PRATIQUES

PLIAGES ET VOLUMES

Renée DE GRAEVE
I.R.E.M. de Grenoble

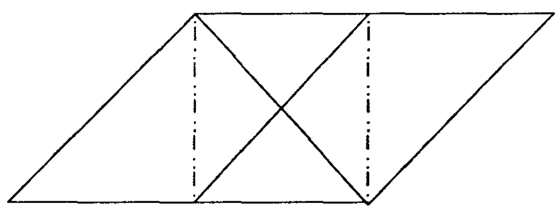
Je tiens tout d'abord à remercier Melle HIROMI UENO (AOMORI Japon) qui m'a appris à réaliser ces pliages lors du congrès ICME 6 (International Congress Mathematical Education) de Budapest. Ces pliages sont tout à fait extraordinaires car ils permettent de réaliser des volumes sans colle !

J'adresse tous mes remerciements à Ph. J. HAUG (IREM de Grenoble) qui a réalisé les dessins en perspective sur une table traçante pilotée par micro-ordinateur.

La perspective utilisée est la perspective conique ; les points de vue diffèrent suivant les objets, mais on les a toujours choisis à une distance approximativement égale à 12 fois la largeur de l'objet représenté.

A - LE CUBE

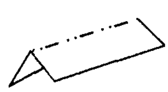
Pour construire un cube, il faut faire **six** pièces identiques à la pièce élémentaire. Cette pièce correspond à une face du cube : elle est composée d'un carré et de deux languettes.

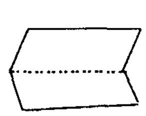


Pièce élémentaire

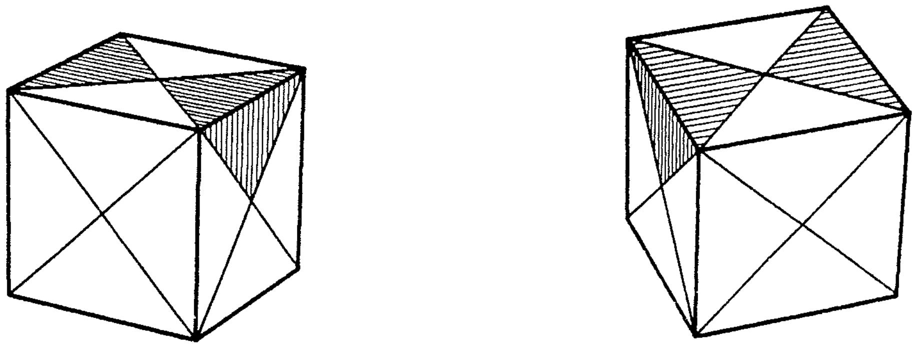
REMARQUE

Pour tous les dessins de l'article, nous avons utilisé les conventions suivantes :

pli en relief ._._._._. exemple 

pli en creux .... exemple 

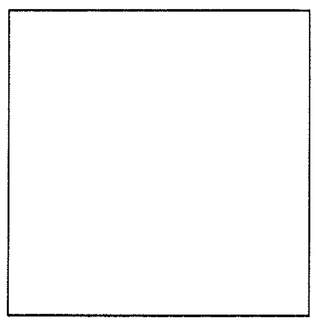
Le pliage est fait de façon à ce que les demi-diagonales du carré permettent aux languettes de s'y introduire.



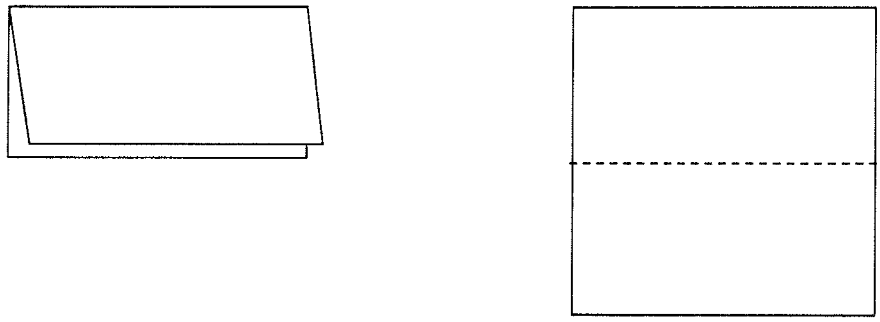
Voici le cube terminé : les hachures correspondent à une pièce élémentaire (sur chacune des deux vues on ne voit pas cette pièce en totalité mais les deux vues se complètent...).

I - FABRICATION DE LA PIÈCE ÉLÉMENTAIRE

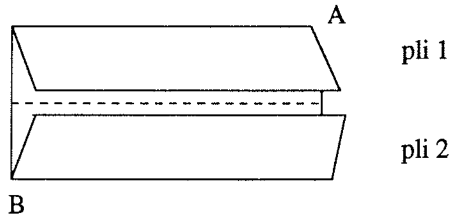
1. Prendre une feuille carrée.



2. Plier en deux puis déplier.



3. Plier chaque bord sur cette ligne médiane : on obtient deux plis (le pli 1 et le pli 2).

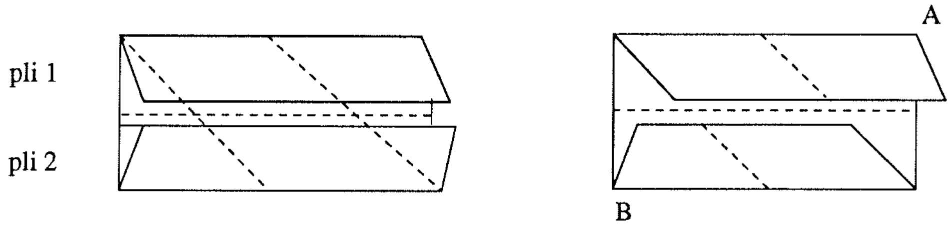


4. Amener le coin supérieur droit A sur le bord inférieur et le coin inférieur gauche B sur le bord supérieur.

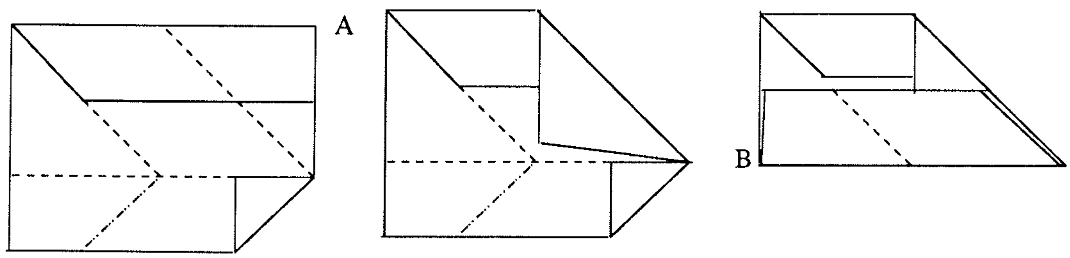
ATTENTION

Bien respecter le sens de ces deux plis pour **toutes** les pièces. Il ne faut surtout pas rabattre le coin supérieur gauche et le coin inférieur droit, ce qui conduirait à faire une pièce **symétrique**. Pour que les languettes se glissent correctement dans les demi-diagonales, il faut **absolument** que les six pièces soient **identiques** (c'est-à-dire superposables **sans** retournement).

5. Déplier et rabattre les deux petits triangles à l'intérieur.

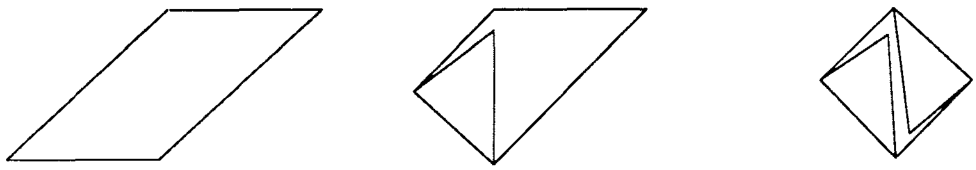


6. Déplier le pli 2, plier le coin A puis refaire le pli 2.

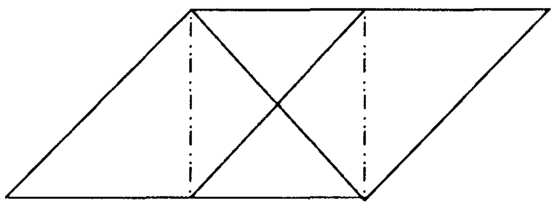


7. Glisser le coin B dans le pli 1.

8. Retourner la pièce et plier de façon à marquer la séparation entre le carré (face du futur cube) et les languettes.



9. Voici la pièce élémentaire finie.



II - QU'AVONS NOUS FAIT ?

En 1. on a un carré de côté ℓ.

En 3. on a un rectangle de côtés ℓ et $\ell/2$.

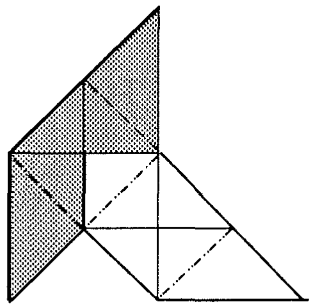
En 4. et en 7. on a un parallélogramme de côtés $\ell/2$ et $\ell \frac{\sqrt{2}}{2}$ et d'angle 45° (il est formé par deux triangles rectangles isocèles).

En 9. les plis marqués sont la troisième hauteur de ces deux triangles : on obtient ainsi deux languettes (triangles rectangles isocèles de côtés $\ell \frac{\sqrt{2}}{4}$, $\ell \frac{\sqrt{2}}{4}$ et $\frac{\ell}{2}$ et un carré de côté $\ell \frac{\sqrt{2}}{4}$).

III - CONSTRUCTION DU CUBE

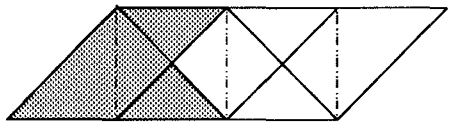
Il faut six pièces élémentaires de même dimension. Pour construire le cube il suffit de glisser **toutes** les languettes sous les demi-diagonales du carré. Les plis (I 8) sont faits de sorte que les demi-diagonales soient apparentes c'est-à-dire situées sur les faces externes du cube, c'est pourquoi **aucune** languette ne doit se trouver à l'intérieur du cube.

Exemple



ATTENTION

1. **Toutes** les languettes doivent être utilisées : chaque languette doit être glissée sous une demi-diagonale. On **n**'a donc **pas** le droit de faire :



car alors la deuxième languette grisée est située sous le carré blanc et sera donc inutilisée.

2. Si une languette se glisse mal, c'est très certainement parce que, parmi les six pièces, vous avez fait des pièces symétriques (cf I 4).

IV - QUELQUES PISTES DE TRAVAIL

Nous avons réalisé ce pliage dans une classe de CM_2 : celle de Mme Odile RIZZATO, École Clos Marchand à Saint-Ismier.
Tous les enfants ont réussi à monter le cube **sans** aide.

Les matériaux

Nous avons choisi de leur distribuer : 2 carrés bleus, 2 carrés rouges et 2 carrés verts de dimension 14,7 cm (voir gabarit en fin d'article).

Le papier utilisé ne doit pas être trop souple ni trop rigide : un papier 60 g. convient parfaitement.

Les activités

- Observation :
  - nombre de faces ;
  - nombre d'arêtes (autant que de languettes) ;
  - nombre de sommets.

- Jeu avec les couleurs.

1. Construire le cube de façon que les faces opposées soient identiques par leur couleur.

2. On veut réaliser un cube ayant une **seule** face unicolore rouge. Cela est-il possible ? Donner la répartition des pièces.

3. Prolongement du 2. On veut construire un cube ayant deux faces respectivement trois, quatre, cinq, six faces) unicolores. Cela est-il possible ? Donner la répartition des pièces.

- Le parallélépipède rectangle.

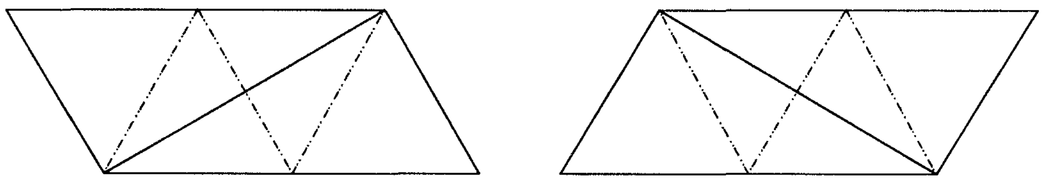
1. Construire une parallélépipède formé par deux cubes accolés. Combien faut-il faire de pièces ? (réponse 10). Pour certaines pièces, **une** languette ne doit pas être pliée. Combien faut-il de pièces de ce genre ? (réponse 4).

2. Prolongement du 1. Construire tous les parallélépipèdes formés par 4 cubes accolés.
Faites le compte des pièces nécessaires à la construction de ces parallélépipèdes.

3. Dans votre classe, si chaque élève a fait 3 pièces, quel est le "plus gros" parallélépipède que l'on peut construire ? (le plus gros est le parallélépipède qui peut contenir le plus de cubes, c'est-à-dire celui qui a le plus grand volume).

B - POLYÈDRES À FACES ÉQUILATÉRALES

Selon les polyèdres à construire, on aura besoin de pièces identiques à la pièce élémentaire et aussi de pièces symétriques à celle-ci.

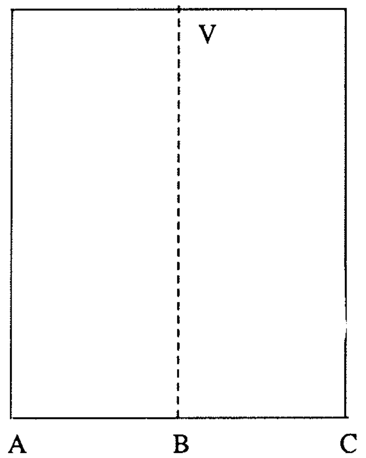


pièce élémentaire — pièce symétrique.

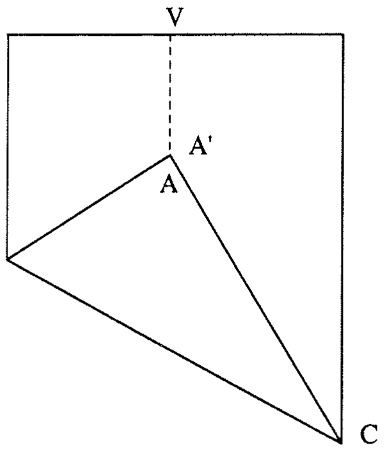
La pièce élémentaire est composée de quatre triangles équilatéraux qui correspondent à deux faces du polyèdre et à deux languettes. Les deux faces forment un losange dont une diagonale permet aux languettes de s'y introduire.

I - FABRICATION DE LA PIÈCE ÉLÉMENTAIRE

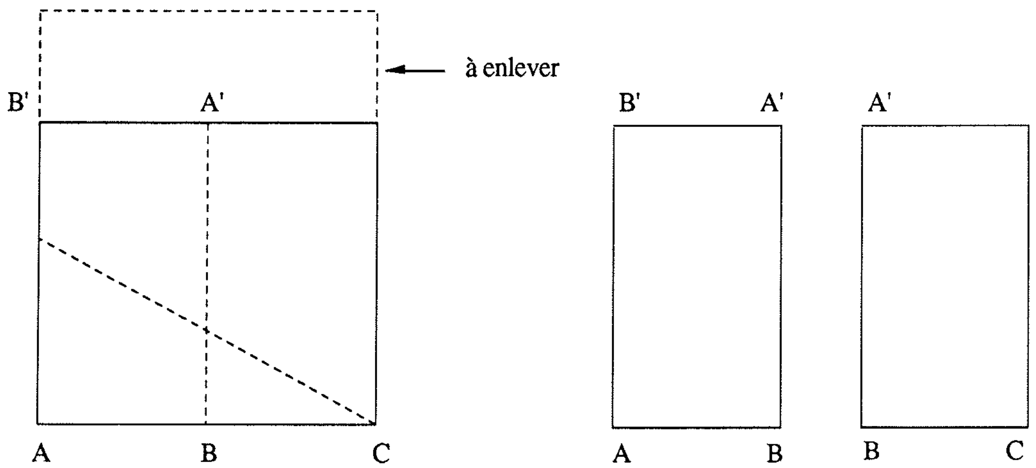
1. Prendre une feuille de papier rectangulaire.
Faire un pli médian dans le sens de la longueur (pli BV).



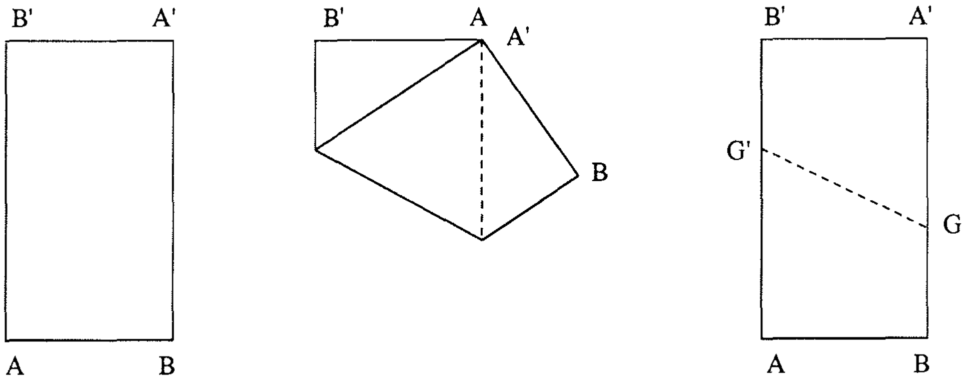
2. Amener le coin A sur la pliure de façon à former un pli partant de C. On détermine ainsi un point A'.



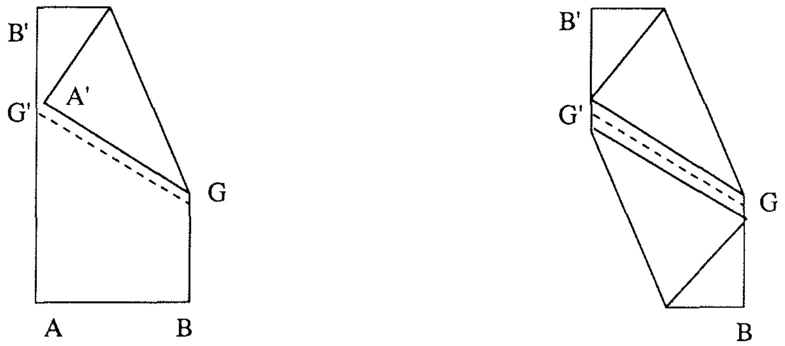
3. Enlever la bande horizontale au-dessus de A'.Couper selon A'B pour obtenir deux rectangles identiques.



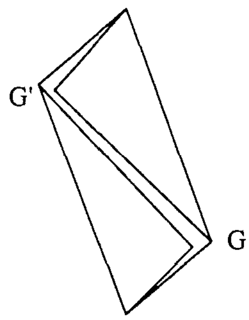
4. Prendre le rectangle ABA'B'.
Amener A sur A' en marquant le pli GG' puis déplier.



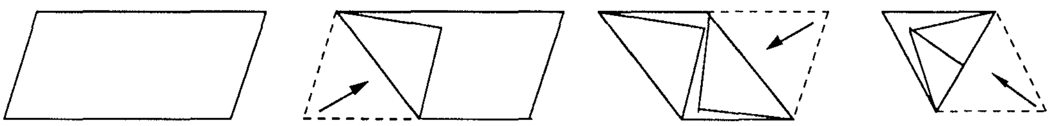
5. Plier pour amener A'G sur GG'.
Plier pour amener AG' sur GG'.



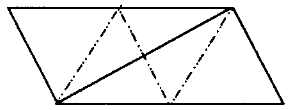
6. Plier les deux coins B et B' de façon à cacher les deux petits triangles qui dépassent sous les deux plis précédents.



7. Retourner la pièce et plier de façon à marquer les quatre triangles équilatéraux.

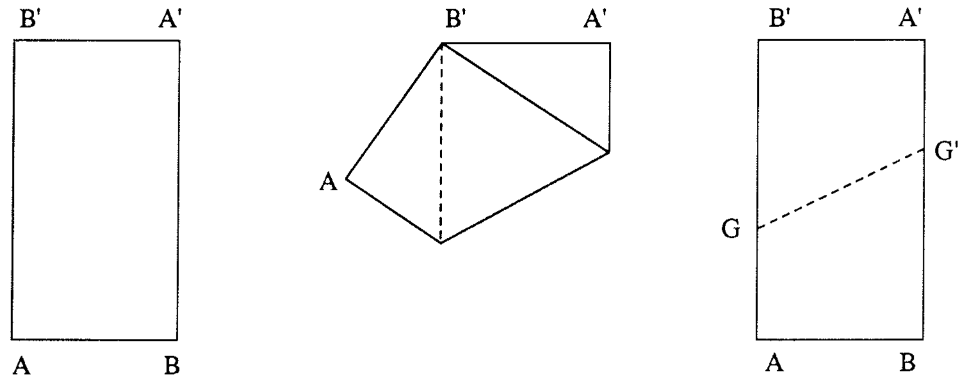


8. Voici la pièce élémentaire finie.



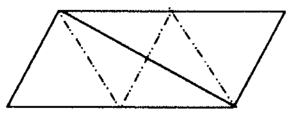
II - FABRICATION DE LA PIÈCE SYMÉTRIQUE

1'. 2'. 3' identiques à 1. 2. 3. pour obtenir le rectangle de base ABA'B'.
4. Amener B sur B' en marquant le pli GG'.

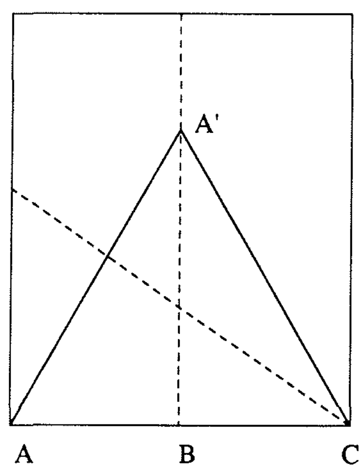


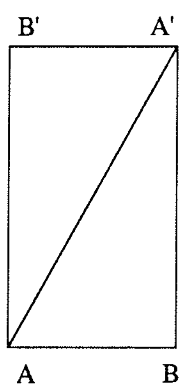
5'. 6'. 7'. sont les opérations symétriques à 5. 6. 7.
(Plier pour amener G'B sur G'G et B'G sur G'G etc.).

8'. Voici la pièce symétrique finie.

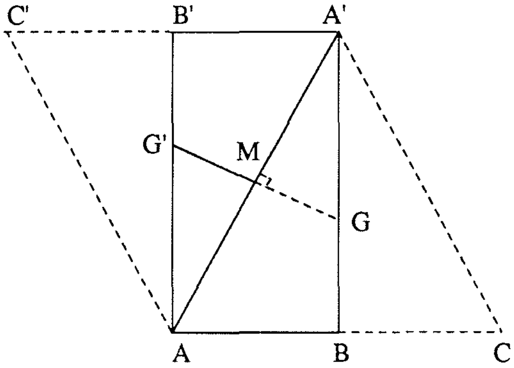


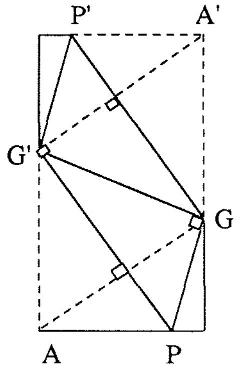
III - QU'AVONS NOUS FAIT ?





En amenant A en A', on a construit un triangle équilatéral AA'C. Le rectangle de base AB A'B' est donc composé de deux demi-triangles équilatéraux ; si AC = $\ell \leftarrow$ on a AB = $\ell/2$ et A'B = $\ell \frac{\sqrt{3}}{2}$. Lorsqu'on plie A sur A', le pli réalisé matérialise la médiatrice GG' de AA'. G et G' sont donc les centres de gravité des triangles équilatéraux AA'C et AA'C'.





Si M est le milieu de AA', on a GG' = 2 MG = 2GB = A'G =2G'B' = AG (puisque le centre de gravité se trouve au deux tiers de la médiane). Les angles G et G' étant égaux à 60°, les triangles G'AG et A'G'G sont équilatéraux. Le parallélogramme final est constitué de deux demi-triangles équilatéraux (GPG' et G'P'G) ; on a G'G = $\frac{2A'B}{3} = \ell \frac{\sqrt{3}}{3}$ = hauteur de ces triangles équilatéraux. On a donc G'P = $\frac{2\ell}{3}$. Le parallélogramme final est donc composé de quatre triangles équilatéraux de cotés $\ell/3$.

IV - CONSTRUCTION DES POLYÈDRES CONVEXES À FACES ÉQUILATÉRALES*

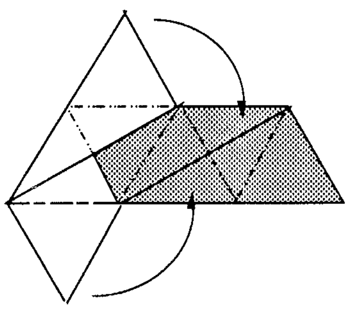
1. Le tétraèdre régulier :

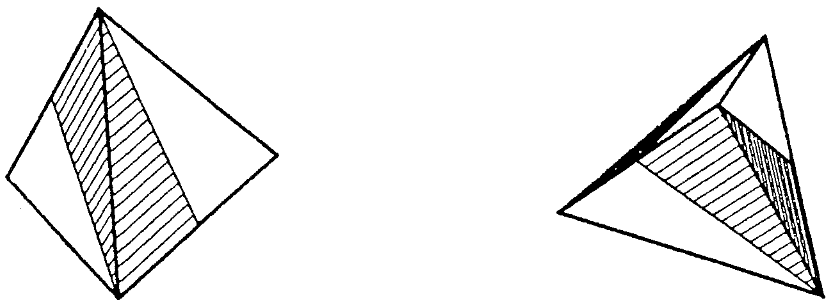
- réaliser deux pièces : l'une identique à la pièce élémentaire et l'autre symétrique à celle-ci ;
- pour construire le tétraèdre, il suffit de glisser les languettes sous la fente diagonale.

Attention : toutes les languettes doivent être utilisées et les fentes diagonales doivent se trouver à l'extérieur du tétraèdre.

* Il faut savoir que les seuls polyèdres **convexes réguliers** à faces équilatérales sont : le tétraèdre (4 faces) ; l'octaèdre (8 faces) ; l'icosaèdre (20 faces).

Exemple





Voici le tétraèdre régulier terminé : les hachures correspondent à une pièce élémentaire (sur aucune des deux vues on ne voit pas cette pièce en totalité, mais les vues se complètent...).

2. L'hexaèdre (6 faces)

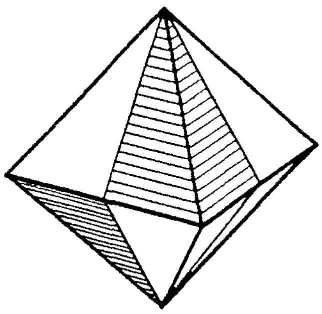
On peut le réaliser soit avec trois pièces identiques à la pièce élémentaire, soit avec deux pièces identiques à la pièce élémentaire et une pièce symétrique.

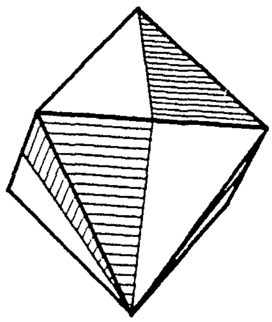
L'hexaèdre ainsi formé est constitué par deux tétraèdres réguliers accolés par une face et donc symétriques par rapport à celle-ci ; si on utilise trois pièces identiques à la pièce élémentaire, cette symétrie sera plus visible.

3. L'octaèdre (8 faces)

On peut le réaliser soit avec quatre pièces identiques à la pièce élémentaire, soit avec deux pièces identiques à la pièce élémentaire et deux pièces symétriques.

L'octaèdre est constitué de deux pyramides symétriques ayant comme base commune un carré ; cette symétrie sera plus visible si on utilise quatre pièces identiques.

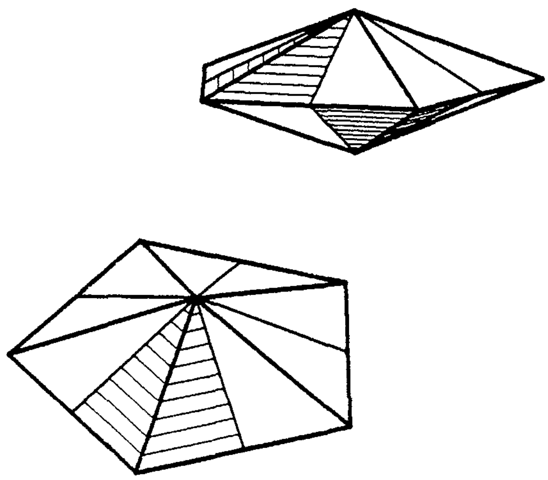




4) Le décaèdre (10 places) ou toupie pentagonale

On peut le réaliser :
- soit avec pièces 5 identiques à la pièce élémentaire,
- soit avec3 pièces identiques à la pièce élémentaire et 2 pièces symétriques.

Le décaèdre est constitué de deux pyramides symétriques ayant comme base commune un pentagone régulier : pour bien voir la symétrie il est préférable d'utiliser cinq pièces identiques.

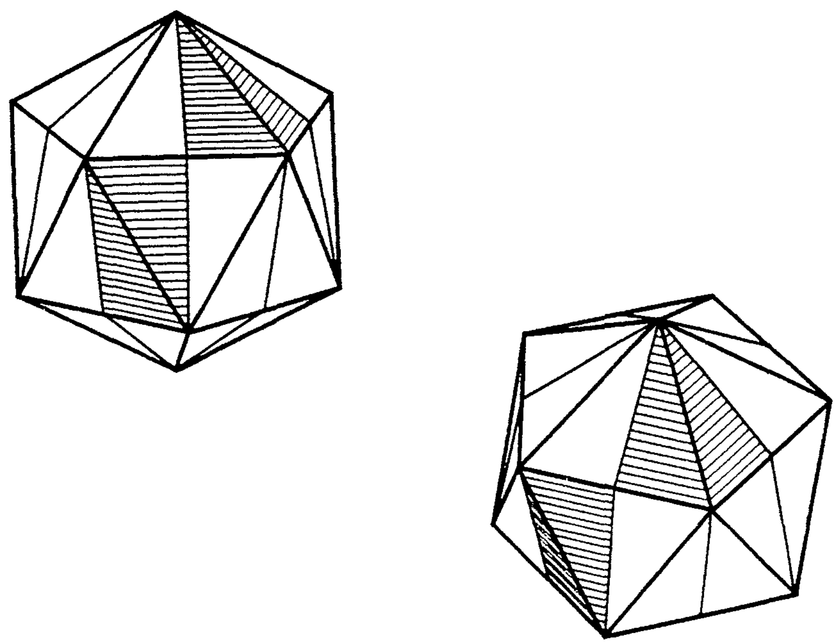


On remarquera que la pièce élémentaire est ici visible en totalité sur la première vue (bien sûr on ne voit que ce qui n'est pas recouvert par les autres pièces !...).

5. L'icosaèdre régulier (20 faces)

On peut le réaliser avec :
- 5 pièces identiques à la pièce élémentaire et
- 5 pièces symétriques

L'icosaèdre possède douze sommets (chaque sommet est commun à cinq triangles équilatéraux).



Ici la pièce élémentaire est visible en totalité sur les deux vues.

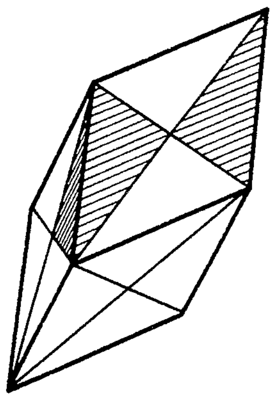
V - QUELQUES PISTES DE TRAVAIL

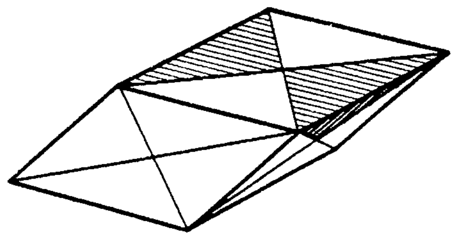
En classe (CM_2 de Mme Odile RIZZATO, École Clos Marchand Saint-Ismier), nous avons choisi de distribuer aux enfants des rectangles de couleur de la "bonne" dimension (d'environ 7,5 x 13 cm) (voir gabarit en fin d'article) et nous avons construit :

- le tétraèdre (2 pièces : 1 et sa symétrique) ;
- l'hexaèdre (avec 3 pièces identiques) ;
- l'octaèdre (avec 4 pièces identiques).

Certains élèves sont arrivés à faire le décaèdre.

Nous avons demandé aux enfants de construire un rhomboèdre parallélépipède oblique ayant comme faces des losanges égaux. Pour cela il faut six pièces : trois pièces élémentaires et trois symétriques. Chaque pièce est alors considérée comme étant formée d'un losange et de deux languettes (cela ressemble beaucoup au cube et il est alors inutile de faire le dernier pli !).



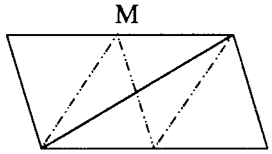


Puis nous leur avons demandé de construire d'autres solides : à eux d'en inventer la forme !

Si les enfants sont très habiles on peut se lancer dans la construction de l'icosaèdre, mais il semble plus raisonnable de leur montrer le volume déjà réalisé avec de "belles" couleurs, cela les incitera peut -être à le faire chez eux...

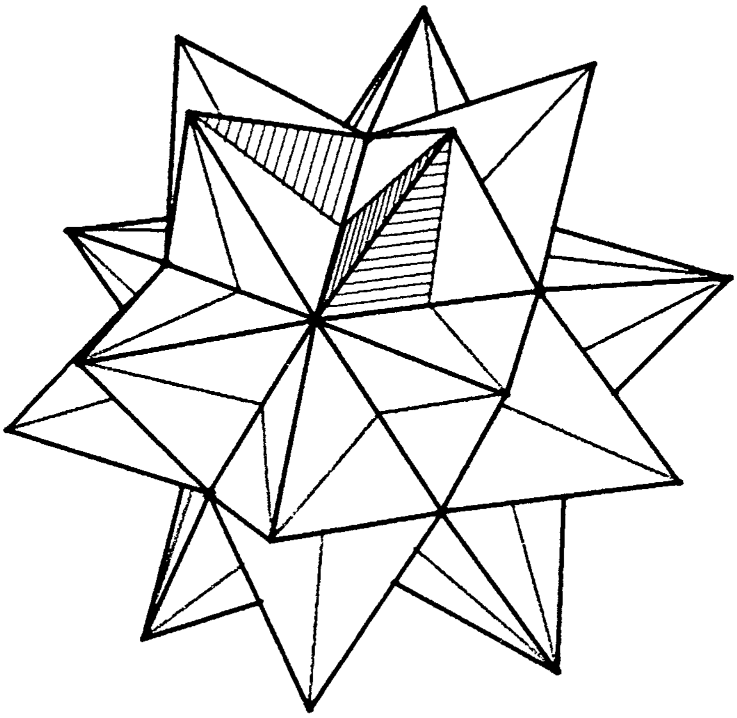
VI - CONCLUSION

Il nous reste à vous signaler que l'on peut réaliser bien d'autres polyèdres à faces équilatérales : en particulier des polyèdres étoilés. Ces derniers sont réalisés avec la même pièce élémentaire.



Seul le dernier pli est différent (MN est un pli en creux et non en relief). Et maintenant à vos pliages et faites nous part de vos questions, de vos réflexions et de vos travaux en classe. Nous vous en ferons un compte rendu dans un prochain numéro de Grand N... En attendant, "faites du volume" et écrivez nous !

Voici l'étoile que l'on peut réaliser avec 30 pièces de base identiques. On peut se représenter ce volume, en imaginant que l'on a posé, sur chaque face de l'isocaèdre, un tétraèdre régulier…



2 carrés de base pour la construction du cube

23

6 rectangles de base pour la construction des polyèdres