comme l'étoile polaire, par exemple, d'un côté de la route que suit la Terre autour du Soleil, nous reconnaîtrons qu'au commencement du printemps et au commencement de l'automne, la terre est à la même distance de cette étoile ; qu'au commencement de l'été, la terre est un peu plus loin, et au commencement de l'hiver, un peu plus près de l'étoile polaire.

Dans cette révolution, il arrive que l'équateur de la terre, prolongé jusqu'au soleil, conserve toujours dans le ciel la même direction et passe, au commencement du printemps, exactement par le centre du soleil ; au commencement de l'été, 23 degrés et demi environ au-dessous du soleil par rapport à l'étoile polaire ; repasse au commencement de l'automne, exactement par le centre du soleil, et, au commencement de l'hiver, se dirige à 23 degrés et demi environ au-dessus du soleil, entre celui-ci et l'étoile polaire.

On nomme année *tropique* le temps qui s'écoule depuis le printemps où l'équateur de la terre est dirigé vers le centre du soleil jusqu'au printemps suivant, où cet équateur est de nouveau dirigé vers le même centre du soleil. C'est cette année tropique qui règle le calendrier parce que c'est elle qui ramène les saisons dans le même ordre avec une régularité parfaite. On conçoit facilement la nécessité, pour la vie ordinaire, de ramener les mêmes saisons continuellement aux mêmes mois de l'année, et, autant que possible, aux mêmes quantièmes de ces mêmes mois. Le trouble qu'apporterait dans les travaux agricoles la présence, au bout de cinquante ou soixante ans, de l'été au mois de mai, par exemple, et plus tard au mois d'avril, frappera tous les esprits.

Le jour *solaire* est produit par la rotation de la terre sur elle-même : c'est l'intervalle de temps qui s'écoule depuis le moment où, par suite de cette rotation, un point de la terre est amené en face du centre du Soleil, jusqu'au moment où il revient pour la deuxième fois en face du centre du soleil.

Si l'année tropique contenait un nombre exact de jours solaires, la question du calendrier serait bien simple, le calendrier d'une année ressemblerait toujours à celui de l'année précédente ; surtout si le nombre de jours solaires de l'année tropique contenait un nombre exact de semaines.

Mais il n'en est pas ainsi. Dans l'année tropique, il y a 365 jours 242 millièmes 216 millionièmes et 6 dix-millionièmes de jour. Les usages de la vie ne peuvent pas s'arranger d'une année fractionnaire comme celle-là, qui conduirait à commencer une année à minuit, l'année suivante à 5 heures 48 minutes 47 secondes et demie du matin, la suivante, à 11 heures 37 minutes 35 secondes du matin, et ainsi de suite. Depuis longtemps, les peuples ont reconnu la nécessité de créer une année *civile* composée d'un nombre exact de jours et il en résulte l'année civile *commune*, de 365 jours.

Cette année est trop courte de 0 jour, 2422166, et comme 0,2422166 × 4 = 0,9688664 ou tout près d'un jour, on est convenu de faire, tous les quatre ans, une année civile de 366 jours par l'addition d'un jour au mois de février. On nomme cette quatrième année : année *bissextile*.

Puisqu'on était en retard de 0 jour 9688664 et qu'on vient d'ajouter un jour, 1 — 0,9688664 donnant 0,0311336, chaque période de 4 ans se trouve trop longue de 0 jour, 0311336. Il en résulte qu'au bout de 100 ans ou de 25 fois 4 ans, on se trouve en avance de 0,0311336×25 ou de 0,77834. Cette circonstance a fait admettre que chaque année de siècle, 1700, 1800, 1900, serait une année commune au lieu d'être une année bissextile, ce qui revient à retrancher un jour de chaque période de cent ans.

On se trouve ainsi en retard de 1 — 0,77834 jour ou 0,22166 jour tous les cent ans, soit, au bout de quatre siècles, de 0,22166 × 4 ou 0,88664 jour. Alors il a été décidé que chaque quatrième année de siècle, 1600, 2000, 2400, etc., serait une année bissextile, contrairement à la convention précédente.

Tous les quatre cents ans donc, on se retrouve en avance de 1 — 0,88664 ou 0,11336. Il faut donc attendre 10 fois 400 ou 4000 ans pour que l'avance soit de 0,11336 × 10 ou 1 jour, 1336, mais nous avons bien le droit de ne pas nous préoccuper de si loin.