LES PROBLÈMES "CONCRETS" À "METTRE EN ÉQUATIONS" DANS L'ENSEIGNEMENT[1]

Lalina COULANGE
Didactique des mathématiques, Laboratoire Leibniz
Université Joseph Fourier, Grenoble

Nous ne nous sommes pas intéressés de manière directe au sujet évoqué par le titre que nous avons donné à cet article. La "mise en équations" de problèmes "concrets" s'est présentée à nous par le biais de questions en rapport avec la modélisation mathématique et sa place dans l'enseignement, qui ont motivé notre travail. Pour éclairer le lecteur, il nous faut revenir au début de l'"histoire" de notre recherche et expliciter les choix que nous avons faits au cours de cette étude.

Au travers de lectures préliminaires à notre recherche, nous avons pu constater deux directions dans les travaux en didactique des mathématiques en rapport avec la modélisation mathématique. Ce sont les directions : "*enseigner par la modélisation* " et "*enseigner la modélisation* ".

Dans la première (enseigner par la modélisation), les articles ou ouvrages sont nombreux autant en didactique des mathématiques qu'en didactique de la physique : il s'agit d'étudier l'utilisation de la modélisation comme façon de poser aux élèves des questions d'enseignement, c'est-à-dire leur faire acquérir une connaissance (nouvelle ou non) par l'intermédiaire de la construction de modèle en classe. On peut, par exemple, citer Di Martino, Legrand et Pintard (1995) qui ont explicitement travaillé dans ce sens à propos de l'introduction du concept de limite :

> "La compréhension du jeu de modélisation est un préalable à la compréhension scientifique des concepts fondamentaux de toute science, son approfondissement "doit donc" (pour que le sens soit préservé) être explicite et pour le moins concomitant à l'introduction de ces concepts." (op. cité p. 285).

Notre étude s'inscrit dans la deuxième direction des travaux en didactique des mathématiques sur la modélisation (enseigner la modélisation) : il s'agit donc d'étudier l'enseignement de la notion de modélisation elle-même. Plus précisément, nous nous sommes fixés comme objectif de faire des recherches à ce propos sur l'enseignement des mathématiques en vigueur dans les classes de Seconde actuellement. Notons que c'est sur ce point que cet article diffère de ceux précédemment parus dans « petit x » en rapport avec la modélisation mathématique (Béguin, Gurtner, de Marcellus, Denzler, Tryphon,

[1] Cet article est inspiré de notre mémoire de DEA de didactique des disciplines scientifiques (Coulange, 1997)

Vitale, 1994) où les auteurs étudient la mise en œuvre d'un processus d'enseignement de la modélisation qui n'existe pas habituellement dans les institutions actuelles[2] au niveau de la Seconde.

Notre objectif est donc d'étudier un éventuel apprentissage de la modélisation dans l'enseignement actuel des mathématiques en classe de Seconde[3].

En préambule à une étude sur le sujet, il nous fallait dans un premier temps, éclaircir ce que nous entendions par "modélisation mathématique". Nous avons été amené ainsi à construire une description pragmatique de la démarche de modélisation mathématique à partir d'une situation "réelle". Cette schématisation que nous présentons n'a pas pour but de faire une description détaillée de ce qu'est la modélisation mathématique mais de nous fournir un point de vue particulier qui nous servira de référence pour étudier les faits observés au niveau d'enseignement considéré.

I. Une schématisation de la démarche de modélisation mathématique à partir d'une situation réelle

Pour élaborer ce schéma du processus de construction d'un modèle mathématique, nous avons préalablement consulté diverses définitions existantes.

Dans l'Encyclopedia Universalis, la définition de la modélisation mathématique ne donne pas beaucoup de précisions sur le "cœur" d'une démarche de construction d'un modèle mathématique. L'auteur de cette définition y insiste par contre beaucoup sur l'aspect "interdisciplinaire"[4] de la modélisation mathématique : utilisée autant dans les sciences expérimentales comme la physique ou la biologie que dans les sciences humaines comme la sociologie, l'économie.

Nous nous sommes ensuite référés à deux travaux de didactique des mathématiques : Chevallard (1989) et Henry (1997) ont, avant nous, essayé d'établir un schéma du processus de construction d'un modèle mathématique. Notre modèle de la démarche de "modélisation" à partir d'une situation "réelle" en est assez directement inspiré. Nous réutilisons notamment la notion de "modèle pseudo-concret"[5] introduite par Henry qui est une notion-clé de notre schématisation et, comme Chevallard, nous insistons sur le fait que la construction d'un modèle mathématique à partir d'une situation "réelle" se fait relativement à des questions (en rapport avec la dite situation)[6].

Un modèle mathématique représente d'après nous, une *interprétation mathématique*

---

[2] "Nous présentons ici les résultats d'une approche *exploratoire* à l'enseignement interdisciplinaire de la mathématique et des sciences." (Béguin, Gurtner, de Marcellus, Denzler, Tryphon, Vitale, 1994 p. 41)

[3] Notons que bien que nous ayons choisi dans un premier temps la classe de Seconde comme terrain d'observation, l'étude que nous allons présenter dans cet article nous semble réutilisable, en continuité, au niveau de la classe de Troisième. Nous reviendrons sur cette remarque en conclusion de notre article.

[4] Caractéristique d'ailleurs également bien mise en valeur par la série de 3 articles en rapport avec la modélisation précédant celui-ci dans Petit x : "*Mots clefs* : enseignement de la mathématique, enseignement des sciences, enseignement transdisciplinaire, modélisation..." (Béguin, Gurtner, De Marcellus, Denzler, Tryphon et Vitale 1994)

[5] "Il s'agit de traduire cette description (de la situation réelle que l'on cherche à modéliser mathématiquement) en un système simplifié et structuré : c'est le niveau du *modèle pseudo-concret*" (Henry 1989, p. 3)

[6] "On définit le système que l'on entend étudier (ou modéliser) en précisant les aspects "pertinents" *par rapport à l'étude que l'on entend faire de ce système...*" (Chevallard, 1989)

liée à une situation "réelle" (qui peut éventuellement provenir d'autres disciplines de sciences expérimentales ou humaines) ou à sa description en langage naturel, relativement à des questions que l'on se pose sur cette situation.

On peut alors schématiser la démarche de modélisation mathématique de la manière suivante : *en entrée, une situation "réelle" et des questions en rapport avec cette situation:* Un modèle mathématique a pour "registre d'entrée" (pour reprendre les termes de Chevallard, 1989) une situation "réelle"[7] et des questions que l'on se pose à l'intérieur de cette situation. La démarche de modélisation comporte ensuite schématiquement 4 phases (dont le contenu est explicité dans le schéma de la figure 1) qui sont en fait en interrelation les unes par rapport aux autres. Quand on construit un modèle mathématique, ces phases ne correspondent pas réellement à des étapes qui se succéderaient dans un ordre linéaire. Nous les dissocions ici pour mieux faire apparaître les différents types de tâches qui sont mises en œuvre dans une modélisation mathématique.

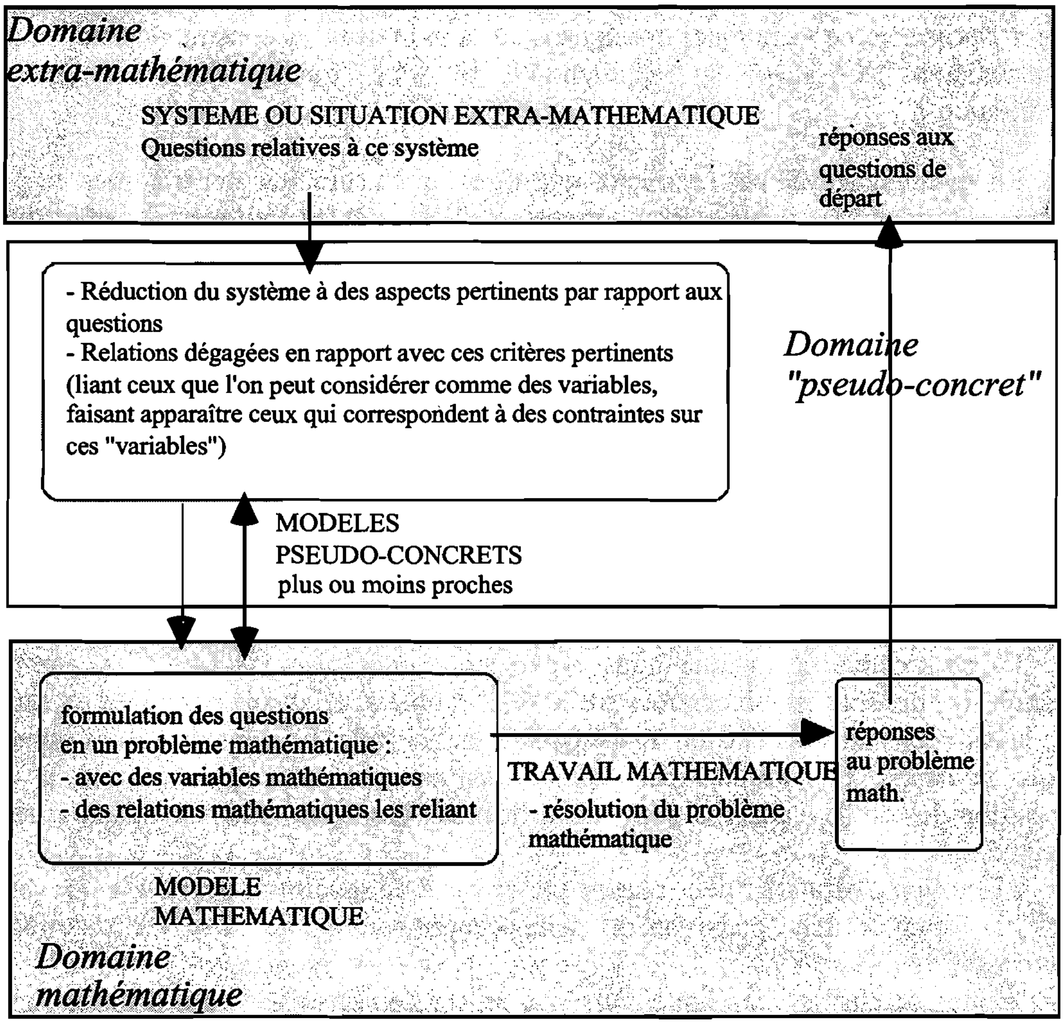

Figure 1. Schéma de la démarche de modélisation mathématique

Ces quatre phases sont les suivantes :

[7] Nous considérerons cette situation "réelle" comme non-mathématique : nous n'avons en effet pas abordé la question de la modélisation intra-mathématique dans ce travail.

1. Passage de la situation réelle de départ à un modèle pseudo-concret

On appelle modèle pseudo-concret un *modèle intermédiaire* (en langage naturel ou éventuellement sous forme d'un schéma) entre la situation réelle et le modèle mathématique à construire. C'est en quelque sorte un premier niveau d'abstraction de la "réalité" invoquée, qui n'est d'ailleurs pas fixe la plupart du temps : comme on le voit sur notre schéma, un modèle pseudo-concret peut être plus ou moins proche de la situation réelle considérée ou du modèle mathématique à construire.

2. Passage du modèle pseudo-concret au modèle mathématique

3. Phase de travail purement mathématique dans le modèle mathématique

4. Retour à la situation étudiée

A partir de ce "modèle", nos premières questions en rapport avec l'enseignement des mathématiques et la modélisation sont venues à se préciser :

(1) Où dans l'enseignement des mathématiques de Seconde peut-on éventuellement repérer l'existence de techniques enseignées en rapport avec la construction de modèles mathématiques ? Ce savoir se rapproche-t-il de notre "modèle" de la démarche de modélisation ?

En articulation avec ces premières questions, nous sommes venus à nous en poser d'autres plus en rapport avec les comportements d'élèves et les pratiques d'enseignants en classe de Seconde :

(2) Quelles activités en rapport avec une démarche de modélisation mathématique (telle que nous la caractérisons) les élèves ont-ils à prendre en charge ? Quelles sont les exigences qu'ils y attachent et qu'ils essaient de satisfaire ? D'autre part quelles sont les attentes des enseignants liées aux productions de leurs élèves dans ces pratiques ?

Pour mieux cerner ces questions et y apporter des éléments de réponse, nous avons choisi de les reprendre sous l'éclairage de deux grandes perspectives théoriques de la didactique des mathématiques : le point de vue de l'écologie des savoirs et en articulation, celui du contrat didactique.

La perspective écologique nous est apparue judicieuse vis-à-vis des premières questions (1) qui sont en fait centrées sur la "vie" d'objets de savoir enseignés en rapport avec la démarche de modélisation mathématique en Seconde. En considérant les objets de savoir *en interrelation les uns par rapport aux autres*[8], cette approche met à notre disposition des outils d'analyse pour mener à bien l'étude de leur "vie" dans le savoir enseigné :

- la notion d'habitat[9], "lieu" occupé par un objet de savoir (où peut-on le trouver ?)
- la notion de niche, place fonctionnelle occupée par un objet de savoir (quel rôle ou "profession" joue-t-il ?)
- l'idée de chaînes trophiques, chaînes reliant l'objet considéré à d'autres comme

[8] La "loi écologique fondamentale" à retenir est la suivante : "Pour être viable au sein d'un corpus de savoirs (savant ou enseigné), un élément de savoir doit pouvoir y apparaître (...) *comme partie d'un tout structuré*" (Rajoson 1988,p. 135).

[9] "Pour le dire en langage volontairement anthropomorphe, l'habitat, c'est en quelque sorte l'adresse , le lieu de résidence de l'organisme. La niche, ce sont les fonctions que l'organisme y remplit : c'est en quelque façon la profession qu'il y exerce" (Chevallard, 1994, p.14).

outil ou "utilisateur" de ces objets : pour vivre de manière stable, un objet de savoir doit être relié vers le haut (outil de) et vers le bas ("outillé" par) à d'autres objets du savoir considéré.

De même, le point de vue du contrat didactique nous a paru pertinent par rapport aux questions (2) centrées sur les comportements d'élèves et d'enseignants vis-à-vis des activités de modélisation mathématique en classe de Seconde. Il nous permettra en effet de décrire ces comportements en les inscrivant dans des règles "contractuelles" reconnues par enseignants et élèves.

Nous avons cherché dans notre étude à articuler ces deux perspectives théoriques[10]. Nous montrerons qu'à partir des résultats d'une étude en termes d'écologie des savoirs, il est possible de révéler en partie les règles du contrat didactique.

Notre point de départ est donc une analyse écologique du programme de Seconde actuel et de deux manuels d'édition récente.

II. Analyse écologique du programme et de manuels

L'étude écologique de deux ouvrages scolaires de mathématiques destinés à l'enseignement en classe de Seconde que nous allons maintenant présenter s'appuie sur notre schématisation de la démarche de modélisation présentée plus haut : nous l'utilisons comme une description de l'objet modélisation et de sa vie au sein d'un savoir de référence (que nous chercherons à comparer aux objets enseignés en rapport avec la modélisation et leur vie au sein du savoir enseigné en Seconde).

II.1. Étude des directives du programme

Nous avons commencé par consulter le programme de mathématiques de Seconde paru en 1990 et toujours en vigueur actuellement.

Dans un premier temps, comme l'évoque Chevallard[11], ces directives officielles, semblent suggérer que la modélisation mathématique occupe une place importante dans l'enseignement actuel en classe de Seconde. Sa présence paraît répondre à une volonté d'ouverture des mathématiques sur ce que les auteurs du programme nomment la "vie courante" ou "l'environnement de l'élève" ou sur d'autres disciplines enseignées.

Ainsi dans les "Objectifs et capacités valables pour l'ensemble du programme", cette volonté est explicite :

---

[10] Cette idée d'articuler les deux points de vue de l'écologie et du contrat didactique est inspirée d'un article d'Assude (1996) : *De l'écologie et de l'économie d'un système didactique* ou l'auteur montre clairement la richesse et l'intérêt de ce type d'articulation.

[11] Dans la partie "Activités et modélisation" de son *Dictionnaire de didactique des mathématiques*, Chevallard affirme : "Bien que le terme de modélisation soit de promotion relativement récente, il n'en est pas moins présent dans les programmes de l'enseignement secondaire (...) La place ainsi accordée à la modélisation de situations du monde fort diverses semble répondre à une volonté délibérée de rendre sensible la "déraisonnable efficacité des mathématiques", c'est à dire leur capacité à produire des connaissances sur le réel [...]" (Chevallard, à paraître)

"L'enseignement des mathématiques est aussi à relier avec celui des autres disciplines [...]" (op. cité p. 357).

Cette ambition d'accorder de l'importance à la modélisation pour ouvrir les mathématiques vers "l'extérieur" resurgit également à plusieurs reprises dans la description des contenus du programme (au moins une fois dans chacun des 4 chapitres : Problèmes numériques et algébriques, Fonctions, Statistiques, Géométrie). Par exemple, on peut lire à propos de l'enseignement des Statistiques :

"Les documents nécessaires seront proposés en liaison avec les enseignements de sciences biologiques ou empruntés à l'environnement de l'élève [...]" (ibid. p. 358e)

A première vue, les auteurs du programme semblent ainsi accorder un habitat vaste et une niche confortable à la modélisation mathématique en classe de Seconde. Mais y a-t-il dans ce programme, des directives présentant explicitement une *démarche ou une méthode en rapport avec la modélisation* comme un réel enjeu d'apprentissage ? Les deux parties du texte consulté concernant l'enseignement des Statistiques et de la Géométrie n'y font pas allusion.

Dans les deux chapitres restants : "Fonctions" et "Calcul numérique et algébrique", le terme de modélisation reste absent. Mais on y trouve la description d'une *méthode de mise en équations* à appliquer pour résoudre des problèmes "concrets" qui paraît se rapprocher d'une démarche de modélisation mathématique. On peut lire

- dans le chapitre "Calcul numérique et algébrique" ou plus exactement dans la sous-partie "systèmes linéaires" :

"L'objectif est d'étudier les problèmes issus d'autres disciplines et de la vie économique et sociale en mettant en valeur *les phases de mise en équations, de traitement mathématique et d'interprétation des résultats*[12]" (ibid. p. 358).

- dans le chapitre "Fonctions" :

"On exploitera largement des situations issues de l'algèbre, de la géométrie, des sciences techniques et de la vie économique et sociale, en marquant les différentes phases : mise en équations, traitement mathématique, contrôle et exploitation des résultats" (ibid. p. 358b).

Par ailleurs le programme reste assez flou sur la mise en œuvre par les élèves de manière autonome de ces méthodes et sur leur description (elles semblent schématisées en trois phases : mise en équations, traitement mathématique, et exploitation ou contrôle et interprétation des résultats).

Pour en savoir plus, nous avons donc choisi de consulter deux ouvrages destinés à la Seconde correspondant à ce programme.

II.2. Étude de deux manuels

Nous avons choisi d'étudier les deux ouvrages suivants[13] :

- *Mathématiques 2^{de}* collection FRACTALE, édition BORDAS 1994.
- *Math Seconde* collection TERRACHER, édition HACHETTE 1994.

Pour simplifier la lecture de l'analyse tirée de ces deux manuels, nous les désignons

---

[12] C'est nous qui soulignons.

[13] Nous avons pu constater a posteriori à travers un questionnaire à des enseignants (que nous présenterons en partie dans la suite) la pertinence de ce choix. En effet, la majorité des enseignants interrogés utilisent en priorité Terracher (71 % pour la partie cours et 80,9 % pour la partie exercices) et Fractale (71% pour la partie cours et 76,2 % pour la partie exercices).

dans la suite respectivement par Fractale et Terracher.

Ces deux ouvrages présentent une structure assez similaire avec une partie identifiable à un cours composé d'Activités préparatoires, d'un Cours Théorique et de Travaux Pratiques et contenant des "Points Méthode" (dans Terracher) ou une "Fiche Méthode" (dans Fractale), et une partie réservée à des exercices (laissés à la charge de l'élève).

Nous avons décidé d'étudier de plus près dans ces deux ouvrages le chapitre "Systèmes linéaires". En effet ce chapitre représente un habitat commun[14] (aux deux manuels) d'un objet de savoir enseigné en rapport avec la modélisation mathématique : la méthode de mise en équations de problèmes "concrets".

On peut certes voir quelques différences entre les deux manuels : les auteurs de Terracher semblent accorder plus d'importance à l'aspect "modélisation de situations extra-mathématiques" que ceux de Fractale ; ils multiplient notamment un peu plus les exemples de résolution de problèmes "concrets" dans les Activités préparatoires (2 Activités sur 3) et dans les Travaux Pratiques (4 exercices résolus sur 4)

Mais finalement, l'étude approfondie du chapitre "Systèmes linéaires" en parallèle dans ces deux ouvrages permet de tirer des conclusions communes sur le rapport institutionnel à l'objet "méthode de mise en équations de problèmes concrets" (en rapport avec la modélisation mathématique).

Tout d'abord, on peut constater d'après les deux manuels que la mise en équations ne va pas vivre de manière annexe dans l'habitat des systèmes linéaires mais comme un réel enjeu d'apprentissage : dans les deux cas et dès la page d'entrée, elle est donnée comme un "objectif pédagogique" du chapitre. Citons par exemple Fractale :

> "- Traduire géométriquement, en relation avec le chapitre précédent, une équation linéaire à deux inconnues, ou un système de telles équations.
> - Connaître les méthodes usuelles de résolution de systèmes et savoir la mieux adaptée à la situation proposée.
> - *Savoir mettre en équations un problème concret*[15] : en particulier choisir les inconnues ; résoudre le problème mathématique et vérifier la pertinence des solutions trouvées."
> (op. cité, p. 267).

Un autre indice est la place assez importante que la mise en équations prend dans les "Activités Préparatoires" ou les "Travaux Pratiques" (au moins la moitié des exercices présentés dans ces deux parties du chapitre Systèmes linéaires sont des exemples de mise en équations de problèmes "concrets" dans les deux ouvrages)

Pourtant ni dans Fractale, ni dans Terracher, on ne trouve de traces de "vie" de la mise en équations de problèmes "concrets" dans le cours théorique du chapitre "Système linéaires". Celui-ci (dans les deux livres) est uniquement constitué de connaissances théoriques sur la résolution de systèmes linéaires : définition, interprétation graphique et méthodes numériques de résolution (substitution et combinaison linéaire).

C'est finalement dans un "Point Méthode" (pour Terracher) ou dans la "Fiche Méthode" (pour Fractale) qu'est décrite une *méthode* de mise en équations[16].

---

[14] On peut noter que dans le chapitre "Fonctions" de Fractale, on ne trouve pas trace de méthode en rapport avec la modélisation mathématique tandis que dans Terracher, dans le chapitre "Généralités sur les fonctions", on peut voir apparaître un Point Méthode où les auteurs précisent une méthode pour "mettre en œuvre une fonction pour décrire une situation, résoudre un problème". (op. cité, p.150).

[15] C'est nous qui soulignons.

[16] Pour reprendre les termes de Chevallard, la mise en équations vit en tant que notion paramathématique (et non comme notion mathématique) : "Les notions paramathématiques sont des *notions-outils* de *l'activité*

Dans les deux ouvrages, cette méthode est constituée de quatre étapes : choix des inconnues, mise en équations, résolution mathématique ou résolution du système et conclusion ou retour au problème posé.

La troisième phase de résolution mathématique ou de résolution du système apparaît, de façon claire, nourrie ou outillée par les connaissances introduites dans la partie de cours théorique :

"Résolution Mathématique :
Appliquez l'une des méthodes vues dans le cours pour résoudre le système obtenu." (Fractale, p. 275).
"Résolution du système : (cf cours)" (Terracher, p. 96).

Ceci nous permet d'inscrire la méthode de mise en équations dans le réseau trophique représenté par le schéma ci-dessous (figure 2).

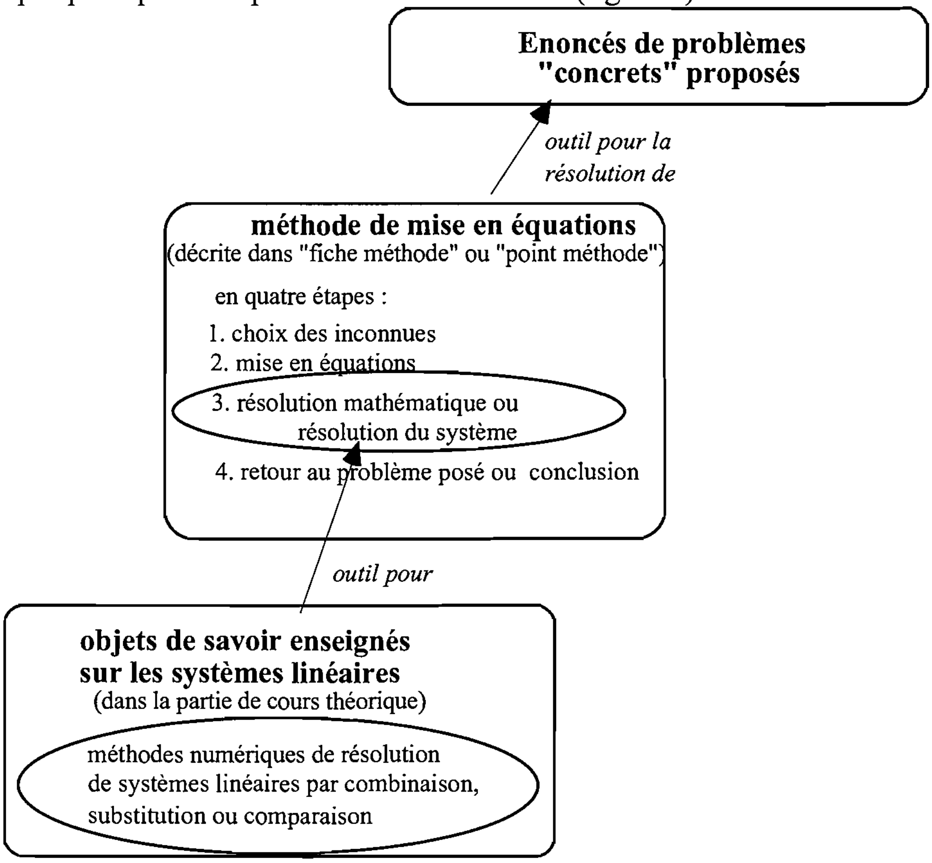

Figure 2. Réseau trophique de la méthode de "mise en équation"

Ce schéma souligne le fait que les trois étapes restantes de la méthode: "choix des inconnues", "mise en équations" et "conclusion" ou "retour au problème posé" semblent étrangement vivre indépendamment de tout "outil" du cours théorique.

Mais en lisant plus attentivement la description de ces trois étapes, on peut

---

mathématique ; elles ne sont pas normalement *objets d'étude* pour le mathématicien." (Chevallard, 1991 p. 50). Si on regarde des ouvrages plus anciens (datant d'avant la parution du programme de 1990), on s'aperçoit que la mise en équations ne semble pas vivre explicitement dans le texte du savoir. On peut penser que cet objet est passé du statut de notion protomathématique à celui de paramathématique : "Les notions paramathématiques (et à fortiori les notions mathématiques) sont des objets dont l'enseignant prend conscience, à qui il donne un nom (...) Il existe une strate plus profonde de "notions", mobilisées implicitement par le contrat didactique. Pour elles, j'ai proposé le qualificatif de "protomathématiques". (Chevallard, 1991 p. 51).

comprendre pourquoi cela ne rend pas pour autant "inconfortable" la vie de la méthode mise en équations. On s'aperçoit en fait qu'il semble exister des contraintes sur les énoncés de problèmes "concrets" permettant aux élèves de Seconde d'appliquer la méthode de mise en équations :

- Les inconnues à "choisir" semblent correspondre aux grandeurs cherchées ou sont marquées par des indicateurs linguistiques dans le texte des énoncés de "problèmes concrets" proposés". On peut reprendre en exemple, la "Fiche méthode" de Fractale :

"CHOIX DES INCONNUES
Lisez très attentivement l'énoncé pour déterminer les grandeurs cherchées. Choisissez alors ces grandeurs comme inconnues..." (Fractale, p. 275).

- Or l'étape de "mise en équations" est directement suivie de celle de "résolution du système" ou de "résolution mathématique" (où il s'agit d'appliquer "l'une des méthodes du cours pour résoudre le système obtenu" (Fractale, p.275)) : ces énoncés semblent donc toujours "cacher" un système d'équations linéaires connu (de taille "raisonnable" avec autant d'équations que d'inconnues) et résolvable par les méthodes du cours théorique. Ce que l'on pourrait schématiser par la figure 3, équivalent dans le savoir enseigné en classe de Seconde (dans l'habitat relatif aux systèmes linéaires) de la figure 1.

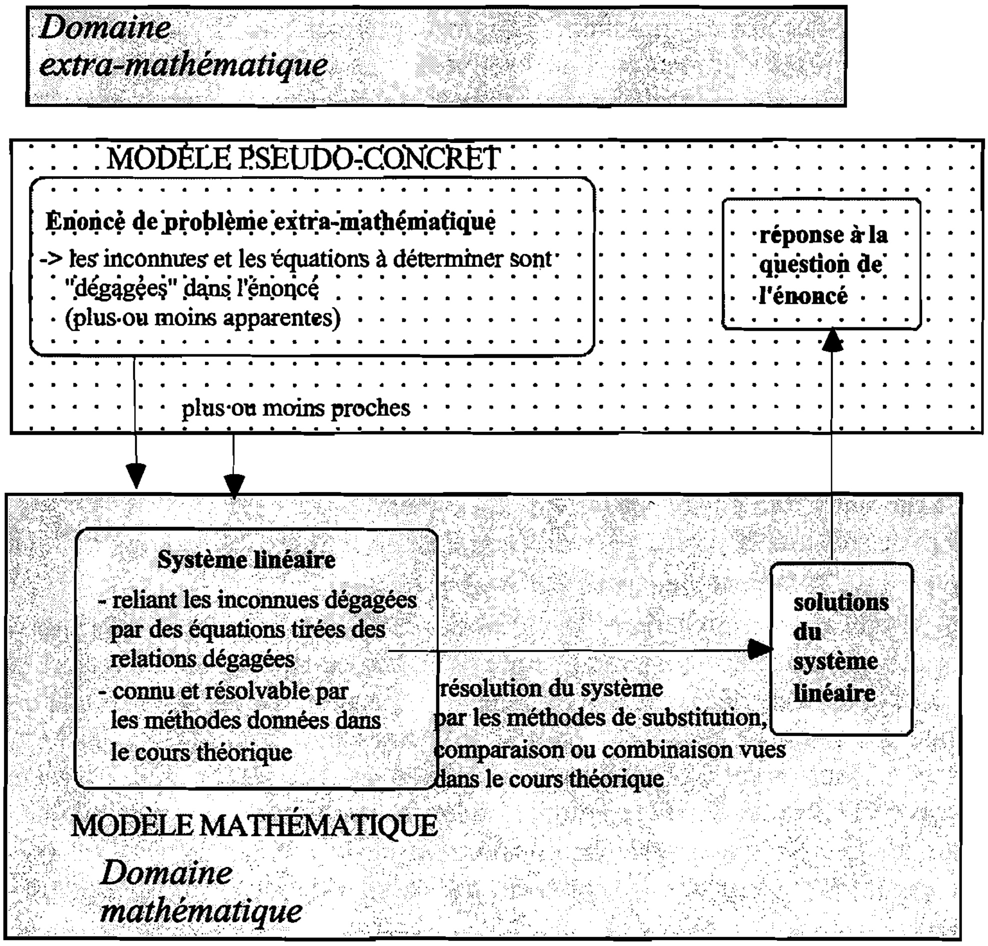

Figure 3. Schéma de la modélisation mathématique comme savoir enseigné

Ce schéma met bien en évidence, si on se réfère à notre schématisation de la démarche de modélisation mathématique à partir d'une situation "réelle" (figure 1) qu'il ne semble pas y avoir dans la méthode de mise en équations décrite dans Fractale et

Terracher, l'équivalent d'un passage par l'intermédiaire d'un modèle pseudo-concret.

Cette constatation et nos hypothèses sur l'existence de contraintes sur les exercices de mise en équations nous amènent à avancer qu'en fait, ces énoncés de problèmes "concrets" ne représentent pas des situations "réelles" dans toute leur complexité mais plutôt *des modèles pseudo-concrets* assez proches du modèle mathématique (de forme prédéterminée) à construire.

Dans un deuxième temps, l'examen de la partie réservée aux exercices du chapitre "Systèmes linéaires" des deux ouvrages confirme ces suppositions.

La plupart des énoncés[17] de problèmes "concrets" à mettre en équations répertoriés semblent bien respecter les contraintes énoncées et représenter des modèles pseudo-concrets quasi-mathématiques de situations "réelles". On trouve certes des contre-exemples dans Terracher : certains énoncés ne peuvent être ramenés directement à l'écriture d'un système linéaire mais s'y rapportent par l'intermédiaire d'un changement d'inconnues ou d'autres "cachent" des systèmes linéaires comportant plus d'équations que d'inconnues ; cependant ces particularités sont signalées par le titre de la catégorie auxquels ce type d'exercices appartient ("d'autres systèmes" ou "Systèmes se ramenant à un système linéaire) et leur résolution très souvent guidée par des indications.

On peut constater par ailleurs que quelques énoncés de problèmes "concrets" proposés pourraient être résolus par des techniques arithmétiques. Citons comme exemple un exercice tiré de Terracher :

"57 Un problème du XVIII^e
(d'après Éléments mathématiques. M Rivard, 1760)
Une personne ayant rencontré des pauvres, a voulu donner à chacun quatre sols ; mais elle a trouvé en comptant son argent, qu'elle avait deux sols de moins qu'il ne fallait ; c'est pourquoi elle a donné seulement trois sols à chaque pauvre, et il lui en est resté cinq. On demande combien la personne avoit de sols, et combien il y avoit de pauvres." (ibid., p.104)

On peut en réponse à cet exercice donner la solution de type arithmétique suivante:
"En donnant 4 sols, 2 pauvres n'en ont que 3. Mais si on donne 3 sols à chaque pauvre, il reste 5 sols. C'est donc qu'il y a $2 + 5 = 7$ pauvres (les deux qui n'avaient que 3 sols plus les 5 qui ont rendu un sol sur les 4 qu'ils avaient).
Le nombre de sols que la personne avait étant égal au nombre de pauvres multiplié par 4 auquel on enlève 2, la personne avait $7 \times 4 - 2 = 26$ sols."

Cet exercice se trouve dans la catégorie "exercices" dans la rubrique intitulée "Systèmes se ramenant à un système linéaire (2, 2)" et les auteurs du manuel ne précisent pas que ce problème ne nécessite pas forcément l'utilisation d'un système linéaire.

Cette possibilité de résoudre certains problèmes par l'arithmétique n'étant pas du tout évoquée, cela revient à privilégier la résolution de type algébrique. L'outil mis à la disposition de l'élève de Seconde pour résoudre les problèmes "concrets" de ce type est alors tout désigné : c'est le système linéaire. On ne le met finalement jamais dans la position où il doit se poser la question du choix de l'outil mathématique le plus performant.

---

[17] On considère les énoncés avec les éventuelles indications qui les accompagnent. Il est possible par exemple de trouver des énoncés en langage naturel où les inconnues ne sont pas marquées par des indicateurs linguistiques et ne correspondent pas à des grandeurs cherchées mais elles sont alors explicitement données par des indications du type : "Choisissez comme inconnues : x la part de chaque enfant, y l'héritage total..." (Fractale, p. 282).

Si on revient maintenant à notre premier ensemble de questions (1) en rapport avec la vie de la modélisation mathématique dans l'enseignement en classe de Seconde, notre étude montre que celle-ci semble réduite à une méthode de "mise en équations" dans l'habitat relatif aux systèmes linéaires qui se rapproche plus d'une "pseudo-modélisation" que de la construction de modèles mathématiques à partir d'une situation réelle. La question que l'on vient à se poser est alors la suivante : que reste t-il à la charge de l'élève de Seconde comme tâche en rapport avec la modélisation dans la mise en équations des problèmes "concrets" qui lui sont proposés ?

Il lui reste en fait à écrire le bon système à partir de l'énoncé.

Cette tâche (qui comprend notamment la désignation de grandeurs inconnues par des lettres) peut paraître "élémentaire" et finalement très modeste par rapport à une activité de modélisation mathématique. Cependant, si on observe le niveau de difficulté associé aux énoncés de problèmes "concrets" indiqué par les auteurs de Fractale, on s'aperçoit que ces exercices sont considérés comme difficiles et notre travail va montrer qu'ils le sont effectivement. On ne doit donc pas sous-estimer la difficulté que génère cet espace de liberté laissé à l'élève de Seconde.

III. Règles de contrat didactique en rapport avec la mise en équations des problèmes "concrets"

Comme nous l'avons évoqué plus haut, nous avons choisi d'articuler les approches théoriques de l'écologie et du contrat didactique. Ainsi à partir de l'analyse que nous venons de faire, nous allons tirer des hypothèses de règles de contrat didactique décrivant les comportements respectifs des élèves et des enseignants en classe de Seconde pendant des activités de "modélisation-mise en équations".

De l'examen des exercices du chapitre "Systèmes linéaires" de Terracher, on peut supposer une première règle de contrat didactique. En effet, nous avons pu constater dans notre analyse, que certains énoncés de problèmes "concrets" présentent à la fois une solution de type algébrique par l'intermédiaire d'un système linéaire et une solution de type arithmétique qui est "passée sous silence" par les auteurs. Cela nous amène à penser qu'en réponse aux attentes de l'institution (ici, classe de Seconde) et des enseignants la représentant, un élève de Seconde va systématiquement recourir à l'écriture d'un système pour résoudre ce type d'énoncé. D'où l'hypothèse d'une première règle de contrat didactique spécifique à la résolution des problèmes "concrets" :

R_1: Pour résoudre un problème "concret", il faut chercher à écrire un système linéaire à partir de l'énoncé.

Nous venons d'autre part, de conclure de notre étude écologique que la seule tâche en rapport avec la modélisation mathématique laissée à la charge d'un élève de Seconde, dans la mise en équations de problèmes concrets, est celui l'écriture du bon système à partir de l'énoncé.

On peut alors supposer un ensemble de règles de contrat didactique qui vont permettre à l'élève de Seconde de gérer cet espace de liberté :

- Des règles spécifiques à l'écriture du système

Du fait que les énoncés de problèmes "concrets" proposés à l'élève représentent des modèles pseudo-concrets quasi-mathématiques où les inconnues à "choisir" sont désignées par des indicateurs linguistiques ou correspondent aux grandeurs cherchées, on peut supposer une règle de contrat didactique "principale" :

R_2 : Les grandeurs à prendre en compte comme inconnues apparaissent explicitement dans l'énoncé

et deux corollaires :

R'_2 : Les grandeurs à prendre en compte comme inconnues sont les grandeurs cherchées apparaissant dans le question à la fin de l'énoncé.

R''_2 : Les grandeurs à prendre en compte comme inconnues sont "citées" dans l'énoncé.

- Des règles spécifiques au contrôle de la validité du système linéaire obtenu

Du fait que les problèmes "concrets" à mettre en équations répertoriés dans Fractale et Terracher "cachent" tous, sauf indication contraire, un système linéaire connu et résolvable par les méthodes du cours, on peut en déduire que les règles de contrat didactique suivantes peuvent expliquer les moyens de contrôle de l'élève de Seconde sur la validité du système écrit à partir de l'énoncé :

R_3 : Le système à écrire à partir de l'énoncé d'un problème "concret" est résolvable par les méthodes de résolution de systèmes linéaires vues dans le cours.

R'_3 : Le système à écrire à partir de l'énoncé doit comporter autant d'équations que d'inconnues, en nombre raisonnable[18].

Ces règles de contrat didactique tirées de notre étude écologique sont un outil pour comprendre et interpréter le comportement des élèves de Seconde en réponse aux injonctions didactiques des enseignants dans des activités de "modélisation-mise en équations".

Nous les avons mises à l'épreuve en élaborant un questionnaire destiné aux enseignants et une expérimentation que nous allons maintenant présenter.

IV. Un questionnaire destiné aux enseignants et une expérimentation en classe de Seconde

Le questionnaire et l'expérimentation ont été construits dans une interrelation étroite sur la base d'énoncés de problèmes "concrets" en "rupture" avec les règles de contrat didactique que nous venons d'énoncer. Leur objectif commun est de déterminer si le comportement des élèves de Seconde et des enseignants est conforme à ces règles.

Nous n'en présenterons ici qu'une partie. Nous laissons notamment de côté un des 2 exercices communs au questionnaire et à l'expérimentation (le problème du "carrelage" tiré de Terracher : exercice 62, p. 105).

[18] d'après le programme de 1990 : "On se limitera à des situations ne comportant pas plus de quatre inconnues [...] " (op. cité, p. 358 b).

IV.1. Présentation de l'expérimentation

Nous présentons donc deux des trois énoncés de problèmes qui constituent notre expérimentation.

a. La situation "La fleuriste"

Exercice "La fleuriste"[19]

Une fleuriste vend des bouquets de roses.

Du lundi au samedi, elle vend ses bouquets de roses à un tarif normal puis applique un tarif réduit pour les vendre sur le marché du dimanche (ces deux tarifs sont les mêmes d'une semaine sur l'autre).

La première semaine, elle vend 65 bouquets au tarif normal et 18 bouquets au tarif réduit le dimanche. Son bénéfice hebdomadaire est alors de 939 francs.

La deuxième semaine , elle vend 52 bouquets au tarif normal et 12 bouquets au tarif réduit le dimanche. Son bénéfice hebdomadaire est alors de 756 francs.

Le tarif réduit représente-t-il un gain ou une perte pour la fleuriste ? De combien ?

Les élèves de Seconde ont à résoudre cet exercice de manière individuelle en temps limité (20-25 minutes pour résoudre ce problème et celui du carrelage non présenté ici).

Analyse a priori de la situation de "la fleuriste"

La difficulté de cet exercice ne réside pas dans l'écriture du "bon" système linéaire à partir de l'énoncé mais dans le choix des inconnues à faire pour résoudre correctement ce problème (la résolution mathématique du système obtenu étant par ailleurs assez simple). En effet, les inconnues à choisir pour écrire le "bon" système : bénéfices au tarif normal et réduit, ne sont pas explicitement citées dans les phrases à "traduire" sous forme d'équations ("La première semaine, elle vend 65 bouquets au tarif normal et 18 bouquets au tarif réduit le dimanche") et ne correspondent pas non plus à des grandeurs directement demandées par la question en fin d'énoncé ("le tarif réduit représente-t-il un gain ou une perte pour la fleuriste ? De combien ?").

Ainsi cet exercice se trouve-t-il en "rupture" par rapport aux règles $\mathbf{R}_2$, $\mathbf{R'}_2$ et $\mathbf{R''}_2$: l'élève de Seconde agissant dans le plus strict respect de ces règles va donc choisir comme inconnues les tarifs et non les bénéfices. Cependant si dans un premier temps, il obéit à ces règles, il est possible que l'incohérence de son résultat numérique[20] (un tarif même "réduit" ne peut être négatif !) le conduise à un retour réflexif sur le choix des inconnues en doutant de la validité du système écrit. On en arrive ainsi à une typologie de réponses d'élèves de Seconde à ce problème que l'on peut résumer par le tableau suivant (tableau 1):

---

[19] Cet énoncé est inspiré d'un exercice posé en classe de troisième au cours d'une étude en didactique des mathématiques (Vergnaud et al. 1988, pp. 259-280).

[20] Les nombres du problème de la "fleuriste" (65, 18, 939, 52, 12, 756) font aboutir la résolution du système écrit à partir de l'énoncé (avec les bonnes ou mauvaises inconnues) à une solution négative.

Réponse de type 1 Soit p_1 le tarif normal et p_2 le tarif réduit. En traduisant les hypothèses de l'énoncé, on obtient le système $\begin{cases} 65p_1 + 18p_2 = 939 \\ 52p_1 + 12p_2 = 756 \end{cases}$ Donc en résolvant ce système par substitution, on trouve : $p_1 = 15$ et $p_2 = -2$ D'où le tarif réduit représente une perte pour la fleuriste de 2 francs.	Réponse incorrecte mais conforme à la règle du contrat r_2 et de ses corollaires r'_2 et r''_2 -> possibilité de rétroaction
Réponse de type 2 Soit b_1 le bénéfice de la fleuriste au tarif normal; Soit b_2 le bénéfice de la fleuriste au tarif réduit. En traduisant les hypothèses de l'énoncé, on obtient le système $\begin{cases} 65b_1 + 18b_2 = 939 \\ 52b_1 + 12b_2 = 756 \end{cases}$ D'où en résolvant ce système par substitution, on trouve $b_1 = 15$ et $b_2 = -2$ Donc le tarif réduit représente une perte pour la fleuriste de 2 francs.	Réponse correcte

Tableau 1. Deux types de réponses possibles à l'exercice "La fleuriste"

b. La situation de "la table"

Exercice "La table"[21]

On dispose d'une table et de deux blocs placés comme sur la figure 1. On trouve que la longueur r est de 32 pouces. Après avoir réarrangé les deux blocs comme sur la figure 2, on trouve que la longueur s est de 28 pouces.
Quelle est la hauteur de la table ?

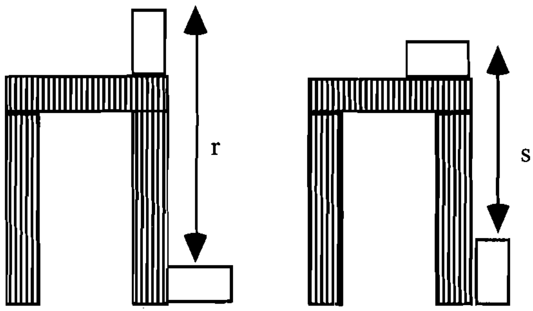

figure 1 *figure 2*

Les élèves interagissent en binômes pour résoudre cet exercice en 20-25 minutes.

[21] Cet énoncé est tiré de la série d'exercices du manuel Terracher associée au chapitre "Systèmes linéaires" (exercice 71, p. 106).

Analyse a priori de la situation "La table"

Cet énoncé de problème "concret" présente une résolution de type algébrique par l'intermédiaire de l'écriture d'un système à 2 équations et 3 inconnues (donc inhabituel pour un élève de Seconde) et une résolution de type arithmétique. L'élève se conformant à la règle $\mathbf{R_1}$ (écriture d'un système à partir de l'énoncé) se retrouve en situation de "rupture" par rapport aux règles $\mathbf{R_3}$ et $\mathbf{R'_3}$. On peut donc supposer que certains élèves ne sauront pas résoudre cet exercice ou reviendront à une solution de type arithmétique se plaçant alors en situation de rupture avec $\mathbf{R_1}$. Des réponses d'élèves de Seconde à cet exercice nous donneront donc des indications sur la stabilité de leur comportement vis à vis des règles $\mathbf{R_1}$, $\mathbf{R_3}$ et $\mathbf{R'_3}$.

De cette analyse, on peut tirer deux types de réponses possibles :

Réponse de type 1 On introduit deux inconnues auxiliaires, x et y dimensions des blocs. Soit h la hauteur de la table. L'énoncé conduit au système suivant : $\begin{cases} h = r - y + x \\ h = s + y - x \end{cases}$ D'où en additionnant les deux équations de ce système, et en remplaçant r et s par leurs valeurs, on trouve h = 30.	Réponse correcte en rupture avec la règle du contrat didactique $\mathbf{R_3}$ et $\mathbf{R'_3}$
Réponse de type 2 r est égale à la hauteur de la table diminuée de la largeur du bloc et augmentée de la longueur du bloc. s est égale à la hauteur de la table diminuée de la largeur du bloc et augmentée de la longueur du bloc donc r + s est égale à deux fois la hauteur de la table, c'est-à-dire r + s = 2h donc h = 30.	Réponse correcte en rupture avec la règle de contrat didactique $\mathbf{R_1}$

Tableau 2. Deux types de réponses possibles à l'exercice "La table"

IV.2. Présentation du questionnaire

Ce questionnaire destiné aux enseignants de niveau Seconde (voir en annexe I) est constitué de deux parties. La première s'appuie sur notre analyse de manuels (voir note 12). La deuxième partie est en interrelation avec notre expérimentation : nous y faisons apparaître l'exercice "La fleuriste" (et celui du "carrelage" que nous ne présentons pas dans cet article) en y associant les deux types de réponses tirées de notre analyse a priori. Nous demandons aux enseignants lesquelles ils pensent voir apparaître dans leurs classes, en quelle proportion, leurs remarques personnelles vis-à-vis de cet énoncé. Leurs réponses nous permettront de connaître leurs attentes et leurs prévisions relatives aux réponses d'élèves de Seconde à ce problème "concret".

V. Analyse des résultats du questionnaire et de l'expérimentation

V.1. Analyse de réponses au questionnaire

Nous avons recueilli les réponses de 21 professeurs enseignant en classe de Seconde. Nous n'abordons ici que l'analyse des réponses aux questions associées à l'exercice de la "fleuriste".

Dix-huit enseignants (donc 85,7%) prévoient des réponses fausses du type 1 de la part de leurs élèves à cet exercice. Huit enseignants pensent que ce type 1 représenterait les réponses majoritaires dans leurs classes (très peu voire pas du tout de réponses de type 2 apparaîtraient) tandis que les dix autres pensent que des réponses de type 2 peuvent apparaître de manière non négligeable.

Les enseignants interrogés perçoivent donc la difficulté de cet exercice. On peut citer quelques-unes de leurs remarques personnelles à ce propos :

"Énoncé très délicat"
"Je ne donnerai pas cet énoncé en devoir."

Dix enseignants justifient d'ailleurs cette difficulté en donnant des raisons qui vont dans le sens de la "rupture" présumée des règles de contrat didactique spécifiques au choix d'inconnues $\mathbf{R_2}$,$\mathbf{R'_2}$ et $\mathbf{R''_2}$:

"les expressions "tarif normal" et "tarif réduit" apparaissent dans l'énoncé."
"Le début du texte incite à choisir p_1 et p_2."
"La question posée donne en général des indications sur le choix des inconnues."

D'après les réponses à ces questions de notre questionnaire, les prévisions de la majorité des enseignants confirment donc que cet exercice représente une "rupture" avec les énoncés habituels (certains semblent même identifier d'où provient cette "rupture").

V.2. Analyse de résultats de notre expérimentation

L'expérimentation que nous avons élaborée et dont nous avons présentée en partie le scénario au lecteur, a été mise en œuvre le 10 avril 1996 dans une classe de Seconde au lycée de Pontcharra (Isère). L'effectif de la classe était de 30 élèves.

a. Productions d'élèves en réponse à l'exercice de "La fleuriste"

Cinq élèves n'ont pas du tout abordé cet exercice. Examinons les 25 copies et brouillons restants.

Trois élèves n'ont pas précisé le choix des inconnues : ils ont écrit des "x" et des "y" sans préciser à quoi ces lettres correspondent pour eux. 21 élèves ont amorcé une réponse incorrecte du type 2 (voir annexe II et III) en choisissant les tarifs comme inconnues. Une seule élève a choisi les "bonnes" inconnues correspondant aux bénéfices et commencé une résolution correcte du type 1.

Ces 25 élèves ont tous écrit le système :

$$\begin{cases} 65x + 18y = 939 \\ 52x + 12y = 756 \end{cases}$$ (avec x et y désignant les "bonnes" ou "mauvaises" inconnues)

Sept d'entre eux (dont l'unique élève ayant choisi les "bonnes inconnues"), se sont arrêtés directement après cette étape de la méthode de mise en équations et n'ont pas résolu le système obtenu. Huit autres élèves ont fait des erreurs de calculs et aboutissent à des solutions numériques inexactes. Trois élèves n'indiquent sur leur copie que le résultat "$p_1 = 15$" mais des calculs et des ratures sur leur brouillon nous suggère qu'ils ont en fait trouvé la solution "$p_2 = - 2$" mais que devant ce résultat négatif, persuadés d'avoir fait une erreur numérique, ils ont recommencé leurs calculs. Sept élèves indiquent les deux solutions trouvées "$p_1 = 15$" et "$p_2 = -2$" : parmi eux, deux élèves concluent par "impossible" ou "faux" (voir en annexe II) et les deux autres marquent leur étonnement ("C'est dingue !").

Les difficultés des élèves de cette classe en réponse à l'exercice "La fleuriste" confirme bien les prévisions de la majorité des enseignants interrogés et le fait que cet exercice est en rupture avec le contrat didactique spécifique à la mise en équations de problèmes "concrets". Le comportement de pratiquement tous les élèves (21 sur les 25 qui ont répondu) a obéi aux règles de contrat $\mathbf{R_2}$,$\mathbf{R'_2}$ et $\mathbf{R''_2}$: les débuts de réponses dites de type 2 dans notre analyse sont majoritaires. Ces règles semblent par ailleurs très stables : devant une solution négative, certains élèves ont remis en doute leur résolution numérique du système ou montré leur surprise mais aucun n'a douté de son choix d'inconnues.

b. Productions d'élèves en réponse à l'exercice de "la table"

La classe considérée étant organisée en 15 binômes, nous avons recueilli leurs productions écrites (copies, énoncés et brouillons)[22].

Sur les 15 brouillons et copies récoltées, on peut voir que tous les élèves ont choisi de résoudre l'exercice "La table" par l'intermédiaire d'un système. Tous ont commencé une résolution du type 1 et ont écrit le "bon" système à 2 équations et 3 inconnues à partir de l'énoncé. Mais devant ce système, tous les élèves ont semblé perturbés.

Quatre binômes ont ensuite "tourné en rond" en essayant de résoudre ce système pour trouver les valeurs des grandeurs associées aux *trois* inconnues.

Six binômes ont considéré d'après le dessin (voir dessin en annexe IV) que "longueur du bloc = 2 largeur du bloc", se ramenant de cette manière à un système (2, 2) que deux d'entre eux ont résolu correctement (solution $h = 30$).

Cinq binômes ont réussi à trouver la solution à partir du système de départ à 2 équations et 3 inconnues. Deux d'entre eux ont vu directement qu'ils suffisait d'additionner les 2 équations; les quatre autres ont fait des calculs intermédiaires (et ont eux aussi "tourné en rond" pendant un moment).

Beaucoup d'élèves ont semblé être très perturbés par la "rupture" que représente cet énoncé avec les règles $\mathbf{R_3}$, $\mathbf{R'_3}$. Douze binômes interrogés (dont huit ayant fini par trouver la solution et quatre n'ayant pas abouti) ont essayé au moins dans un premier temps de résoudre le système de la réponse de type 1 pour trouver la valeur des 3 inconnues par les méthodes numériques connues, tout en marquant leur surprise devant sa forme "inhabituelle". Six binômes ont également réagi par rapport à cette rupture en

---

22 Nous avons également enregistré les dialogues entre 8 binômes pour analyser les interactions entre les élèves pendant la résolution de cet exercice, ce qui dans notre mémoire de DEA donne lieu à une analyse de protocole que nous laissons de côté ici.

essayant de ramener ce système "hors norme" à un système "classique" (2, 2) et résolvable par les méthodes du cours, par l'intermédiaire d'informations qu'ils ont cru contenues dans le dessin .

D'autre part la description des productions d'élèves en réponse à cet exercice nous permet de constater une apparente grande stabilité de la règle de contrat $\mathbf{R_1}$ puisque tous les élèves ont amorcé une réponse de type 1 sans envisager une résolution arithmétique du type 2 même par la suite : la situation de "rupture" avec $\mathbf{R_3}$, $\mathbf{R'_3}$ ne leur a pas fait remettre en question pour autant l'utilisation d'un système pour résoudre le problème.

V.3. Conclusions tirées de ces résultats

Les résultats de notre questionnaire et de l'expérimentation confirment le fait qu'en réponse aux attentes des enseignants, le comportement des élèves de Seconde dans la résolution de problèmes "concrets" s'inscrit dans les règles de contrat didactique $\mathbf{R_1}$, $\mathbf{R_2}$, $\mathbf{R'_2}$, $\mathbf{R''_2}$, $\mathbf{R_3}$ et $\mathbf{R'_3}$. En effet, les réponses d'élèves recueillies aux exercices "La fleuriste" et "La table" se rapprochent de celles envisagées par notre analyse préalable. En ce qui concerne le premier énoncé, elles correspondent par ailleurs aux prévisions des enseignants interrogés. Les deux énoncés présentés contiennent réellement une "rupture" du contrat didactique spécifique à la "mise en équations de problèmes concrets" : ils ont provoqué des effets spectaculaires et publics dans la classe de Seconde observée : réactions de rejet et d'étonnement de la part d'une majorité d'élèves. Ces perturbations du comportement des élèves nous ont paru aller dans le sens d'une construction de connaissances : les deux situations de "La table" et de "La fleuriste" en provoquant des ruptures du contrat didactique, semblent ainsi représenter une source d'apprentissage pour l'élève de Seconde[23] .

V. Conclusion

Ainsi, à travers cette étude, en partant de questions en rapport avec la modélisation mathématique et l'enseignement en classe de Seconde, nous avons abouti à l'étude du contrat didactique relatif à la "mise en équations de problèmes concrets".

En utilisant un schéma de la démarche de modélisation qui résume notre point de vue sur le sujet, nous en sommes arrivé à la conclusion que les activités de "mise en équations" ne représentent pas vraiment une activité de construction de modèles mathématique à partir de situations réelles : les énoncés de problèmes "concrets" proposés aux élèves sont en fait des modèles "pseudo-concrets" quasi-mathématiques de telles situations. La seule tâche laissée à la responsabilité de l'élève dans la résolution de ces problèmes et, en rapport avec la modélisation mathématique, est de procéder à l'écriture d'un "bon" système linéaire à partir de l'énoncé. Pour remplir cette tâche correctement, en réponse aux injonctions des enseignants et de l'institution, notre travail montre que l'élève de Seconde obéit à des règles de contrat didactique spécifiques aux activités de mise en équations de problèmes "concrets" (que nous avons énoncées). On s'aperçoit alors qu'il

---

[23] "D'ailleurs, ce sont en fait les ruptures de contrat qui sont importantes (...) la connaissance sera justement ce qui résoudra les crises issues de ces ruptures." (Brousseau 1986, p. 51-52).

ne faut pas négliger cet espace de liberté restreint laissé à l'élève qui n'est pas sans lui poser des difficultés. Cependant pour en revenir à nos premières préoccupations, peut-on encore parler d'activité de modélisation ?

D'autre part la stabilité du comportements des élèves vis-à-vis des attentes de l'enseignant (que nous avons interprété comme le respect de règles implicites) ne peut s'expliquer que par des pratiques déjà anciennes des élèves et des enseignants, c'est à dire des pratiques algébriques installées dès le collège. Rappelons le texte du programme actuel de la classe de Troisième :

"*3. Équations et inéquations du premier degré :*

Méthodes graphiques de résolution d'équations et d'inéquations du premier degré à deux inconnues à coefficients numériques

Méthodes de résolution d'un système de deux équations ou inéquations du premier degré à deux inconnues à coefficients numériques

Exemples variés de problèmes se ramenant au premier degré :

Les travaux se placeront dans le cadre des différentes parties du programme. **Comme en Quatrième,** on dégagera sur les exemples étudiés, les différentes phases du traitement d'un problème : **mise en équation, résolution, interprétation du résultat.**" (Op. cité, p..66)

L'objet système linéaire fait donc sa première apparition au niveau de la Troisième et apparaît ainsi, d'après l'extrait du programme cité, dès le départ, lié de manière forte à une méthode de mise en équations de "problèmes concrets" qui ressemble étrangement à celle qui vit dans les classes de Seconde. Il sera donc intéressant de regarder en continuité de cette étude, l'enseignement des systèmes linéaires en classe de Troisième. Nos travaux actuels vont dans ce sens.

BIBLIOGRAPHIE

ASSUDE T. (1996), De l'écologie et de l'économie d'un système didactique, *Recherches en Didactique des Mathématiques,* Vol. 16 n° 1, pp. 48-70.

BROUSSEAU G. (1982) *Ingénierie didactique. D'un problème à l'étude a priori d'une situation didactique,* Troisième École d'Été de Didactique des Mathématiques, Orléans.

CHEVALLARD Y. (1989) Le passage de l'arithmétique à l'algèbre dans l'enseignement des mathématiques au collège, *Petit x,* n° 19, pp. 45-75.

CHEVALLARD Y. (1997) *Dictionnaire de Didactique des Mathématiques 1996-1997,* (à paraître).

CORTES A., FAVRE - ARTIGUE P., VERGNAUD G. Introduction de l'algèbre auprès de débutants faibles. Problèmes épistémologiques et didactiques, *in* Vergnaud G., Brousseau G. et Hulin M., *Didactique et acquisitions des connaissances scientifiques*, Paris, CNRS, 1988, pp. 259-280.

COULANGE L. (1997) *Une étude sur la modélisation dans la classe de mathématiques en Seconde - un double point de vue à partir de l'écologie et du contrat didactique.* Mémoire de DEA de didactique des disciplines scientifiques, Université Joseph Fourier, Grenoble.

DI MARTINO H., LEGRAND M., PINTARD D. (1995) Modélisation et situations fondamentales, *Actes de la VIIIème École d'Été de didactique des mathématiques,* 1995 (pp. 279 - 290), éd. IREM de Clermont-Ferrand.

HENRY M. (1997) Expérience aléatoire et modélisation, *séminaire Didatech du 5 février 1997*, (à paraître dans les cahiers du Séminaire Didatech).

RAJOSON L. (1988) *Analyser la transposition didactique : quelques problèmes, concepts et méthodes de l'abord écologique,* Thèse, Université d'Aix-Marseille II, Marseille.

ANNEXE I

QUESTIONNAIRE DESTINE AUX ENSEIGNANTS

Première partie

Utilisez-vous couramment un ou plusieurs manuels pour préparer votre cours : oui non

Si oui le(s)quel(s) :

Utilisez-vous couramment un ou plusieurs manuels pour choisir des exercices que vous proposez à vos élèves : oui non

Si oui le(s)quel(s) :

Deuxième partie

Dans cette deuxième partie, vous trouverez deux énoncés d'exercices[24].

Nous vous proposons des types de réponses possibles à ces exercices en vue de connaître votre avis sur celles que vous pensez voir apparaître le plus souvent dans vos classes et pour quelles raisons.

Donnez votre opinion, sur la feuille de réponse prévue à cet effet, annexée en fin de document.

Vous devez cocher pour chaque solution envisagée si cette réponse a des chances d'apparaître dans votre classe (attendue) ou si elle a peu de chance d'apparaître (non attendue).

[24] Nous ne donnons ici que l'exercice 'La fleuriste"

Exercice 1

Énoncé

Une fleuriste vend des bouquets de roses.

Du lundi au samedi, elle vend ses bouquets à un tarif normal puis applique un tarif réduit pour les vendre sur le marché du dimanche (ces deux tarifs sont les mêmes d'une semaine sur l'autre).

La première semaine, elle vend 65 bouquets au tarif normal et 18 bouquets au tarif réduit le dimanche. Son bénéfice hebdomadaire est alors de 939 francs .

La deuxième semaine, elle vend 52 bouquets au tarif normal et 12 bouquets au tarif réduit le dimanche. Son bénéfice hebdomadaire est alors de 756 francs.

Le tarif réduit représente-t-il un gain ou une perte pour la fleuriste? De combien?

Solutions proposées

Solution 1:

Soit p_1 le tarif normal et p_2 le tarif réduit, en traduisant les hypothèses de l'énoncé, on obtient le système

$$\begin{cases} 65p_1 + 18p_2 = 939 \\ 52p_1 + 12p_2 = 756 \end{cases}$$

En résolvant ce système par substitution, on trouve : $p_1 = 15$ et $p_2 = -2$
D'où on déduit que le tarif réduit représente une perte pour la fleuriste de 2 francs.

Solution 2:

Soit b_1 le bénéfice de la fleuriste au tarif normal et b_2 le bénéfice de la fleuriste au tarif réduit

En traduisant les hypothèses de l'énoncé, on obtient le système

$$\begin{cases} 65b_1 + 18b_2 = 939 \\ 52b_1 + 12b_2 = 756 \end{cases}$$

En résolvant ce système par substitution, on trouve : $b_1 = 15$ et $b_2 = -2$

D'où le tarif réduit représente une perte pour la fleuriste de 2 francs.

Feuille de réponse

Exercice 1

Solution 1

Attendue : oui - non
Pourquoi :

Commentaire :

Solution 2

Attendue : oui - non
Pourquoi :

Commentaire :

ANNEXE II

BROUILLON DE L'ELEVE 1

| EXERCICE 2 |

	1ère semaine	2e semaine.
Lun → Ven: tarifs normales	65	52
Dim → tarifs réduits.	18	12
TOTAL	939.	756.

* Je cherche les prix des tarifs normaux & réduits

- soit x le prix du tarif normal.
- Soit y le prix du tarif réduit.

1° sem $65x + 15y = 939$.

2° sem $52x + 12y = 756$.

Donc $\begin{cases} 65x + 18y = 939 & \times 2 \\ 52x + 12y = 756 & \times 3 \end{cases}$

$\begin{cases} 130x + 36y = 1878 \\ 156x + 36y = 2268 \end{cases}$

$-26x = -390$

$\Rightarrow 26x = 390$.

$x = 15$ et donc

$65x + 18y = 939$

$\hookrightarrow 65 \times 15 + 18y = 939$.

$975 + 18y = 939$.

$18y = -36$.

$y = -2$.

$\begin{cases} 65x + 18y = 939. & \times 2 \\ 52x + 12y = 756 & \times 2{,}5 \end{cases}$

$\hookrightarrow 130x + 36y = 1878$

$130x + 30y = 189$

$6y = -12$

$y = -2$

→ Faux, la fleuriste ne peut pas payer les gens pour qu'ils achètent ~~des~~ fleurs.

ANNEXE III

BROUILLON DE L'ELEVE 2

Bénéfice 756 Frs

on notera : - x pour le tarif normal
- y pour le tarif réduit
~~le prix ... pour les fleurs~~

$$\begin{cases} 65x + 18y = 939 \text{ Frs } ① \\ 52x + 12y = 756 \text{ Frs } ② \end{cases}$$

① $x = \dfrac{939 - 18y}{65}$

② $x = \dfrac{756 - 12y}{52}$

~~$65\left(\dfrac{939 - 18y}{65}\right) + 18y = 939$~~

~~$939 - 18y + 18x$~~

② $52\left(\dfrac{939 - 18y}{65}\right) + 12y = 756$

$751,2 - 14,4y + 12y = 756$

$751,2 - 2,4y = 756$

$-2,4y = 756 - 751,2$

$y = \dfrac{-4,8}{2,4}$

$\boxed{y = -2}$

① $65x + 18 \times -2 = 939$

$x = \dfrac{939 + 36}{65}$

$x = \dfrac{975}{65}$

$\boxed{x = \ldots}$

Verif

$65 \times 13,89 + 36 =$

ANNEXE IV

ENONCE DU BINOME 1

exercice 3:
On dispose d'une table et de deux blocs placés comme sur la figure 1. On trouve que la longueur r est de 32 pouces. Après avoir réarrangé les deux blocs comme sur la figure 2, on trouve que la longueur s est de 28 pouces.

Quelle est la hauteur de la table?

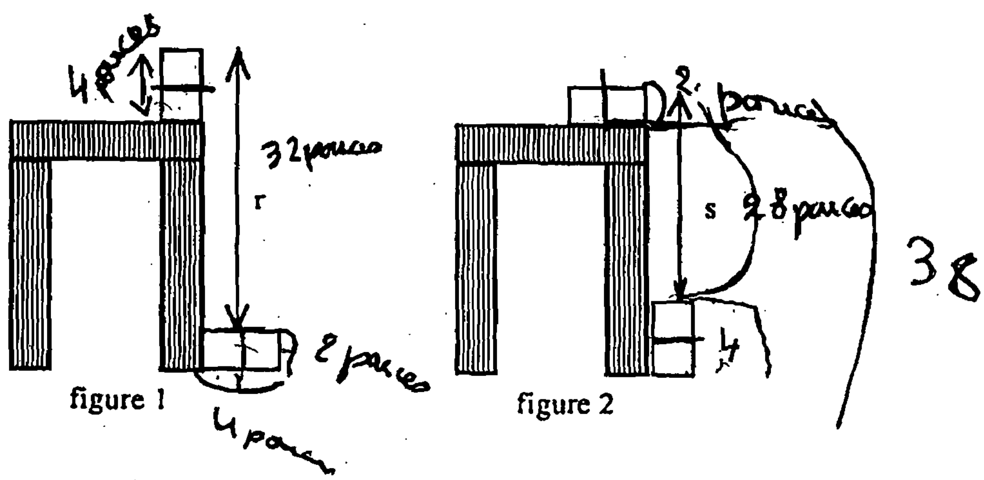

figure 1 figure 2