LES LIMITES D'UN ENSEIGNEMENT DEDUCTIF DE LA GEOMETRIE.

Gilbert ARSAC
Institut Girard Desargues,
Université Claude Bernard, Lyon I

Introduction.

Cet article est divisé en quatre parties : les deux premières constituent une analyse théorique, les deux suivantes la mettent en œuvre pour analyser des observations de classe.

L'analyse théorique vise à montrer que des problèmes rencontrés dans l'enseignement de la géométrie, comme le rôle à attribuer respectivement à la lecture de la figure et à la démonstration, la place de l'évidence et de l'intuition, sont liés à la nature même du contenu à enseigner et surtout que cette affirmation assez banale peut être précisée en utilisant comme outil d'analyse le travail d'axiomatisation de la géométrie entrepris à la fin du dix-neuvième siècle et couronné par l'ouvrage de Hilbert "Les fondements de la géométrie".

Ces réflexions théoriques sont ensuite mises en œuvre pour interpréter les observations réalisées dans deux situations de classe, l'une expérimentale, l'autre "courante". On constate en particulier comment une analyse a priori presque exclusivement mathématique permet de comprendre la nécessité de certaines décisions de l'enseignant qui se traduisent par des manipulations du contrat didactique

Plan détaillé

1)"Ce que peut être une axiomatique de la géométrie"

Partant de la remarque d'Aristote que dans une science démonstrative on ne peut ni tout démontrer, ni tout définir, ce qui introduit le problème des axiomes et des mots premiers, j'examine les solutions apportées par Pascal et Hilbert. Je montre ensuite que dans la mesure où le travail sur les fondements des mathématiques se conclut finalement par une arithmétisation, le problème du rôle que jouent nécessairement l'intuition et l'évidence dans l'apprentissage de la géométrie est dévolu entièrement à l'enseignement.

2) Choix des axiomes: la question de l'évidence

Les caractéristiques générales des discours déductifs s'appliquent en particulier au contenu enseigné en géométrie aussi bien qu'au discours de l'enseignant. Ceci pose les questions suivantes: dans l'enseignement de la géométrie, quels sont les axiomes, les mots premiers ? Quel rôle joue explicitement et implicitement la notion d'évidence ?

Comme l'enseignement de la géométrie a été longtemps dépendant de la pratique euclidienne, je reviens sur la géométrie d'Euclide et je montre que l'axiomatisation de la géométrie, telle qu'elle a été effectuée par Hilbert, est un outil de réponse aux questions précédentes aussi bien en ce qui concerne Euclide que l'enseignement contemporain.

3) Contrat didactique et gestion de l'évidence

Le paragraphe précédent montre que l'évidence joue nécessairement un grand rôle dans l'enseignement de la géométrie, que ce soit explicitement pour les énoncés qui jouent dans les faits un rôle d'axiome, ou implicitement pour la lecture sur le dessin de certaines propriétés indispensables au raisonnement. Ceci pose les questions suivantes :

du point de vue du contrat didactique, quelle gestion de l'évidence dans la classe ? Qui décide qu'un énoncé aura un caractère d'évidence et pourra donc être utilisé comme un axiome, même si ce mot n'est pas prononcé; quel est le rôle du dessin dans les évidences explicites et implicites ? Ce qui est déclaré comme évident par l'enseignant l'est-il pour l'élève ?

L'examen d'une situation de classe expérimentale, celle du "triangle aplati" permet de montrer que ces questions se posent effectivement.

4) Contraintes mathématiques sur la gestion de classe de l'enseignant

Il s'agit ici d'étudier les mêmes questions que dans le paragraphe 3, mais avec plusieurs différences :

- la situation de classe observée n'est plus une situation expérimentale mais une situation de classe "réelle".
- l'étude précédente était centrée sur l'élève et avait surtout un caractère cognitif, même si des conclusions étaient tirées à propos du contrat didactique. Ici l'étude est centrée sur l'enseignant et vise à montrer comment certaines caractéristiques du contenu

mathématique lui-même l'amènent à manipuler les règles du contrat didactique. Ainsi l'étude est plutôt épistémologique et elle montre en particulier qu'une analyse a priori à base presque uniquement mathématique permet de prévoir le comportement de l'enseignant.

1. Ce que peut être une axiomatique de la géométrie

1.1. Termes primitifs et axiomes : le problème

Comme l'explique Pascal (1985) dans "De l'esprit géométrique", une théorie mathématique commence par le choix de mots premiers, d'axiomes et de définitions.

En effet, la définition du sens d'un mot utilise d'autres mots, donc si l'on veut n'employer que des mots bien définis, il faut aussi définir les mots employés dans les définitions, ce qui amène à une régression à l'infini ou bien à la circularité bien connue des définitions des dictionnaires. Ainsi, il faut nécessairement renoncer à tout définir et disposer d'un stock de mots que l'on ne définira pas, que nous désignerons par *mots premiers* ou *termes primitifs*. De même, on ne peut démontrer la vérité d'un énoncé qu'à partir de celle d'autres énoncés déjà connus pour vrais, et si l'on veut tout démontrer, on sera conduit là aussi à une régression à l'infini, il faut donc admettre sans démonstration certains énoncés, ce seront les *axiomes*.

1.2. Termes primitifs et axiomes : la solution de Pascal

> "la géométrie [...] ne définit aucune de ces choses, espace temps mouvement nombre égalité ni les semblables qui sont en grand nombre, parce que ces termes là désignent si naturellement les choses qu'ils signifient, à ceux qui entendent la langue, que l'éclaircissement qu'on en voudrait faire apporterait plus d'obscurité que d'instruction" (Pascal, de l'esprit géométrique, section I).

Ainsi, pour Pascal, les termes primitifs sont associés à des notions naturelles qui sont communes à tous ceux qui entendent une langue : "il y a des mots incapables d'être définis", mais "la nature a suppléé à ce défaut par une idée pareille qu'elle a donnée à tous les hommes". Et Pascal se moque de la confusion dans laquelle on tombe en voulant définir des mots comme celui de temps. Retenons cette idée essentielle que nous possédons naturellement un certain nombre de mots dont l'usage est commun à tous les hommes. Pascal résumera ce point de vue dans la première de ses trois règles pour les définitions que nous reproduisons ci-après :

> **Règles pour les définitions** -1. N'entreprendre de définir aucune des choses tellement connues d'elles-mêmes, qu'on n'ait point de terme plus clairs pour les expliquer. -2. N'admettre aucun des termes un peu obscurs ou équivoques, sans définition. -3. N'employer dans la définition des termes que des mots parfaitement connus, ou déjà expliqués. (Pascal, de l'esprit géométrique, section II)

Pascal n'ira pas plus loin, il ne donne pas de liste précise de termes primitifs, dont on a vu d'ailleurs dans la citation ci-dessus qu'il souligne qu'ils sont "en grand nombre" : on pourra se permettre d'employer sans autre forme de procès, dans un texte mathématique, tous les mots satisfaisant à la règle 1 sans que le nombre en soit limité a priori.

Ayant ainsi réglé par appel à la lumière naturelle le problème des termes primitifs, Pascal donne une solution analogue au problème des axiomes :

> **Règles pour les axiomes.**- 1. N'admettre aucun des principes nécessaires sans avoir demandé si on l'accorde, quelque clair et évident qu'il puisse être. -2. Ne demander en axiomes que des choses parfaitement évidentes d'elles-mêmes. (Pascal, de l'esprit géométrique, section II)

Ici aussi, l'appel à des connaissances communes à tous les hommes sert de base à la solution, ceci est repris négativement dans la première des règles pour les démonstrations :

> **Règles pour les démonstrations** -1) N'entreprendre de démontrer aucune des choses qui sont tellement évidentes d'elles-mêmes qu'on n'ait rien de plus clair pour les prouver. -2)...(Pascal, de l'esprit géométrique, section II)

Cette règle énonce en somme que toute propriété évidente devra être prise comme axiome.

Notons que dans le bref fragment conservé des éléments de géométrie qu'avait entrepris d'écrire Pascal est amorcée une liste précise d'axiomes, désignés comme "théorèmes connus naturellement", alors qu'on ne trouve pas de liste précise de termes primitifs: la pratique de Pascal est conforme à sa théorie et à la tradition euclidienne puisque les Éléments d'Euclide comportent une liste d'axiomes, mais pas de liste de termes primitifs.

La position de Pascal est en fait assez proche de celle d'Aristote : mots premiers (termes non définis) et axiomes sont considérés comme évidents. C'est cette évidence qui rend non seulement illusoire mais superflue toute définition pour les mots premiers et toute tentative de preuve pour les axiomes. Notons toutefois que chez Pascal, la lumière naturelle qui rend oiseuse la définition des mots premiers conduit seulement à un accord sur le sens ordinaire du discours "ainsi, ce n'est pas la nature de ces choses que je dis qui est connue de tous ; ce n'est simplement que le rapport entre le nom et la chose" (De l'esprit géométrique, section I, cf. aussi le commentaire de Chevalley, 1995, p. 35). Autrement dit, tout le monde sait de quoi on parle quand on parle de point ou de droite, mais ceci n'implique pas que tout le monde se fasse la même idée de la nature du point et de la droite.

1.3. Termes primitifs et axiomes : la solution de Hilbert

Pour Pascal, les mots premiers avaient un usage fixé par la lumière naturelle, et, en conséquence, n'avaient pas besoin d'être définis. Hilbert prend en quelque sorte cette conséquence comme caractérisation des mots premiers : ce sont ceux que l'on ne définira pas.

Pour Pascal, nous disposions d'un immense stock de mots premiers. Hilbert, lui, en donne une liste finie et exhaustive qui dans le cas de la géométrie se réduit aux six mots : *point, droite, plan, entre, incident. congruent.* Notons tout de suite que le mot incident admet des équivalents linguistiques: au lieu de dire qu'un point est incident à une droite ou qu'une droite et un point sont incidents, on pourra dire que le point est sur la droite ou que la droite passe par le point, etc..... Ces mots premiers n'ont a priori pas d'autres propriétés que celles que vont fixer les axiomes.

La légende raconte d'ailleurs qu'Hilbert s'était aperçu que finalement on pouvait remplacer les mots premiers par n'importe quels mots du langage courant, comme bière ou chaise, pourvu qu'on leur impose les règles opératoires définies par les axiomes. Ainsi, les mots premiers sont *en droit* indépendants de l'intuition, mais Hilbert ne dissimule pas que, *en fait, les axiomes qui les relient sont inspirés par l'intuition.* Voici des extraits de son texte :

> Comme l'arithmétique, la géométrie n'exige pour son élaboration qu'un petit nombre de propositions fondamentales simples. Ces propositions sont les axiomes de la géométrie. Depuis Euclide, l'établissement de ces axiomes et l'étude de leurs relations ont fait l'objet de travaux nombreux et excellents. Ce problème est celui de l'analyse de notre intuition de l'espace.[...]. (Hilbert, 1899, introduction, p. 10-11)

Voici maintenant la présentation des axiomes par Hilbert :

> Définition : "Nous pensons trois systèmes différents de choses ; nous nommons les choses du premier système des points ; nous les désignons par des majuscules A, B, C,...; nous nommons droites les choses du deuxième système et nous les désignons par des minuscules a, b, c,...; nous appelons plans les choses du troisième système et nous les désignons par les caractères grecs, α, β, χ,... Les points constituent les éléments de la géométrie linéaire ; les points et les droites sont les éléments de la géométrie plane ; enfin les points, les droites et les plans sont ceux de la géométrie de l'espace ou de l'espace lui-même.
>
> Entre les points, les droites et les plans, nous imaginons certaines relations que nous exprimons par des expressions telles que "être sur", "entre", "congruent"; la description exacte et appropriée au but des mathématiques de ces relations est donnée par les axiomes de la géométrie.[...] (cf. Hilbert, loc. cit., ch 1, §1, p. 11).

Ainsi, d'une part, Hilbert ne dissimule pas que son but est bien *d'analyser l'intuition de l'espace*, et d'autre part, sa présentation des axiomes et des mots premiers fait usage non seulement de mots de la langue courante, comme "penser", "majuscules", etc...mais aussi de mots à la frontière entre cette langue et la langue mathématique :

"système", "différent", "chose" en opposition à "relation", "espace"...Le statut de ces derniers mots est manifestement celui des mots premiers au sens de Pascal : par exemple, tout le monde doit être d'accord sur le fait qu'un point et une droite sont des "choses" mais que le fait que le point soit sur la droite est une "relation " entre ces choses qui s'exprime par le mot premier *incident* sous la forme : *le point A et la droite a sont incidents* qui admettra pour expression synonyme *le point A est sur la droite a*, ou *la droite a passe par A*. Tout commentaire sur la nature des "choses" et des "relations" serait oiseux. L'usage courant de la langue, qui d'ailleurs ici, en ce qui concerne la notion de relation, présuppose un minimum de culture mathématique antérieure, fournit un réservoir inépuisable de tels mots. Il est vrai qu'au total, le langage mathématique, fort pauvre, n'en utilise pas beaucoup.

Ainsi, la compréhension du travail de Hilbert repose en partie sur une appréhension du sens courant d'un certain nombre de mots ce qui, pour certains d'entre eux, suppose manifestement une culture mathématique antérieure. Ceci souligne que cet exposé de Hilbert ne saurait être une initiation à la géométrie et met en évidence les limites de la rigueur de cet exposé. Cette limitation de la "rigueur" est inévitable pour toute science qui s'exprime dans un langage, or il semble difficile d'imaginer une science non exprimée dans un langage, c'est même, d'après Aristote, l'une des conditions pour qu'un savoir mérite le nom de science...(cf. Granger, 1994, ch.13 : l'explication dans les sciences sociales, p. 244).

1.4. Synthèse

1) Pour Hilbert, et pour tous les mathématiciens me semble-t-il, l'énoncé des axiomes de la géométrie se fonde sur les propriétés intuitives des points, droites etc... On pourrait dire que c'est la position d'Euclide et interpréter, en partie, l'histoire des débats sur les fondements de la géométrie comme celle d'une défiance croissante vis-à-vis des vérités considérées comme intuitivement évidentes, mais qui aboutit à la constatation qu'on ne peut pas s'en passer totalement.

2) Une fois les axiomes énoncés on doit vérifier que l'emploi des objets de la géométrie qui est fait dans la démonstration finale d'une propriété (mais pas dans la recherche, qui, elle, fait appel à l'intuition) ne fait usage que des relations exprimées dans les axiomes et les définitions et est en droit indépendant de toute interprétation des objets de la géométrie. Cette idée est clairement exprimée par Pasch en 1882, et déjà présente chez Gergonne, au début du dix-neuvième siècle : les axiomes donnent en quelque sorte une *définition implicite* des objets mathématiques qui y figurent en disant *ce que nous pouvons affirmer d'eux* (cf. Kline, 1980, p. 349, et pour le texte de Pasch, Blanché R.(1955) p. 29-31, cité in Guichard J., 1993,). On peut dire que cette position est admise depuis par tous les mathématiciens à l'exception peut-être de certains intuitionnistes.

3) On peut alors formaliser entièrement la rédaction de la démonstration en créant en particulier un symbolisme pour la logique, éliminant ainsi tout recours à langue courante, et étudier les suites de symboles (objets concrets) que constituent alors les démonstrations, c'est le programme connu sous le nom de formalisme de Hilbert. Voici des extraits de la conférence de 1927 où il le précise:

[...] Depuis cinq ans, j'étudie les fondements des mathématiques en élaborant une théorie nouvelle de la démonstration. Je voudrais réduire tout énoncé mathématique à la présentation concrète d'une formule obtenue rigoureusement et donner ainsi aux notions et déductions mathématiques une forme irréfutable montrant bien l'ensemble de la science.[...] Comme toute autre science, la mathématique ne peut pas être construite sur la seule logique. Une donnée est indispensable, composée d'objets concrets, résultant d'une expérience antérieure à la pensée.[...] En mathématiques, les objets que nous examinons sont de signes qui pour nous sont clairs et reconnaissables.[...] L'idée fondamentale de ma théorie de la démonstration est la suivante.

Toutes les phrases qui énoncent des propriétés mathématiques seront traduites en formules. Celles-ci se distinguent des formules mathématiques par la présence, en plus des signes habituels, de signes logiques." (Hilbert, 1899, Rossier éditeur, appendice IX, p. 261)

Il me semble abusif de déduire de ce texte, qui expose une méthode de travail pour attaquer le problème du fondement des mathématiques, que Hilbert avait oublié ce qu'il écrivait au sujet de l'intuition dans son ouvrage sur les fondements de la géométrie, que nous avons cité plus haut, et qu'il n'a d'ailleurs pas modifié dans l'édition de 1930 (septième édition, la dernière publiée du vivant de Hilbert). Ainsi, il me semble légitime d'admettre que Hilbert était d'accord avec les points 1 et 2 de la synthèse ci-dessus tout en adoptant un point de vue formaliste quant au problème du fondement des mathématiques. Notons que Hilbert n'a jamais appliqué son programme aux fondements de la géométrie en ce sens qu'il n'a pas formalisé complètement les démonstrations de son ouvrage.

La position de Hilbert apparaît comme la conclusion de la chasse à l'évidence à laquelle se sont livrés les mathématiciens de la fin du dix-neuvième et du début du vingtième siècle, période dont Bouligand pourra parler comme celle du "crépuscule des évidences" (cf. Pont, 1995). Or l'évidence repose sur la référence à un donné "intuitif", la chasse à l'évidence apparaît donc comme une chasse à l'intuition, ce qui ne fut pas accepté sans débat. Voici ce qu'écrit Picard à propos de travaux de Lebesgue (cité d'après Gispert, 1995) :

> Monsieur Lebesgue [...] n'est toutefois pas un intransigeant. On ne trouve pas chez lui cette méfiance de l'intuition qui est devenue une manie chez certains de nos contemporains.

Baire au contraire, écrit (cf. Gispert, loc. cit.):

> [...] certaines théories de physique, de chimie, de minéralogie, ne sont pas sans présenter quelque analogie avec le discontinu mathématique. Dans tous les cas, en dépit du vieil adage heureusement démodé, rien ne permet d'affirmer "que la nature ne fait pas de saut". Dans ces conditions, le devoir du mathématicien n'est-il pas de commencer par étudier, in abstracto, les rapports de ces deux notions, continu et discontinu ?

On remarque dans cette citation un double mouvement: le rejet de l'adage intuitif "la nature ne fait pas de saut" au profit d'une étude "in abstracto", mais en s'appuyant sur la possibilité d'application aux sciences de la nature.

La chasse aux fondements des mathématiques s'achève comme on sait par une victoire partielle, car le théorème de Godel dit que cette victoire ne peut pas être totale. En ce qui concerne la géométrie, le sommet est atteint avec "Les fondements de la géométrie" de Hilbert cités plus haut qui fournissent pour la première fois une présentation de la géométrie fondée sur une liste précise et complète d'axiomes et de mots premiers. Toutefois, dans le même temps, la géométrie a perdu de son prestige en ce sens qu'on ne fait plus confiance à l'intuition géométrique pour fonder les mathématiques. C'est ce qu'on appelle l'arithmétisation car l'intuition qui sera considérée comme la plus sûre est celle du nombre entier. Dans l'ouvrage de Hilbert, ceci se manifeste par le fait que la non-contradiction du système d'axiomes de la géométrie est démontrée en faisant appel à des modèles numériques.

Mais ce règlement du problème des fondements par "l'arithmétisation" ne règle pas le problème des commencements des mathématiques chez un individu, c'est-à-dire de leur apprentissage : l'échec (partiel) de la réforme des mathématiques modernes montre sans doute qu'un point de départ intuitif en géométrie, indépendant de l'intuition du nombre entier, est inévitable. Mais il n'y a plus de référence mathématique "savante" pour légitimer ce point de départ intuitif.

1.5. Conclusion de la partie 1

L'un des problèmes fondamentaux de l'enseignement des mathématiques, mal résolu par la réforme des "mathématiques modernes", est de savoir quelles conclusions tirer de ce grand mouvement de rigueur, de remise en cause de l'évidence, du début du siècle. C'est un problème de transposition didactique. Il est particulièrement aigu en géométrie puisque l'une des caractéristiques des débats auxquels nous avons fait allusion, est la remise en cause des évidences géométriques et la recherche de fondements plus rigoureux par une *arithmétisation* qui fonde les mathématiques sur le nombre et non plus sur la géométrie. Par exemple, en définissant le plan comme espace affine réel de dimension deux muni d'un produit scalaire, on insère la géométrie euclidienne plane dans une progression qui repose au départ sur le nombre entier. Ainsi, l'enseignement élémentaire de la géométrie se retrouve "orphelin" scientifiquement parlant, quand il s'agit de fonder son contenu : c'est un problème réglé au niveau du savoir savant, mais ce règlement ne lui est pas d'un grand secours et a surtout des aspects négatifs.

Par exemple, dans les traités "classiques" d'enseignement de la géométrie de la première moitié de ce siècle figuraient des références à des expériences, certes purement fictives, comme :

> Une feuille de papier peut nous donner une idée approchée d'une surface. Elle limite en effet deux régions de l'espace, celles qui sont situées des deux côtés de la feuille. [...] On arriverait à la notion de surface en considérant une feuille de papier dont l'épaisseur diminuerait indéfiniment. (Hadamard, 1898, p.1).

Une ligne droite indéfinie tracée sur un plan sépare sur cette surface deux régions situées chacune d'un côté de la droite et que l'on nomme des demi-plans. On ne peut passer par un chemin continu de l'une de ces régions à l'autre sans traverser la droite. Ces deux régions peuvent d'ailleurs être superposées l'une à l'autre en faisant tourner l'une d'entre elles autour de la droite donnée comme charnière. (idem, p.5)

Ce style de référence à la réalité (imaginée) a disparu, est-ce opportun ou pas ? On peut se poser la même question à propos de la disparition du langage temporalisé et réglé sur la construction progressive de la figure suivant lequel on indiquait par exemple qu'on "prolongeait le segment [AB] jusqu'à ce qu'il rencontre la droite d en un point M", alors que maintenant on dit plutôt : "soit M le point commun aux deux droites d et (AB)". Voici un exemple où se combinent ce langage et l'appel à l'expérience imaginée :

Pour prolonger en ligne droite et en continuité une ligne droite limitée AB, on peut concevoir de prendre sur cette droite, entre ses extrémités, deux points intermédiaires C et D, et de faire glisser ensuite le système le long de ces deux points supposés fixes, comme une tringle supportée par deux clous, de façon que A et B se déplacent jusqu'en A' et B'. (Barbarin, 1928 p. 18)

Un aspect paradoxal des problèmes ainsi soulevés est le suivant: la recherche d'une rigueur plus grande dans l'exposé de l'analyse a souvent été motivée par des impératifs d'enseignement, où ce phénomène est d'ailleurs curieusement déclaré sans signification épistémologique véritable :

On peut évoquer plusieurs raisons pour rendre compte de ces besoins nouveaux. La première tient à un fait contingent, sans signification épistémologique véritable, à savoir l'obligation dans laquelle se trouvent les savants d'enseigner. Jusqu'à la fin du XIXème siècle, les manuels sortent de la plume de personnages plutôt secondaires; mais en particulier avec la création en France des grandes écoles, ceux qui construisent la science sont payés pour enseigner et cette activité occasionne une réflexion dont la pratique même de la science aurait pu se passer. (Pont, loc. cit. p. 121)

2. Choix des axiomes: la question de l'évidence

Remarquons tout d'abord que même le problème des mots premiers se pose dans l'enseignement, il suffit pour s'en convaincre de considérer la définition suivante, extraite d'un manuel de collège contemporain :

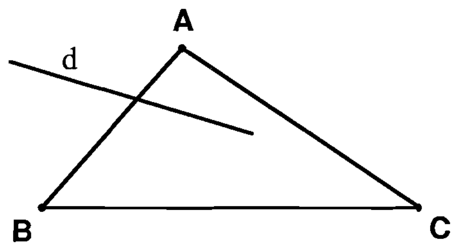
On dit qu'un quadrilatère est convexe si ses diagonales se coupent à l'intérieur

Ici le mot "convexe", ou l'expression "quadrilatère convexe" sont définis à l'aide des mots "diagonales", "se coupent" et "intérieur". Si "se couper" est une expression que comprennent certainement les élèves, on peut douter que la définition de "diagonale" et surtout d'"intérieur" soit plus facile à expliciter que celle de "convexe". En fait une telle définition d'un quadrilatère convexe, si elle est utilisée, ne peut l'être qu'en commentaire d'un dessin qui montre la forme typique d'un quadrilatère convexe : ainsi les élèves savent de quel type de dessin il s'agit dans ce cas là et qui sert de référent pour l'usage solidaire des trois mots convexe, intérieur, diagonale.

De même, il est évident que tout exposé déductif ne peut que reposer, comme l'explique Pascal, sur des énoncés admis comme vrais et jouant donc le rôle d'axiomes. Toutefois, une difficulté se présente ici : les programmes mis en place en France après la réforme des mathématiques modernes ne présentent pas un ordre déductif clair pour l'enseignement de la géométrie. Il s'agit certes d'un enseignement déductif, mais localement déductif, pourrait-on dire, ne reposant sur aucune axiomatique globale implicite, contrairement à l'enseignement traditionnel de la géométrie, antérieur à la réforme des mathématiques modernes, centré sur l'usage des cas d'égalité des triangles et sous lequel se laissait encore apercevoir l'axiomatique euclidienne.

C'est pourquoi il n'est pas inutile de revenir d'abord sur les éléments d'Euclide: dans la mesure où l'axiomatique de Hilbert, comme nous l'avons dit plus haut, ne surgit pas sans antécédent historique, mais représente l'achèvement d'un travail entrepris par d'autres mathématiciens, tenant compte de l'ébranlement des géométries non euclidiennes, mais aussi d'une relecture critique de l'œuvre d'Euclide. C'est ainsi que le célèbre Axiome de Pasch, rappelé ci-dessous,

> Soit ABC un triangle (c'est-à-dire trois points n'appartenant pas à une même droite) et d une droite coupant (AB) entre A et B, alors d rencontre aussi l'un des côtés [BC] ou [AC]. Si C n'appartient pas à d, d ne rencontre que l'un des côtés [BC] ou [AC].



a été énoncé par ce mathématicien à partir de la remarque qu'Euclide y faisait appel implicitement. Hilbert commence d'ailleurs son ouvrage sur les fondements de la géométrie en rendant hommage aux travaux antérieurs, y compris ceux d'Euclide.

Cependant l'œuvre de Hilbert n'est pas une consolidation, mais bien plutôt une refonte de celle d'Euclide. Les axiomes y sont regroupés en cinq groupes : axiomes d'incidence, d'ordre, de congruence, de continuité et des parallèles, ce dernier groupe comportant un seul axiome, le célèbre "postulat d'Euclide" :

> Soit une droite a et un point A extérieur à a ; dans le plan déterminé par a et A, il existe au plus une droite qui passe par A et qui ne coupe pas a.

Dans la suite, nous ferons référence essentiellement aux deux premiers groupes d'axiomes, en nous restreignant à la géométrie plane (pour un énoncé complet, cf. Arsac, 1996) :

Axiomes d'incidence

I1) Étant donné deux points P et Q distincts, il existe une unique droite incidente à P et Q (ce qu'on exprimera aussi par : passant par P et Q).

I2) Étant donné une droite, il existe au moins deux points distincts incidents à cette droite (ce qu'on exprimera aussi par: deux points distincts sur cette droite).

I3) Il existe trois points non alignés (c'est-à-dire tels qu'aucune droite ne soit incidente aux trois).

On notera (PQ) l'unique droite passant par les deux points distincts P et Q.

Axiomes d'ordre

Le but de ces axiomes est de régler l'emploi du terme premier "entre", on note A*B*C le fait que B est entre A et C.

O1) Si A*B*C, alors A, B et C sont trois points distincts sur une même droite et C*B*A.

O2) Étant donné deux points distincts B et D, il existe des points A, C, E appartenant à la droite BD tels que A*B*D, B*C*D, B*D*E.

O3) Axiome de Pasch.

Cette classification en groupes permet d'identifier assez facilement les axiomes implicitement utilisés par Euclide, précisons un peu ce que nous entendons par "implicitement utilisés".

a) L'analyse logique de chaque raisonnement d'Euclide permet de mettre en évidence des lacunes dans l'enchaînement des propositions, le cas archi-connu se présente dès la proposition 1 du livre I : pour démontrer l'existence d'un triangle équilatéral de base [AB] donnée, Euclide considère les deux cercles de centres A et B passant respectivement par B et A, et leur point commun C. Mais il ne démontre pas l'existence de C. D'une manière générale, il faut souvent, pour obtenir un raisonnement déductif complet, ajouter aux démonstrations d'Euclide des prémisses logiquement indispensables, soit des définitions, soit des énoncés de propriétés (qui ont du point de vue moderne, soit un statut d'axiome, soit un statut de théorème) à celles explicitement utilisées par Euclide.

b) L'axiomatique de Hilbert permet de regrouper ces propriétés suivant le groupe d'axiomes auquel elles se rattachent, par exemple, la propriété d'intersection de deux cercles utilisée implicitement dans la proposition 1 ressortit au groupe des axiomes de continuité. On obtient ainsi une classification simple des prémisses implicites dans les démonstrations d'Euclide : elles relèvent du groupe des axiomes d'ordre et de continuité, mais aussi des deux axiomes d'incidence que nous considérons encore maintenant comme particulièrement évidents : I2 et I3.

Tout le monde est d'accord avec le fait que ces prémisses implicites étaient en fait lues sur le dessin, donc évidentes du point de vue d'Euclide, ce qui ne veut pas dire qu'Euclide était en possession d'une théorie de cet usage de l'évidence. Citons ici Dhombres, lors d'un récent cours d'Histoire des mathématiques à Tunis, qui qualifie l'épistémologie d'Euclide d'"épistémologie de l'évidence", en ajoutant que cette épistémologie n'était pas consciente à Euclide.

Si l'on analyse maintenant les manuels de géométrie français actuels, on trouve que ce sont les mêmes propriétés qu'Euclide lisait sur le dessin qui vont encore y être lues : il n'y a jamais aucun emploi explicite des propriétés d'ordre, et ce sont les mêmes propriétés du groupe des axiomes d'incidence qui sont lues sur le dessin de façon implicite et donc considérées comme évidentes.

La coïncidence entre la part d'implicite chez Euclide et dans l'enseignement actuel s'étend par exemple à une notion beaucoup plus complexe comme celle d'aire, qui n'a fait que tardivement l'objet d'une axiomatisation. La notion utilisée par Euclide et dans l'enseignement, parente avec la notion intuitive de "place occupée dans le plan" est très éloignée d'une forme rigoureuse. On verra dans la partie 4 quels problèmes cela peut soulever pour un enseignant.

Ainsi, malgré les évolutions, il reste qu'un certain degré d'appel à la figure s'est maintenu à peu près, d'Euclide à nos jours, dans l'histoire de l'enseignement. Cette constance appelle une explication que je ne possède pas vraiment (elle pourrait être d'ordre cognitif). En tous cas, si l'on n'accepte pas ce genre de lecture sur le dessin, si l'on veut tout démontrer, on aboutit rapidement à une complication (cf. Arsac loc. cit.) qui exclurait la géométrie de l'enseignement élémentaire

Bien entendu, ce degré d'appel à la figure toléré dans le savoir enseigné n'est pas rigoureusement codifié (ce serait en fait impossible). Par exemple, lorsqu'on démontre que les médiatrices d'un triangle sont concourantes, ce qui est souvent la première démonstration proposée aux élèves, on considère d'abord le point commun à deux médiatrices pour montrer ensuite qu'il est aussi sur la troisième. Suivant les manuels, on constate que l'existence de ce point, c'est-à-dire le fait que ces deux médiatrices ne peuvent pas être parallèles, est démontrée ou non.

Des phénomènes beaucoup plus "fins" peuvent apparaître. Considérons par exemple I1, le seul des axiomes d'incidence qui soit assez fréquemment énoncé dans les manuels :

Par deux points distincts A et B, il passe une droite et une seule.

Cette droite est notée (AB), et même si cette notation normalisée n'est pas rattachée explicitement à cet axiome, elle n'a de sens que grâce à lui, en particulier, elle n'a pas de sens si A=B. Or on constate qu'avant de parler de la droite (AB) aucun professeur de l'enseignement du second degré ne prend la peine de démontrer que $A \neq B$, ceci est toujours lu sur le dessin !

3. Contrat didactique et gestion de l'évidence

Voici un exemple, le "triangle aplati", montrant la pertinence de ces questions :

3.1. Présentation de la situation expérimentale

L'énoncé suivant a été proposé à des élèves : "*Existe-t-il un triangle dont les côtés mesurent 5 cm, 9 cm et 4 cm ?*"

Dans un premier temps, ces élèves travaillaient par groupes de quatre sur cet énoncé et produisaient une affiche donnant leur réponse et une justification, dans un deuxième temps un débat était organisé autour des affiches et de la recevabilité des arguments avancés (pour une description détaillée, cf. Arsac, Mante, 1996).

3.2. Analyse a priori

Une première stratégie pour les élèves consiste ici à construire le triangle en utilisant un algorithme enseigné dès l'école élémentaire : tracer un côté, puis chercher l'intersection des deux cercles centrés aux extrémités et ayant pour rayons les mesures des deux autres côtés.

L'existence de cette stratégie fondée sur le constat graphique assure déjà la possibilité de dévolution du problème. L'instabilité des résultats du dessin pourrait laisser penser qu'elle devrait mener à des résultats aléatoires. En fait, il n'en est rien, pour deux raisons : d'une part, la manipulation du compas par des élèves de cet âge, en vue de tracer un cercle de rayon donné, produit de façon privilégiée des erreurs "par excès", d'autre part, quand le maître demande de tracer un triangle, c'est en général qu'il existe ; les dessins dans lesquels les cercles ne se rencontrent pas, ou qui fournissent (exceptionnellement) un triangle aplati devraient donc apparaître comme surprenants aux yeux des élèves et être recommencés. Ainsi nous pensons que la plupart des tracés vont mener à un vrai triangle et que les dessins contradictoires seront non seulement minoritaires mais suspects aux yeux des élèves, ce qui rend très peu probable une réponse autre que "oui le triangle existe" dans cette stratégie.

Pour qu'apparaisse la réponse contradictoire "non le triangle n'existe pas", il faut donc qu'une autre démarche soit disponible s'appuyant sur l'évidence de l'alignement des points. Cet appel à l'évidence est, comme nous l'avons dit, inévitable dans l'enseignement de la géométrie, en particulier pour justifier le choix des axiomes. Historiquement également certains énoncés géométriques, et pas seulement l'énoncé des axiomes, ont été considérés comme évidents, ce fut le cas pour l'inégalité du triangle dont la démonstration par Euclide apparaît comme superflue aux Épicuriens (Euclide, tome I, p. 234) et à Arnauld (1674, ch IX) car le plus court chemin d'un point à un autre est la ligne droite. Nous nous intéressons ici à un énoncé voisin qui pourrait de même être considéré comme évident. Nous serons amenés à parler de "raisonnement intuitif" pour ce constat d'évidence car nous verrons que l'alignement est explicitement justifié par les élèves par le fait que 5+4=9.

Ainsi, cette situation apparaît comme un lieu où peuvent s'affronter le recours à l'expérience au sens propre, concrète, et l'expérience fictive ou imaginée qui donneront dans ce cas des résultats contradictoires. C'est donc bien une expérience permettant de tester si certains énoncés sont ou non évidents pour certains élèves.

3.3. Analyse a posteriori

Cette situation a été expérimentée dans 7 classes de 5ème, soit un total de 36 groupes. Nous compléterons nos analyses à l'aide des observations faites sur des binômes d'élèves.

3.3.1 - Phase de recherche en groupe

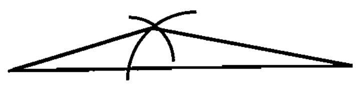
Les résultats amènent à distinguer trois types d'affiches :

- type 1 : *affiches répondant "oui", d'après un constat graphique* (18 réponses sur 36 de ce type, présent dans toutes les classes)

Ainsi :

Oui, il existe un triangle dont les côtés mesurent 5 cm, 4 cm et 9 cm.
Explication : Nous traçons une hypoténuse de 9 cm. Nous mettons la pointe du compas sur l'hypoténuse, puis nous traçons un arc de cercle de 5 cm et nous faisons la même chose pour 4 cm. Les deux arcs de cercles forment un point et nous n'avons plus qu'à rejoindre le point de l'hypoténuse au point des arcs de cercles pour tracer le triangle.

Exemple :



Aucune de ces affiches ne donne d'autre explication que le constat d'une possibilité de tracé accompagné éventuellement de la description du procédé de tracé ou de remarques sur la forme du triangle (très aplati, ou bien de formes différentes suivant le côté par lequel on commence).

Dans tous les groupes observés qui ont produit une affiche de ce type, on constate, comme prévu, que ce sont des essais de construction qui conduisent les élèves à conclure à l'existence du triangle. Parfois les dessins donnent un triangle aplati ou bien qui n'existe pas, mais la répétition des dessins conduit finalement à une réponse positive, conformément à l'analyse a priori. Dans certains de ces groupes apparaît une certaine perplexité quant à la nature de l'explication demandée par l'enseignant puisqu'un constat graphique suffit.

- type 2 : *affiches répondant "non", sur la base d'un raisonnement intuitif* (14 réponses de ce type présent dans 6 classes sur 7, dont une répondant "oui le triangle existe mais il est plat"). Ainsi :

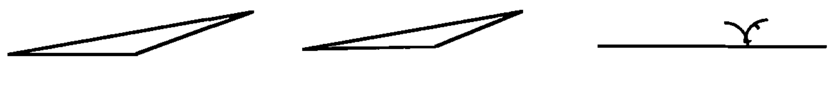
Non, il n'existe pas car si on additionne les deux plus petits nombres des trois, cela donne le même nombre que le troisième.
Il faudrait que les deux plus petits nombres donnent un chiffre plus grand que le troisième : ex 9 cm, 5 cm, 6 cm (5+6=11)

Parmi les affiches de ce type, 10 justifient leur réponse par le fait que 9 = 5 + 4, et parmi celles-là, 5 énoncent l'inégalité triangulaire, 4 ne commentent pas leur réponse.

Dans les groupes observés qui ont produit une affiche de ce type il n'y a jamais eu unanimité pour la réponse "non", il y a toujours eu un débat entre les deux positions. L'argument fondamental en faveur de l'alignement des points a été l'égalité 9 = 5 + 4 et éventuellement l'inégalité triangulaire découverte à cette occasion.

- type 3 : *Affiches répondant : "non" quand on commence à tracer le triangle par le côté 9 et "oui" si l'on commence par le côté 5 ou 4* (4 réponses de ce type rencontrées dans 3 classes). Ainsi :

Il en existe 2 si on prend comme base 4 ou 5 cm. Si on prend 9 cm comme base du triangle, les arcs de cercle ne se croisent pas.



4 cm comme base 5 cm comme base 9 cm comme base

Les affiches de type 3 mettent en évidence un phénomène non prévu : certains élèves pensent que l'existence du triangle dépend du côté par lequel on commence pour effectuer la construction. Ce phénomène apparaît dans toutes les classes au niveau des groupes mais il ne s'exprime pas toujours dans les affiches : il n'est jamais présent dans les affiches de type 2, mais parmi les affiches de type 1, deux précisent que le triangle obtenu ne dépend pas de l'ordre des côtés, la question a donc sans doute a été débattue dans le groupe, et trois précisent au contraire que le triangle obtenu n'est pas le même dans les trois cas. Ainsi, 9 affiches au total soulèvent ce problème.

Aucun des quatre groupes ayant produit une telle affiche n'a été observé. Mais les expérimentations avec des binômes d'élèves nous laissent penser que les affiches de type 3 ont certainement été produites après un débat dans lequel le raisonnement intuitif a conforté, ou même précédé, un constat d'aplatissement limité au cas où le premier côté tracé a pour longueur 9.

Conclusion sur cette étape. Comme prévu, tous les élèves rentrent facilement dans la résolution du problème et deux positions apparaissent : confiance dans le constat graphique ou appel au raisonnement intuitif, qui conduisent bien à des résultats incompatibles. Pour certains élèves, l'alignement des points est tellement évident qu'ils estiment le dessin inutile, ce qui donne lieu à des débats presque caricaturaux avec les partisans du constat graphique.

Cependant les observations font apparaître que les deux positions décrites ci-dessus sont les bornes extrêmes entre lesquelles s'inscrivent toutes sortes de positions intermédiaires dans lesquelles on cherche à concilier les deux points de vue, à les renforcer l'un par l'autre :

- contrôle du raisonnement intuitif par le dessin et réciproquement dans le cas où celui-ci a été induit par un constat graphique d'aplatissement ;
- appel à l'intuition dans le seul cas où l'on commence par 9.

L'observation montre aussi que le dessin finit par jouer un rôle dans toutes les argumentations.

Tout ceci précise l'analyse a priori, mais ajoute une nuance : les recours à l'expérience et à l'intuition sont conçus a priori comme complémentaires par les élèves, ainsi le conflit entre les deux positions ne saurait aboutir au rejet de l'une mais à leur mise en relation.

3.3.2 - Analyse a posteriori de la phase de débat

Le débat porte sur les thèmes suivants :
- l'aplatissement du triangle en général ;
- l'aplatissement dans le seul cas où l'on commence par le côté de longueur 9 cm ;
- le rôle de l'ordre des côtés ;
- le nombre de points communs à deux cercles tangents.

Cependant des invariants apparaissent : dans tous les cas, le débat oppose les deux positions, constat graphique et raisonnement géométrique, ce sont toujours les mêmes arguments qui apparaissent, et enfin le débat débouche fatalement sur le terrain du constat graphique. Cet aboutissement provient du fait que c'est le seul terrain sur lequel les partisans du raisonnement intuitif peuvent espérer convaincre les partisans du constat graphique. A partir de ce moment des contradictions apparaissent à l'intérieur même de l'exploitation du constat graphique. Il suffit de quelques extraits de débat pour illustrer ces constatations.

• Arguments fondés sur le constat graphique :
- *"oui, car le dessin est bon, les mesures sont bonnes".*
- *"ça forme un triangle, je suis désolé, cette fois, c'est pas moi, y se croisent les points".*

• Arguments a priori fondés sur le raisonnement intuitif :
- "*Non, car la somme des côtés 5 cm et 4 cm est égale à 9 cm, donc ça fait une droite et pas un triangle*".
- "*Pour que ça fasse un triangle il faudrait que les côtés de 5 cm et 4 cm soient supérieurs à 9 cm*" (allusion à l'inégalité triangulaire).
- *"c'est logique que ça se touche, parce que 5 et 4 ça fait 9""*

• Arguments exprimant le conflit entre les deux positions sur le terrain du constat graphique : les partisans du raisonnement intuitif contestent l'exactitude des dessins menant à un vrai triangle ou montrant plusieurs points communs aux deux cercles.
- *Non, car le deuxième triangle est faux, les arcs de cercle se coupent sur la droite (9 cm de base) donc ça ne fait pas un triangle*" ou encore "... *Le deuxième triangle est faux car il est plus "large"*"".
- "*Si on prend le haut on trouve pas un côté de 4 cm on trouve 3,9 oui on a vérifié...même sur le dessin* "

• Inversement, les partisans du constat graphique contestent la possibilité de réaliser un dessin idéal traduisant les affirmations a priori des partisans du raisonnement intuitif, comme celle-ci :

Si on fait à partir des mesures normalement ça doit tomber pile dessus.
Ils répondent en effet :
Oui, oui, mais ils n'y sont pas arrivés.

3.4. Conclusion

L'expérience ci-dessus nous fait passer du registre épistémologique au registre cognitif : la chasse logique aux évidences, tout en rappelant que le rôle de l'évidence doit être maîtrisé dans les mathématiques, laisse ouverte la question du rôle nécessaire de l'évidence dans l'apprentissage de la géométrie.

La conclusion la plus frappante de ce qui précède est que l'évidence n'est pas la même pour tous les élèves. On peut en conclure qu'un enseignement de la géométrie doit avoir en particulier pour effet une éducation de l'intuition, celle-ci ne saurait donc être considérée comme conséquence de la perception seule.

4. Contraintes mathématiques sur la gestion de classe de l'enseignant

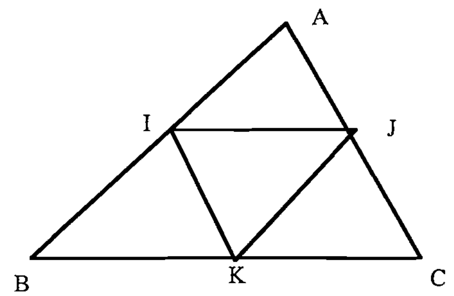
4.1. Présentation de la situation : buts, énoncé

La situation étudiée ici n'a pas été conçue dans un but d'innovation ou d'expérimentation d'une théorie didactique. *C'est une situation d'initiation à la démonstration en quatrième* telle que la pratique un enseignant qui a eu l'amabilité de laisser enregistrer cette séance. Le décryptage complet de cet enregistrement est beaucoup trop long pour être reproduit ici.

Il s'agit d'une situation de classe classique dans laquelle l'enseignant va diriger dans un dialogue avec les élèves la résolution d'un problème et la rédaction collective de sa démonstration. Avant de décrire son déroulement et les conclusions qu'on peut en tirer, nous allons en faire une analyse a priori limitée à peu près exclusivement au point de vue mathématique, qui dans ce cas va nous permettre de prévoir en partie certains comportements de l'enseignant (alors que l'analyse a priori est en général utilisée pour étudier les comportements des élèves).

Voici le début du décryptage qui vous indique comment est gérée la classe et vous donne l'énoncé de l'exercice.

-Prof. Exercice 18 p. 65 (manuel Pythagore, classe de quatrième, éd. 1988, Hatier) *vous avez un triangle ABC et les milieux de ses trois côtés* (le prof dessine la figure au tableau).



D'après la figure, vous avez I milieu de [AB], J milieu de [AC] et K milieu de [BC]. La question qui vous est posée est de démontrer que le périmètre du triangle IJK est la moitié de P, P étant le périmètre de ABC (5 sec de silence). Donc P est le périmètre de ABC et on vous demande de démontrer que celui de IJK est la moitié. Alors je vous écoute. Sandrine? (5 sec de silence) Tu n'as pas du tout vu comment faire cet exercice? A quoi est égal le périmètre du triangle? (des élèves lèvent la main). Oui Bertrand !

-Bertrand. *I est le milieu de [AB], J milieu de [AC] et K milieu de [BC]. Le segment qui a pour extrémités le milieu de deux côtés d'un triangle est égal à la moitié de celui du troisième.*

-Prof. *oui !*

-Bertrand. *IJ est la moitié de BC.*

-Prof: (répète et écrit au tableau): *Oui!*

-Bertrand. *KJ est la moitié de AB.*

-Prof. (répète et écrit au tableau): *KJ est la moitié de AB et ?*

-Bertrand. *IK est la moitié de AC.*

-Prof. (répète et écrit au tableau) *IK est la moitié de AC Oui !*

-Bertrand. *Ensuite, je n'ai pas pu terminer.* [...]

Après la fin du traitement de cet exercice, l'enseignant demande :

Et maintenant, est-ce que quelqu'un s'est posé la question qu'en est-il de l'aire du triangle IJK par rapport à ABC ? Alors oui ? La moitié ?

Pendant cette séance, la classe va traiter successivement les deux questions énoncées ci-dessus, c'est-à-dire, en résumé :

1) Démontrer que le périmètre de IJK est la moitié de celui, P, de ABC.
2) Comparer les aires de ces deux triangles.

4.2. Analyse a priori

4.2.1. Question 1

Il s'agit d'un exercice classique de démonstration : "démontrer que". L'outil essentiel est le théorème rappelé ci-dessus par Bertrand et dont l'enseignant citera lui-même l'énoncé qu'il écrira au tableau.

Théorème : Dans un triangle le segment qui a pour extrémités les milieux des deux côtés d'un triangle a pour longueur la moitié de celle du troisième côté.

A partir de là nous présentons ci-dessous quatre niveaux possibles d'explicitation de la rédaction :

niveau 1) C'est évident d'après le théorème.

niveau 2) D'après le théorème sur les milieux dans un triangle, on a : $IJ=\frac{1}{2}BC$, $JK=\frac{1}{2}AB$ et $KI=\frac{1}{2}AC$, d'où $IJ+JK+KI=\frac{1}{2}(AB+BC+CA)=\frac{1}{2}P$

niveau 3) Comme 2, mais en détaillant : $IJ+JK+KI=\frac{1}{2}AB+\frac{1}{2}BC+\frac{1}{2}CA=\ldots$

niveau 4) Comme 3, mais en explicitant les règles de calcul algébrique utilisées.

Bien entendu, on peut encore raffiner ces distinctions en particulier en imposant des conditions de rédaction supplémentaires dans l'utilisation du théorème.

4.2.2. Question 2

Il s'agit d'une question ouverte, cependant une différence apparaît tout de suite : alors que le dessin ne suggère pas immédiatement la relation entre périmètres qui fait l'objet de la question 1, ce qui explique sans doute que dans ce cas l'enseignant donne le résultat (il s'agit de "démontrer que..."), il montre de façon assez évidente que le triangle ABC se partage en quatre triangles de même aire donc que l'aire de IJK est le quart de celle de ABC. On peut donc s'attendre à voir apparaître, comme dans le cas du triangle aplati, des "raisonnements intuitifs" conduisant à considérer le résultat comme évident sans qu'aucune justification soit nécessaire, ce qui, après tout, serait conforme à des précédents hindous ou chinois bien connus dans le cas du théorème de Pythagore. Ceci soulève un double problème :

- du point de vue du contrat didactique : en cours d'apprentissage de la démonstration, l'enseignant peut-il autoriser cette simple lecture du dessin qui contraste complètement avec ce qu'on a fait dans la question 1 ? Il semble probable que non.

- du point de vue mathématique contemporain : la notion d'aire est mathématiquement une notion très élaborée, si l'on veut rendre rigoureuse l'évidence ci-dessus, il faudra un raisonnement du genre suivant :

Première démonstration (plan).

1) Le triangle ABC (considéré comme une partie du plan) est réunion des quatre triangles AIJ, IBK, IJK et CJK.

2) Ces triangles ont deux à deux des intersections d'aire nulle (suivant le cas, ces intersections sont vides ou réduites à un point ou à un segment).

3) L'aire est additive, donc l'aire de ABC est la somme des aires des quatre triangles précédents.

4) Les quatre triangles ont même aire, d'où le résultat.

Bien sûr, cette rédaction n'est qu'un plan : il faudrait démontrer le point 1 si l'on n'admet pas de le lire sur la figure, de même du point 2 et enfin du point 4, lequel résulte du fait que les quatre triangles sont isométriques, car ils se déduisent les uns des autres par des transformations évidentes (translations et symétries), ou bien parce que la question 1 montre qu'on peut leur appliquer le "troisième cas d'égalité" car leurs côtés sont isométriques.

Ces dernières remarques suggèrent encore la possibilité de repérer que IJK est image de ABC dans une similitude de rapport 1/2.

Bien sûr, toutes ces démonstrations sont hors de portée des élèves, mais des parties d'entre elles sont accessibles. Il est bien difficile de préciser quelle est la bonne démonstration à ce niveau.

La notion sous-jacente à ces démonstrations est celle d'aire telle qu'elle est définie actuellement en mathématiques : c'est une mesure, c'est-à-dire une application définie sur un certain ensemble de parties du plan, les parties quarrables, à valeurs dans les nombres réels positifs ou nuls et vérifiant deux propriétés essentielles

- l'invariance par isométrie
- l'additivité : l'aire de la réunion de deux parties quarrables disjointes est égale à la somme des aires de ces deux parties. Cette propriété reste bien sûr vraie si les deux parties quarrables ont une intersection d'aire nulle.

Définie à une constante multiplicative près, l'aire est fixée dès qu'on fixe sa valeur pour une partie quarrable particulière ; on choisit en général un carré qui est alors "l'unité d'aire", ce qui fixe du même coup le côté du carré comme unité de longueur ; on démontre alors que toutes les parties bornées du plan que l'on est amené à manipuler dans l'enseignement secondaire sont quarrables puis les formules classiques sur les aires. Il en résulte en particulier que tout segment est d'aire nulle.

La caractérisation des parties quarrables est assez élaborée : il s'agit des parties bornées du plan dont la frontière est "de mesure nulle" ou encore une fois le plan rapporté à un repère orthonormé, dont la fonction caractéristique est intégrable au sens de Riemann.

Deuxième démonstration

Il est possible de revenir sur l'analyse a priori pour une auto-critique : nous avons employé une notion d'aire trop savante, qui date au plus du dix-neuvième siècle, qui est absente du cursus ordinaire des enseignants de mathématiques[1], et sans laquelle les mathématiques ont fonctionné pendant la plus grande partie de leur histoire. Autrement dit, on a su calculer des aires, et bien plus compliquées que celles qui nous occupent ici, bien avant de savoir définir rigoureusement la notion d'aire. Plaçons nous donc à un niveau plus intuitif, connu des Grecs, des Hindous et des Chinois, qui l'emploient pour leurs démonstrations par découpage : chacun connaît au moins une démonstration "chinoise" du théorème de Pythagore.

Chez Euclide, le mot "aire" apparaît à la proposition 34 du livre I des éléments où il s'agit de démontrer que "l'aire parallélogramme" est coupée en deux parties égales par la diagonale.Vitrac commente ainsi cette introduction :

---

[1]. L'aire n'est pas une mesure au sens de la "théorie de la mesure" car elle ne vérifie pas la propriété d'additivité dénombrable (une réunion dénombrable de parties quarrables n'est pas forcément quarrable, même si elle est bornée), elle n'a donc qu'un intérêt marginal du point de vue mathématique, presque historique, ce qui explique que la théorie de l'aire ne soit pratiquement pas enseignée y compris aux futurs professeurs.

> Quant au mot aire, il ne désigne pas ici une mesure (ce qui est son sens actuel en mathématiques), mais l'étendue intérieure d'une figure à deux dimensions susceptible d'être évaluée, le mot "surface" étant réservé à la limite d'un solide, [...] (cf. Euclide, tome I, note 143, p. 259).

La notion d'étendue intérieure n'est évidemment pas mathématique, elle pourrait tout aussi bien être remplacée par celle de place occupée, mais l'important est que *l'aire n'est pas un nombre*. Non définie par Euclide, elle apparaît comme une notion première dont l'usage est bien fixé :

- Euclide déclare égales deux figures qui pour nous sont simplement de même aire, par exemple l'énoncé du théorème de Pythagore est le suivant :

> Dans les triangles rectangles, le carré sur le côté sous-tendant l'angle droit est égal aux carrés sur les côtés contenant l'angle droit.

- pour Euclide, deux triangles isométriques sont égaux ;
- pour démontrer les "égalités" entre figure, Euclide fait appel à des démonstrations par "découpage". Ceci se retrouve dans la majorité des démonstrations du livre I, à partir de 33 et jusqu'à l'avant-dernière, celle du théorème de Pythagore ;
- ces démonstrations par découpage utilisent deux méthodes fondées théoriquement pour Euclide sur les "notions communes" énoncées au début du livre I concernant l'égalité et l'inégalité des "choses" (cf. Euclide). La première méthode consiste à montrer que les deux figures dont on veut montrer l'égalité sont découpables en triangles isométriques, la deuxième utilise le fait qu'en retranchant à des figures d'aires égales des figures d'aires égales, on obtient encore des figures d'aires égales.

Hilbert (1899, ch 4) a donné une traduction mathématique rigoureuse de cette théorie euclidienne des aires fondée sur le découpage en triangles ; il aboutit ainsi à une notion "d'équicomplémentarité" qui est une relation d'équivalence définie dans l'ensemble des polygones et dont les classes sont simplement les polygones de même aire, mais qui permet de comparer les aires des polygones de façon géométrique, par une méthode effective de découpage, sans les calculer et donc sans choisir une unité.

Cette théorie de Hilbert "explique" donc et justifie a posteriori une pratique mathématique assez universelle qui s'appuie sur des pratiques de découpage invoqué, ou même effectué, car le problème qui nous intéresse pourrait se traiter "sans connaissance mathématique" en découpant les quatre triangles qui partagent ABC et en constatant qu'ils se superposent.

On retrouve la notion d'aire associée à cette pratique dans les programmes scolaires à partir de 1980 : "On distingue l'aire à la fois de la surface et du nombre qui la mesure" (Perrin-Glorian, 1992, chapitre 1, p. 7). Ce qui pourrait apparaître, pour reprendre le langage de Chevallard (1985) comme une "création didactique" apparaît plutôt comme un objet d'enseignement légitimé par une pratique mathématique historiquement dépassée mais bien fixée, munie avec la technique du découpage d'un outil de preuve "élémentaire", et rendant compte de pratiques sociales courantes (pour une analyse plus détaillée, cf. Perrin-Glorian, loc. cit.). Notons toutefois que l'étude de Hilbert montre bien que les preuves ne restent élémentaires que si l'on admet la lecture sur le dessin des découpages pertinents, faute de quoi les démonstrations deviennent très complexes.

Revenons au problème qui nous intéresse. On peut le résoudre comme l'aurait sans doute fait Euclide conformément à l'analyse ci-dessus : lire le découpage et démontrer que les quatre triangles sont isométriques.

Troisième démonstration

Les démonstrations précédentes soulèvent des problèmes délicats : les unes sont manifestement trop abstraites pour la culture mathématique des élèves et pour un résultat évident, les autres supposent qu'on s'autorise à lire certaines choses sur la figure, mais pas toutes celles qu'on pourrait lire, et posent donc des problèmes de contrat didactique puisqu'on ne voit pas comment un critère d'ordre mathématique délimiterait ces droits de lecture.

Une issue possible consiste à revenir à la formule donnant l'aire d'un triangle : la moitié du produit de la hauteur par la base. On sait déjà par la question 1 que $IJ=\frac{1}{2}BC$. Il reste à calculer la hauteur correspondante, ce qui peut se faire de différentes manières, par exemple en remarquant que IJK a même hauteur que BIK (ceci sera considéré comme évident, ou justifié...) puis que si l'on appelle H le pied de la hauteur issue de A dans ABC et L le pied de la hauteur issue de I dans BIK, on a $IL=\frac{1}{2}AH$, d'après le théorème des milieux appliqué dans le triangle ABH.

Cette démonstration met en jeu la relation entre aire et longueur, cette dernière notion pouvant, comme l'aire, être traitée soit comme mesure, soit comme "grandeur" manipulable sans faire appel aux nombres, ce qui n'interdit pas l'emploi des formules utilisées ici (pour une justification de cette dernière affirmation, cf. Hilbert, loc. cit., ch 4). Elle a l'inconvénient d'être assez éloignée de ce qu'on lit sur le dessin.

Elle suggère toutefois une autre issue pour la deuxième démonstration: après lecture du découpage sur le dessin, au lieu de démontrer que les quatre triangles sont isométriques, on peut montrer simplement qu'ils ont même aire. Pour cela, on remarque d'abord que IJK, BIK et CJK ont même aire car ils ont même hauteur et même "base" associée car $IJ=\frac{1}{2}BC=BK=KC$, et on remarque ensuite que, pour la même raison, IJK, AIJ et CJK ont aussi même aire.

4.3. Analyse a posteriori

4.3.1. Les démonstrations proposées par l'enseignant

Voici les démonstrations que l'enseignant considère comme les bonnes réponses (elles résultent de son discours et dans le cas de la question 1, de ce qui a été écrit au tableau).

• *Démonstration de l'enseignant pour la question 1* (seule la première phrase a été écrite au tableau)

Dans un triangle le segment qui a pour extrémités les milieux des deux côtés d'un triangle a pour longueur la moitié de celle du troisième côté.

alors on a ceci : le périmètre de IJK qui est égal à IJ+JK+KI est encore égal à IJ c'est la moitié de BC, plus JK la moitié de AB, plus IK la moitié de AC.

$$IJ+JK+KI=\frac{BC}{2}+\frac{AB}{2}+\frac{AC}{2}$$

Pour ajouter trois nombres qui ont le même dénominateur, on ajoute les numérateurs. Ce qui fait AB+BC+AC le tout sur...
Un élève. 2

$$\frac{BC+AB+AC}{2}$$

le numérateur de cette fraction, c'est exactement le périmètre du triangle ABC.

• *Démonstration de l'enseignant pour la question 2* (entièrement orale)

Oui, vous avez ici effectivement, le triangle ABC est partagé en quatre triangles.

Ensuite l'enseignant suggère de démontrer que AIJ et IJK ont même aire et il continue :

Par le milieu du segment [IJ], les deux triangles se déduisent par symétrie centrale. Parce que vous avez le segment [AK] qui a le même milieu que le segment [IJ]. La symétrie centrale conserve les aires. Celui-là vient sur celui-là, ils sont superposables. De même pour les autres. Ce qui montre que les quatre triangles ont la même aire et par conséquent, l'aire de IJK est égale au quart de l'aire du triangle ABC.

4.3.2. Commentaire

Pour la question 1, on remarque essentiellement, par rapport à l'analyse a priori, que l'enseignant apporte des justifications orales au calcul algébrique. Il est peu probable qu'il apporte encore ces justifications l'année suivante voire plus tard dans l'année : ce calcul pourra alors se dérouler sans commentaire. Ceci illustre le fonctionnement du contrat didactique : les obligations du maître et de l'élève ne sont pas les mêmes suivant qu'une connaissance est encore en cours d'apprentissage, ou qu'au contraire elle est considérée comme acquise ; dans le premier cas, le maître exige davantage d'explicitation en cas d'usage par l'élève, et si l'élève se trompe, son erreur pourra être relevée mais aussi commentée par l'enseignant qui en recherchera peut-être même la cause, dans le deuxième cas, ces obligations réciproques s'atténuent. Ici, le type de calcul algébrique qui intervient est considéré comme un sujet "encore chaud" pour l'enseignant ce qui permet de constater que le problème des implicites dans une démonstration se pose tout autant pour le calcul algébrique que pour la géométrie et que son règlement se fait dans le cadre du contrat didactique.

Pour la question 2, l'enseignant choisit la deuxième démonstration : constat sur le dessin du fait que ABC est partagé en quatre triangles (donc considéré comme évident) et admission implicite de l'additivité de l'aire (donc considéré comme évident), mais démonstration du fait que les quatre triangles ont même aire. Ceci revient tout simplement à lire sur le dessin tout ce qu'il ne peut pas démontrer à ce niveau et à démontrer ce qu'il est possible de démontrer. Cette situation est fixée dès les premiers échanges avec les élèves :

Prof.1. *Et maintenant, est-ce que quelqu'un s'est posé la question qu'en est-il de l'aire du triangle IJK par rapport à ABC? Alors oui? La moitié?*
des élèves 1. *non!*
Prof.2. *pourquoi ce n'est pas la moitié?*
Un élève 2. *c'est un quart!*
Prof.3. *pourquoi c'est un quart?*
Elève 3. *ça se voit.*
Prof.4. *Ca se voit (il sourit) Oui c'est le quart. Qui est-ce qui peut m'expliquer pourquoi ? Vous pouvez dire effectivement que ça se voit mais pourquoi ?*
Élève 4. *le triangle ABC est partagé en quatre triangles.*
Prof.5. *oui vous avez ici effectivement, le triangle ABC est partagé en quatre triangles. Comment est-ce qu'on peut...AIJ et IJK...*
Élève 5. *c'est un rectangle ça*
Prof.6. *au départ le triangle ABC est quelconque. Est-ce que quelqu'un peut m'expliquer pourquoi ces deux triangles ont même aire? (il s'agit de AIJ et de IJK).*

Commentaire. Ce début de dialogue montre que effectivement des élèves ont vu que le résultat pouvait se voir directement sur le dessin, ce que l'enseignant confirme (Prof.4). Du coup il demande une démonstration pour expliquer (Prof.4) ce qui est effectivement un des rôles de la démonstration qui peut viser d'abord à convaincre, comme dans la question 1, ou à expliquer (ou éclairer). En Prof.5, il institutionnalise le fait que ABC est partagé en quatre triangles, et en Prof.6 il pose le problème de l'égalité de l'aire de AIJ et IJK, il faut remarquer que ce ne sont pas les élèves qui posent cette question, et qu'une réponse positive n'entraîne le résultat cherché que grâce à l'additivité de l'aire, *qui n'apparaîtra jamais explicitement* : le passage où on en est le plus proche est la fin de la solution du prof quand il dit :

Ce qui montre que les quatre triangles ont la même aire et par conséquent, l'aire de IJK est égale au quart de l'aire du triangle ABC.

On voit ici clairement combien peut être arbitraire la séparation entre :
- ce que l'on a le droit de lire sur la figure en le disant : le partage en quatre triangles ;
- ce que l'on a le droit de lire sur la figure sans le dire : les triangles ne se chevauchent pas et donc la somme des aires sera l'aire du grand triangle ;
- ce qu'on n'a pas le droit de lire sur la figure : le fait que les quatre triangles ont même aire.

Il arrive incidemment un phénomène supplémentaire : l'un des élèves voit apparaître sur la figure un rectangle (Élève 5 ci-dessus : il s'agit sans doute du parallélogramme AIKJ) et le professeur intervient brièvement pour rappeler qu'il ne faut pas utiliser des particularités de la figure tracée au tableau (Prof.6).

4.3.3. La gestion de la classe

L'analyse a priori, confirmée par l'analyse a posteriori, montrait une grande différence entre les questions 1 et 2, du point de vue mathématique avec la probabilité d'apparition de problèmes de gestion du contrat pour la question 2. Cette différence mathématique induit effectivement une gestion différente par l'enseignant de ces deux questions.

- pendant la recherche de la question 1, le recours à la figure est très limité, il s'agit essentiellement d'un travail d'organisation des énoncés qui interviennent dans la démonstration ;
- pendant la recherche de la question 2 au contraire, le professeur utilise le dessin de façon importante dès le départ (Prof.4, Prof.5), ceci était parfaitement prévisible puisque plusieurs des résultats clés explicites ou implicites de sa démonstration ne peuvent se lire que sur le dessin : on peut imaginer à la rigueur d'ailleurs qu'on rédige sans figure la réponse à la question 1, mais pour ce qui est de la question 2 ...! La difficulté qui consiste à interdire la lecture de l'égalité des triangles apparaît bien lors d'une intervention ultérieure du professeur :

Prof.18....*Comment peut-on démontrer que deux triangles ont la même...*
Élève 18. *ça se voit !*
Prof.19. *Ca se voit! Effectivement on peut dire que ça se voit. On voit quoi? Qu'est-ce qui se passe ? On voit très bien que celui-là on peut..*
Élève 19. *le comparer*
Prof.20. *On peut le mener par dessus.*

Commentaire. On comparera les échanges 18-19 avec les échanges 3-4. Dans le premier cas, le professeur admet le "ça se voit" mais n'en retient que ce qui l'intéresse : le partage en quatre. Dans le deuxième cas, le professeur va reprendre l'idée de voir mais pour faire voir qu'on peut "mener" un triangle (il n'est pas nommé car visiblement le professeur montre au tableau l'opération qu'il suggère) "par dessus" l'autre. Cet appel au dessin amènera presqu'immédiatement un élève à proposer d'utiliser la symétrie centrale, ce qui permettra de conclure.

Conclusion de la partie 4

On remarquera que l'analyse a priori mathématique rend compte de façon rationnelle du changement de comportement de l'enseignant par rapport au rôle du dessin entre les deux questions. C'est bien la nature du contenu mathématique qui commande ce changement et non un caprice ou un choix pédagogique de l'enseignant. Ce changement qui porte sur le contrat didactique souligne doublement la nature didactique de ce dernier :
- les règles de lecture du dessin sont des règles qui concernent uniquement les mathématiques ;
- leur apparition dans la question 2 est provoquée par le statut très particulier, au sein des mathématiques de la notion d'aire, à la fois savoir commun répandu et socialement utile et savoir savant susceptible d'une mathématisation poussée mais qui reste marginal par rapport à la théorie ensembliste de la mesure.

Remarque sur le raisonnement mathématique

L'usage de la logique permet de fabriquer des énoncés vrais en partant d'autres énoncés vrais, de sorte qu'une démonstration mathématique est censée progresser en combinant logiquement des énoncés connus comme vrais soit comme axiomes, soit comme énoncés antérieurement démontrés. Cette vision idéale est démentie par la pratique : en fait le raisonnement mathématique est bien fabrication à l'aide de la logique de vérités nouvelles à partir de vérités supposées connues, mais la fabrication de ces vérités supposées connues ne se résume pas à une collecte dans les axiomes et les théorèmes, dans les faits, elle implique presque toujours d'autres origines, en géométrie par exemple, l'appel à la lecture du dessin, on le voit clairement quand on réfléchit à la question 2 ci-dessus. Autrement dit, l'étude du raisonnement mathématique est tout autant étude de la fabrication des énoncés vrais, en particulier de la fabrication des évidences, qu'étude de la structure logique. Dans la question 1, c'est l'étude de la structure logique qui prédomine, dans la question 2 c'est celle de la fabrication des évidences. Cette dernière pose un problème difficile de gestion du contrat didactique.

Une dernière remarque

Ce n'est qu'après m'être imposé de faire cette analyse a priori mathématique approfondie que j'ai pu non seulement comprendre, mais même voir, certains des phénomènes apparus au cours de cette séance. Le type de données recueillies, à savoir les propos de l'enseignant et des élèves, nous a permis d'élucider certaines décisions de l'enseignant qui s'interprètent en didactique en termes de contrat. Bien entendu, on pourrait aussi faire une étude cognitive comme dans la partie 3 en se posant les mêmes questions sur le statut pour les élèves des évidences nombreuses qui apparaissent au cours de cette séance, mais ceci nécessiterait un autre dispositif de recueil des données.

Conclusion générale

La nature des connaissances mathématiques à enseigner apparaît, au terme de ce travail, que ce soit à partir de l'analyse théorique ou de l'observation, comme une source déterminante de contraintes sur les choix opérés en matière de transposition didactique et de règles du contrat didactique. Même le fonctionnement le plus courant de l'enseignement permet d'observer les effets de ces contraintes.

Les travaux des mathématiciens sur les fondements de leur discipline, en particulier sur l'axiomatisation de la géométrie, depuis Euclide jusqu'à Hilbert, apparaissent comme des outils d'analyse indispensables pour comprendre ces phénomènes, y compris, ce qui peut paraître étonnant, à un niveau élémentaire. Ils montrent en particulier que même en géométrie élémentaire plane, lieu traditionnel d'apprentissage de la démonstration, cette dernière ne saurait se résumer à un enchaînement logique fondé sur des axiomes mais comporte toujours de manière nécessaire des résultats issus de la lecture du dessin. Ils donnent aussi, à travers l'axiomatique géométrique, un moyen d'analyse et de classification de ces appels nécessaires au dessin qui devrait faire partie du bagage de l'enseignant de mathématiques à ce niveau. Ils laissent en revanche ouvert le problème du fondement cognitif de l'appel à l'évidence nécessaire dans l'apprentissage de la géométrie.

Bibliographie

ARNAULD A., NICOLE P. (1674) *La logique ou l'art de penser*, Ed. PUF, Paris 1965.

ARSAC G. (1996) Cours sur l'axiomatique de la géométrie, *Actes de l'université d'été de formation de formateurs en didactique des mathématiques*, IREM de Clermont-Ferrand.

ARSAC G., MANTE M. (1997) Situations d'initiation au raisonnement déductif, *Educational Studies in Mathematics*, 33, 21-43.

BARBARIN P., (1928) *La géométrie non euclidienne*, p. 18, Gauthier Villars, rééd. J. Gabay, 1990.

BLANCHÉ R. (1955) *L'axiomatique*, 5ème édition, 1970, PUF.

CHEVALLARD Y (1985) *La transposition didactique*, réed. 1991, La Pensée Sauvage, Grenoble, 240 pages.

CHEVALLEY C. (1995) *Pascal, contingence et probabilité*, PUF, 1995, p. 35

EUCLIDE, *Les éléments*, tome 1, B. Vitrac éditeur, PUF, 1990, Paris.

GISPERT H. (1995) la théorie des ensembles en France avant la crise de 1905 : Baire, Borel, Lebesgue... et tous les autres, *Revue d'Histoire des mathématiques*, tome 1, fascicule 1, p. 39-82, Société mathématique de France, Paris.

GRANGER, G.G. (1994) *Formes opérations objets*, Vrin, Paris.

GUICHARD J (993) *Statut et fonction de la démonstration en mathématiques, quelques repères*, IREM de Poitiers.

HADAMARD (1898) *Leçons de géométrie*, tome I : géométrie plane, p.1, 13ème édition, 1947, réimpression J. Gabay, 1988.

HILBERT D. (1899) *Les fondements de la géométrie*, traduction de la dixième édition, Paul Rossier éditeur, Dunod, Paris, 1971.

KLINE M. (1980) *Mathématiques, la fin de la certitude*, trad française, 1989, Ch. Bourgois éd, Paris, 664 pages.

PASCAL, *De l'esprit géométrique*, réédité par A Clair, 1985, Flammarion.

PERRIN-GLORIAN M-J (1992) *Aire de surfaces planes et nombres décimaux. Questions didactiques liées aux élèves en difficulté aux niveaux CM-sixième*, thèse, Université Paris 7.

PONT, J. C. (1995) Aux sources du conventionnalisme, in Panza M. et Pont *Les savants et l'épistémologie vers la fin du dixneuvième siècle*, Albert Blanchard, Paris.