

# CENTRE DE SYMÉTRIE D'UNE FIGURE COMPARAISONS DE PRODUCTIONS D'ÉLÈVES DE CM2 ET DE CINQUIÈME.

Sophie CASSAN  
Équipe Didirem, Irem de Paris VII

## Présentation d'une recherche

Les programmes de 1985 du collège marquent un tournant pour l'enseignement des transformations. Celles-ci « n'ont à aucun moment à être présentées comme des applications du plan dans lui-même. Suivant les cas, elles apparaîtront dans leur action sur une figure, ou comme laissant invariante une figure. »

Ainsi l'étude des transformations en tant qu'objets mathématiques s'inscrit dans des situations pour lesquelles ces objets sont avant tout des outils mathématiques. Outil pour agir sur une figure, outil pour mettre en évidence des rapports internes à une figure. L'accent mis par les programmes sur les activités de construction, de manipulation, sur l'aspect expérimental des activités à proposer aux élèves, vient renforcer ce caractère opératoire des objets à étudier.

C'est un changement radical de point de vue que nous proposent les programmes de 85, identiques sur ce point à ceux actuellement en vigueur.

A la suite de la parution de ces "nouveaux" programmes, plusieurs équipes de chercheurs se sont penchées sur l'enseignement de la symétrie orthogonale dorénavant étudiée en 6ème.

Parmi elles, une équipe constituée de Bonneville, Dupraz, Guillerault, Grenier et Laborde, propose un point de vue original, en construisant un processus d'enseignement dans lequel cette transformation est introduite *après* un travail sur la notion de droite de symétrie.

« Ce processus vise à construire la notion de symétrie en tant que transformation de figure, en cela il correspond à l'esprit des nouveaux programmes. Il repose sur l'idée que la notion de figures ayant une symétrie est déjà fortement ancrée culturellement chez les

élèves avant l'enseignement : c'est en partant de cette notion qu'est construite la notion de symétrie en tant que transformation de figures. L'ordre suivi n'est donc pas l'ordre habituel qui présente la notion de figures symétriques par rapport à une droite comme un cas particulier de la notion de symétrie en tant que transformation...»[1]

*Peut-on envisager une même démarche, pour l'étude de la symétrie centrale en cinquième, c'est-à-dire construire cette notion à partir de l'étude de figures admettant un centre de symétrie ?*

La réponse à cette question demande un important travail d'élaboration d'ingénieries didactiques. Or tout travail d'ingénierie nécessite de prendre en compte savoirs, savoir-faire, représentations ou conceptions des élèves sur la notion. L'étude que j'ai menée dans le cadre d'un DEA de didactique des mathématiques, constitue cette première étape de diagnostic des connaissances des élèves. Connaissances pouvant se manifester au travers de procédures de construction, et modélisées suivant certaines conceptions de la symétrie centrale.

Voici ce que je cherchais à observer et les questions auxquelles l'expérimentation me permettait de répondre :

- L'enseignement au collège tend à définir des objets mathématiques de façon conceptuelle. A l'école élémentaire, les définitions sont opératoires, régies par des règles d'action implicites ou explicites. Comment les élèves se situent-ils par rapport à ces deux approches ?

- L'uniformité des définitions proposées en cinquième masque « la richesse et la complexité des conceptions qui peuvent être associées à ces objets. » [2] Les élèves de CM2 adoptent-ils plus facilement divers points de vue que ceux de cinquième ?

- La forte institutionnalisation de la symétrie axiale en classe de sixième (classe charnière entre CM2 et cinquième) a-t-elle une influence et laquelle, pour l'étude de la symétrie centrale ?

Pour cette étude, j'ai travaillé avec une classe de CM2, sur la notion de centre de symétrie d'une figure. Le point de vue adopté dans les situations proposées aux élèves se caractérise par l'introduction de cette notion à partir de l'idée de *demi-tour* (rotation d'angle  $180^\circ$ ) et dans une perspective de *transformation globale de figure* (point de vue adopté dans les programmes de 85). Ceci contrairement à ce qui se pratique en général en classe de cinquième.

L'expérimentation s'est déroulée sur 10 séances réparties sur les mois d'avril à juin 96, d'une durée d'une heure environ. La neuvième séance est une évaluation interne à la classe de CM2, la dixième correspond à une évaluation commune proposée aux 28 élèves de la classe de CM2 et à 56 élèves de trois classes de 5ème, pour qui le chapitre centre de symétrie succédait au chapitre symétrie centrale.

Je me propose dans cet article de rendre compte des résultats obtenus par cette recherche.

Dans un premier temps, un petit retour sur les différentes conceptions de la symétrie centrale s'avère nécessaire, afin de préciser les points de vue que l'on peut adopter pour l'enseignement de cette notion, et celui pris pour l'expérimentation en classe de CM2. Les deuxième et troisième parties seront consacrées à la caractérisation de certaines situations proposées aux élèves de CM2, à l'étude de leurs procédures ainsi qu'à leur évolution au cours de l'apprentissage. Dans une quatrième partie j'étudierai les résultats obtenus lors

de l'évaluation commune CM2 - 5ème, afin d'entrevoir un début de réponse aux questions posées précédemment.

## I. Conceptions de la symétrie centrale

Rappelons brièvement ce que recouvre le mot « conception » :

« La notion de conception répond [...] à deux nécessités distinctes :

- mettre en évidence la pluralité des points de vue possibles sur un même objet mathématique, différencier les représentations et modes de traitement qui lui sont associés, mettre en évidence leur adaptation plus ou moins bonne à la résolution de telle ou telle classe de problèmes,

- aider le didacticien à lutter contre l'illusion de transparence de la communication didactique véhiculée par les modèles empiristes de l'apprentissage, en lui permettant de différencier le savoir que l'enseignement veut transmettre et les connaissances effectivement construites par les élèves. » [3]

La symétrie centrale est à l'articulation de différents types de transformations : c'est une homothétie (de rapport - 1), mais également une rotation (d'angle  $180^\circ$ ) ; et de plus comme toute rotation, elle se décompose en produit de deux réflexions (d'axes perpendiculaires). Regardons d'un peu plus près ces trois définitions, et déterminons ainsi trois conceptions de la symétrie centrale, ne prenant en compte pour l'instant que le premier aspect indiqué par Artigue dans l'extrait cité précédemment.

### • La symétrie centrale, une homothétie de rapport - 1

Introduction la plus fréquemment proposée dans les manuels de cinquième.

« L'image d'un point A par la symétrie centrale de centre O est le point A', tel que O soit le milieu de [AA'] ». L'image d'une figure se déduit de cette définition ponctuelle, en considérant qu'une figure est un ensemble de points : « La figure image est l'ensemble des points images ». Ensuite est introduite la notion de centre de symétrie comme un cas particulier : « Une figure admet un centre de symétrie si elle a pour symétrique elle-même dans la symétrie de centre ce point ».

Nous sommes donc en présence d'une définition ponctuelle de la transformation et d'une *définition ponctuelle de la transformation d'une figure*. Il ne pourrait en effet en être autrement, puisqu'une homothétie n'est pas un déplacement. Il est impossible d'expérimenter la transformation globale homothétique d'une figure, c'est à dire d'envisager *pratiquement* un mouvement entre un état initial et un état final. Tout juste pouvons-nous imaginer une telle transformation : réduction progressive de la figure jusqu'à une confusion de celle-ci avec le centre de la symétrie, puis réapparition suivant la même forme, « à l'envers » et agrandissement progressif pour reprendre sa taille initiale.

Ainsi, considérer la symétrie centrale comme une homothétie de rapport -1 ne permet pas d'agir sur une figure. Ou tout du moins pas globalement. Car si l'usage d'un symétriseur (ou plus généralement pour les homothéties, d'un pantographe) est bien une action réalisée sur une figure, elle reste une action ponctuelle. On construit l'image de chaque point *au fur et à mesure*.

L'approche homothétique permet donc simplement de construire la figure dans une position particulière, relative à une position initiale. Elle ne permet pas d'expérimenter la

transformation.

*La conception homothétie est une approche conceptuelle de la symétrie centrale.*

### **• Symétrie centrale, composée de deux réflexions d'axes perpendiculaires**

Cette définition fait intervenir la symétrie axiale, transformation pouvant être définie dans un premier temps de manière opératoire, à partir de la technique du pliage. La définition par composée impose d'effectuer deux pliages successifs du support de la figure, suivant deux axes perpendiculaires. C'est une introduction souvent proposée en cinquième, puisqu'elle s'appuie sur la notion d'axe de symétrie, notion rencontrée par les élèves dans leur scolarité antérieure.

Or bon nombre d'enseignants ont pu observer chez les élèves de 5ème une confusion dans les tâches de construction entre symétrie axiale et symétrie centrale, ce que Artigue appelle « *l'amalgame de notions sur un support donné* » [3], processus reconnu comme producteur d'obstacles. Étudions d'un peu plus près quelques hypothèses sur l'origine de cet amalgame.

- L'existence d'un centre de symétrie est-elle équivalente à l'existence de deux axes de symétrie ? Non bien sûr. Et pourtant certains seraient tentés de le croire, puisqu'une symétrie centrale peut se décomposer en produit de deux symétries axiales d'axes perpendiculaires. Mais il ne faut pas confondre les éléments intervenant dans la construction d'une figure, et les éléments propres (internes) à la figure.

- Les programmes eux-mêmes entretiennent la confusion des deux notions.

Rappelons les compétences exigibles d'un élève en cinquième, complétées de quelques remarques personnelles :

« *Construire le symétrique d'un point, d'une droite, d'une demi-droite, d'un segment, d'un cercle.* » Toutes ces figures admettent au moins un axe de symétrie.

« *Reconnaître dans une figure simple, un centre de symétrie, un axe de symétrie.* »

La caractéristique d'une figure avec centre de symétrie est-elle visée ? Les "figures simples" sont-elles des figures non complexes, ou bien carré, rectangle, losange, figures usuelles de la géométrie, dont le centre de symétrie est le point d'intersection de deux droites perpendiculaires.

« *Relier les propriétés du parallélogramme à celle de la symétrie centrale.* »

Nous n'en parlerons pas ici. La question reste à étudier.

- L'amalgame provient également des notions elles-mêmes. Bien que de nature distincte (l'une est une isométrie directe et l'autre indirecte) elles ont en commun d'être des isométries involutives.

A cela s'ajoute la désignation de ces deux transformations à partir du même terme de « symétrie »... Citons un exemple révélateur de cette confusion entretenue pour ces deux notions. Le titre du chapitre introduisant la symétrie centrale, dans un manuel récent de cinquième : « *Une symétrie nouvelle* ».

Or si l'on veut donner du sens à la symétrie centrale dans ce qui la caractérise, il est nécessaire de bien la distinguer de la symétrie axiale. Tout comme il est nécessaire de "rompre" avec les nombres entiers pour présenter ces nouveaux nombres que sont les décimaux, *il semble nécessaire de rompre avec la symétrie axiale pour présenter cette nouvelle transformation qu'est la symétrie centrale.*

C'est le point de vue didactique que j'ai adopté pour l'expérimentation en CM2. Du

fait de l'existence d'un tel obstacle, j'ai travaillé dans cette classe les notions de centre de symétrie et de symétrie centrale indépendamment de la conception composée.

### • La symétrie centrale, rotation d'angle $180^\circ$

Une rotation est un déplacement. Et le déplacement d'un objet dans le plan est un mouvement qui s'effectue sans déformation de l'objet. Reprenons une définition donnée dans un ouvrage de 1946 « à l'usage des ouvriers et apprentis des professions industrielles, des candidats aux divers C.A.P., des Écoles des métiers et des Centres de formation professionnelle » :

#### **1. Rotation.**

Au moyen d'une épingle, fixons un point  $O$  d'une feuille de papier sur une planche à dessin (fig. 1). Cette feuille peut *tourner* autour de  $O$ . Ce mouvement s'appelle une *rotation*.

**Définition.** — On appelle rotation le mouvement d'une figure plane qui glisse dans son plan de telle sorte que l'un de ses points reste fixe.

Ce point fixe s'appelle *centre de rotation*.

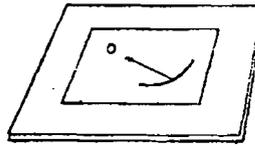


Fig. 1

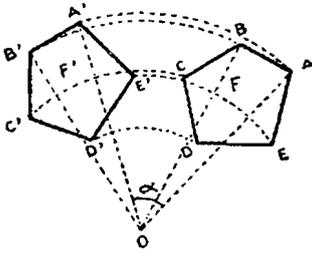


Fig. 2

Une figure quelconque  $F$  tracée sur la feuille de papier subit cette rotation. Sa forme et sa grandeur ne changent pas au cours de ce mouvement. La distance d'un point quelconque de la feuille au point  $O$  reste invariable ; tout point de cette feuille décrit donc une circonférence ayant pour centre le centre de rotation (fig. 2).

Le calque est un bon instrument pour mettre en oeuvre le mouvement afin de construire la transformée d'une figure : on la décalque, et on fait tourner le calque d'un demi-tour autour du point centre de la symétrie.

La transformation d'une figure par rotation suivant ce procédé correspond ainsi à une transformation globale ; la figure n'est pas considérée comme un ensemble de points, mais comme une unité homogène, rigide, compacte, dont tous les éléments varient dans un même temps au cours du mouvement.

*La conception rotation de la symétrie centrale est opératoire, elle est régie par une règle d'action, que les élèves peuvent directement utiliser pour « agir sur des figures ».*

#### **Retour à l'expérimentation**

Au vu des analyses de ces différentes définitions de la symétrie centrale, j'en reviens à cette évidence que *la symétrie centrale, « pour apparaître dans son action sur une figure » doit être considérée comme une rotation d'angle  $180^\circ$ , un demi-tour.*

Bien sûr, ceci dans un premier temps de l'enseignement. Il s'agira par la suite de faire coexister les différentes conceptions de la symétrie centrale.

C'est donc suivant la conception rotation que j'ai choisi d'introduire auprès des élèves de CM2 la notion de centre de symétrie d'une figure. Je l'ai formulée de la façon suivante : « Lorsqu'on décalque certaines figures et que l'on fait tourner le calque d'un demi-tour autour d'un point, il se trouve parfois que la figure du calque se superpose à celle de départ. Pour ces figures le centre du demi-tour est appelé le centre de symétrie. »

Bien sûr, il a fallu au préalable se mettre d'accord sur un moyen rigoureux d'effectuer ou de valider un demi-tour. On peut considérer une droite passant par le centre du demi-tour, mais l'on peut aussi considérer un point de la figure et son image par le demi-tour. C'est un moyen plus coûteux, mais qui permet de faire le lien entre les aspects ponctuel et global de la transformation. Et concernant l'aspect ponctuel l'équivalence entre la conception rotation ( $A' = R_{(O, \pi)}(A)$ ) et la conception homothétie ( $A'$  tel que  $O$  soit le milieu de  $[AA']$ ) peut s'établir.

L'équivalence entre les deux procédures a été mise en évidence par les élèves, lors de la première séance suite à la confrontation de leurs productions. Elle a été institutionnalisée sous la forme suivante : « Deux points opposés dans un demi-tour sont sur une ligne droite qui passe par le centre du demi-tour. Le centre du demi-tour est au milieu de ces deux points opposés. »

Le paragraphe suivant rend compte de l'étude des procédures des élèves pour cette tâche ponctuelle de construction du symétrique d'un point.

## II. Point de vue ponctuel, construction du symétrique d'un point par demi-tour

### 1. La situation

Étant donné deux points  $O$  et  $A$ , il s'agit de construire l'image du point  $A$  par la symétrie de centre  $O$ .

Deux procédures peuvent être envisagées :

- une *procédure cercle* : construction du cercle de centre  $O$  et de rayon  $OA$ , puis construction du diamètre du cercle issu de  $A$  (procédure de référence dans la classe de CM2)

- une *procédure segment* : construction de la droite  $(OA)$ , puis report de la longueur  $OA$  sur la demi-droite complémentaire à  $[OA]$ , à partir du point  $O$  (procédure de référence dans les classes de cinquième)

Ces procédures ne sont pas de même nature : la première est relative à la conception rotation de la symétrie centrale, elle fait intervenir les notions de cercle et d'alignement ; la seconde est relative à la conception homothétie, elle fait intervenir les notions d'alignement et de longueur.

Pour ce qui relève de l'usage des instruments, on retrouve cette ambivalence de fonction pour le compas : utilisé pour construire un cercle dans une procédure cercle ; utilisé pour reporter une longueur dans une procédure segment.

Une des hypothèses de travail était de considérer que la procédure cercle serait vite

abandonnée par les élèves de CM2 au profit de la procédure segment. Ceci parce qu'elle est un raccourci de la procédure cercle, construction d'un arc bien positionné au lieu du cercle tout entier, mais également en raison d'un principe de plus court chemin entre deux points d'un cercle : la corde et non l'arc de cercle.

## 2. Quelques variables

Cette situation de construction du symétrique d'un point par demi-tour a été proposée à quatre reprises lors de l'expérimentation, afin d'observer l'évolution des démarches des élèves. Mais avant de donner les résultats, indiquons une variable essentielle modifiée à chaque reprise : le milieu figural dans lequel les constructions sont à réaliser. C'est à dire :

- pour la séance 3, seul le point centre du demi-tour a été positionné sur la feuille donnée aux élèves. Les élèves positionnent eux-mêmes les autres points.

- pour la séance 6, les points sont situés sur le contour de figures admettant un centre de symétrie, qui est aussi le centre du demi-tour considéré. La spécificité des figures proposées apporte alors une information supplémentaire : le symétrique du point est nécessairement sur le contour de la figure (annexe 1, doc. 1)

- pour la séance 9 (le contrôle des CM2) et la séance 10 (l'évaluation commune), les points sont situés sur des figures n'admettant pas de centre de symétrie, et le centre du demi-tour est à l'intérieur ou sur le contour de ces figures (annexe 1, doc. 2).

Il se crée ici une difficulté d'appréhension : où se retrouve le point après un demi-tour ?

- « *Ca sort de la figure ! Je ne comprends pas.* »

- « *J'ai fait un demi-tour et il arrive là. Il faut le mettre au bord de la figure ?* »

- « *Vous n'avez pas fait l'autre figure pour celle là, alors c'est pas vraiment un centre de symétrie.* »

Le fait de proposer en nouveauté, lors d'une évaluation, des figures n'ayant pas de centre de symétrie, dans le cadre d'un travail sur cette notion, est une rupture de contrat didactique, voulue afin d'étudier la maîtrise et la stabilité des connaissances.

Une seconde variable (liée bien sûr à la première) pour le cadre défini lors des séances 6 et 9, est le nombre de points d'intersection entre une figure et les éléments intervenant dans une construction (procédure cercle ou segment).

En effet le cercle de centre O de rayon OA, ou bien la droite (OA), peut admettre plusieurs points d'intersection avec une figure (distincts de A, bien sûr). Par conséquent l'élève doit *choisir* celui correspondant ou non au symétrique de A.

- S'il n'y a qu'un seul point d'intersection, les élèves peuvent effectuer une construction juste sans que l'on sache si leur démarche est réfléchie, puisque qu'il n'y a pas de choix à faire. Par conséquent nous ne pourrions véritablement parler de maîtrise de la procédure.

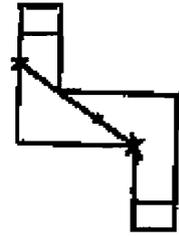
- S'il y a plusieurs points d'intersection, les erreurs de choix permettent de mettre en évidence que le sens de la procédure n'est pas construit par l'élève, même s'il fait appel à une conception homothétie ou rotation. J'appellerai par la suite ce phénomène « l'effet contour ».

Donnons un exemple de chaque type d'erreur provoquée par cet « effet contour », exemples sur lesquels les élèves ont travaillé lors d'une phase d'institutionnalisation (séance 7) :

erreur « contour - longueur »



erreur « contour - alignement »



### 3. Évolution des procédures

Dressons maintenant deux types de tableaux :

le premier présente l'évolution au cours du processus de l'utilisation de telle ou telle procédure, *indépendamment des erreurs*.

	séance 3	séance 6	séance 9	séance 10
procédure cercle	13	7	2	3
procédure segment	6	16	20	20
présence des deux	8	2	3	4

Ainsi les élèves de CM2 ont élaboré la procédure segment en tant que moyen efficace, pour construire l'image d'un point par un demi-tour. Ici, et seulement d'un point de vue ponctuel, l'équivalence entre rotation d'angle  $180^\circ$  et homothétie de rapport  $-1$  semble établie pour une majorité d'élèves de CM2.

Le second tableau présente les répartitions des différentes procédures utilisées lors des deux évaluations (séances 9 et 10, ayant eu lieu à un mois d'écart). Ces situations sont caractérisées par les deux variables définies précédemment, et fixées afin de créer un conflit entre l'aspect ponctuel de l'action à réaliser et l'aspect global du milieu figural.

Ce tableau prend en compte cette fois-ci les erreurs des élèves. En effet la mention "procédure indéterminée" est donnée pour des productions contenant au moins une erreur de construction, même si par déduction il était possible d'attribuer telle procédure à l'élève. Cela permet de renforcer la perception d'une maîtrise et d'une stabilité des procédures utilisées par les élèves dont toutes les constructions sont correctes (les trois premières lignes du tableau). Lorsqu'un élève procédait régulièrement de la même façon pour les quatre constructions d'un exercice, je me suis permis de parler de conception rotation pour l'usage de la procédure cercle, et de conception homothétie pour l'usage de la procédure segment.

Évaluation commune	Conception homothétie	Conception rotation	Procédures cercle et segment	Procédure indéterminée	Non fait
<b>Contrôle CM2</b>					
Conception homothétie	5	1	1	1	
Conception rotation	1	1	1	1	
Procédures cercle et segment	5		1		
Procédure indéterminée	3	1		3	1
Non fait				2	

Seize élèves utilisent l'une ou l'autre des procédures cercle et segment, de façon correcte, lors des deux évaluations. Nous pouvons dire que *leurs procédures sont efficaces et résistent au conflit ponctuel-global de la situation proposée, elles semblent donc stables.*

Il nous paraît important de constater pour neuf élèves (indiqués en gras) une évolution des procédures vers la procédure segment, et ceci de manière efficace. Rappelons qu'entre le contrôle et l'évaluation commune, aucune séance de travail n'est effectuée, si ce n'est la correction du contrôle. Que s'est-il passé pour ces élèves ? Quelque chose a mûri. Ce petit résultat confirme qu'*un travail de conceptualisation est un processus cognitif, qui prend du temps pour se développer et peut prendre sens bien après l'enseignement qui lui donne naissance.*

La conception homothétie a fait son chemin auprès des élèves, depuis la première séance sur le demi-tour, elle a bien émergé comme un moyen sûr et peut-être rapide de construire le point correspondant à un point donné dans un demi-tour de centre donné. Ce n'est plus l'implication qui se donne à voir, mais l'utilisation implicite de sa réciproque.

### III Point de vue sur l'aspect global de la symétrie centrale

Il s'agit ici d'étudier des situations pour lesquelles la transformation symétrie centrale intervient dans son action sur une figure donnée ; pour la compléter afin qu'elle admette un centre de symétrie (c'est à dire implicitement construire son image), ou bien construire une figure admettant un centre de symétrie. La première de ces situations sera étudiée dans la partie IV. 2 à propos d'un exercice donné lors de l'évaluation commune CM2 - 5ème. Je m'intéresserai essentiellement ici à la seconde.

La situation mise en place pour l'expérimentation permettant l'observation des références élaborées par les élèves avant et au cours de l'apprentissage, est celle de la construction d'une figure admettant un centre de symétrie. Telle est la consigne donnée aux élèves ; à disposition, tous instruments, feuilles blanches et papier calque.

#### 1. Procédures attendues

Trois procédures peuvent être mises en oeuvre :

##### - *La procédure calque*

Elle consiste comme son nom l'indique à utiliser le calque pour la construction, en revenant à la définition du centre de symétrie d'une figure, globalement invariante par demi-tour.

Elle est directement liée à la conception rotation de la symétrie centrale, dans son aspect transformation globale.

##### - *La procédure ponctuelle*

Elle consiste à ne considérer que des symétriques de points, judicieusement choisis, pour déterminer l'image d'une figure. Et à utiliser les théorèmes suivants : « l'image d'un segment est un segment d'extrémités les images des extrémités du segment initial », « l'image d'un cercle est un cercle de centre l'image du cercle initial et de même rayon ».

Cette procédure est liée à la conception homothétie de la symétrie centrale. Elle fait intervenir la transformation d'un point de vue ponctuel, pour une tâche globale.

- *La procédure semi-ponctuelle*

Elle consiste à déterminer le symétrique d'un seul point de la figure, puis à utiliser les propriétés globales de la transformation pour déterminer le symétrique de l'ensemble.

Considérons la construction de l'image d'un segment. Il peut être déterminé à partir d'une seule extrémité du segment. Partant de ce point, on construit un segment de même longueur, de même direction, mais d'orientation opposée. Une formulation possible du théorème utilisé implicitement ici peut s'énoncer à partir de la notion de vecteur, c'est elle qui rend le mieux compte des aspects de la procédure : « l'image d'un vecteur (par l'application vectorielle associée) est un vecteur colinéaire, de même norme, de sens contraire, d'origine le symétrique de l'origine du vecteur initial. »

Les deux procédures (ponctuelle et surtout semi-ponctuelle) mettent directement en jeu les propriétés de la symétrie centrale : conservation des longueurs, des angles, des directions, changement d'orientation pour une direction donnée ..., elles font intervenir des théorèmes tels que : « L'image d'un segment est un segment parallèle, de même longueur », « l'image d'un cercle est un cercle de même rayon »...

Nous pourrions parler à propos de ces deux procédures de « *théorèmes en acte* » au sens défini par Vergnaud : « Le concept de « théorème en acte » désigne les propriétés des relations saisies et utilisées par le sujet en situation de résolution de problème, étant entendu que cela ne signifie pas pour autant qu'il est capable de les expliciter ou de les justifier. » [5]

Dans les classes de cinquième ces théorèmes ont été institutionnalisés. Par contre en CM2, il n'en a pas été fait mention. Je voulais observer dans quelle mesure ils étaient implicitement mis en actes par les élèves.

## 2. Observations, résultats

Cette situation a été proposée à trois reprises. La première fois, nous avons observé l'émergence des figures usuelles : cercle (11 élèves), carré (21), rectangle (19), losange (5), parallélogramme (5), segment (7) et triangle (16!).

Le centre de symétrie est toujours positionné en dernier, *après* la construction de la figure, comme point d'intersection de certains segments. Il semblerait que ce point ne soit pas considéré par une majorité d'élèves comme un centre de symétrie, mais plutôt comme un point d'équilibre de la figure, une sorte de centre de gravité.

D'autre part, *les constructions s'appuient essentiellement sur des images de références, culturelles et surtout scolaires, de figures admettant deux axes de symétrie.*

Pour faire barrage à l'idée de symétrie axiale, prédominante dans le choix des figures usuelles, nous avons ajouté une contrainte à la consigne, lors des deux autres séances (la 8 et la 9). La nouvelle consigne est formulée ainsi « *Inventer une figure qui admet un centre de symétrie, mais pas d'axe de symétrie* ». Le verbe d'action a été changé pour inciter les élèves à se détacher des figures usuelles et à élaborer leur propre stratégie. Le verbe construire semblait sous-entendre que "la chose" à construire préexiste à la tâche.

La contrainte « pas d'axe ... » rend *a priori* la tâche plus complexe, en cela qu'elle remet en cause les références des élèves, elle nécessite la mobilisation de l'outil symétrie centrale ou centre de symétrie, mais pas nécessairement indépendamment des repères d'axes, comme nous allons le voir.

A cette nouvelle consigne, lors des deux autres séances, les figures usuelles

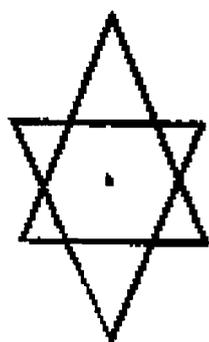
résistent mal, cependant le carré apparaît encore une fois, le rectangle également, le cercle est construit par deux élèves, segment et triangle, équilatéral cette fois ci, apparaissent à trois reprises. A cela il faut ajouter que le parallélogramme non plus ne résiste pas à la consigne ; il est proposé par deux élèves uniquement. Admettrait-il pour les élèves des axes de symétrie ? Est-ce l'utilisation du mot « inventer » qui l'exclut des productions d'élèves ?

Intéressons nous aux procédures de constructions de figures non usuelles répondant à la consigne (admettant un centre de symétrie, mais pas d'axe de symétrie) sur l'ensemble des trois séances.

La procédure calque est utilisée par trois élèves uniquement.

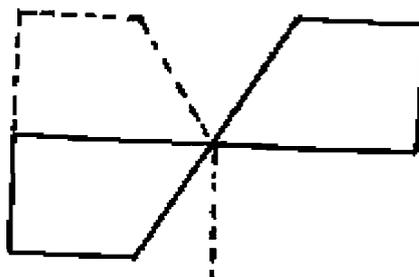
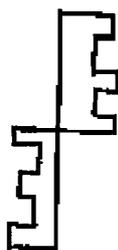
Francis et Abdoul ont construit un triangle isocèle, placé un point à l'intérieur, puis ils ont construit avec le calque l'image du triangle par le demi-tour de point marqué. En raison des rappels horizontale - verticale que présente le triangle isocèle dans une certaine position, ces élèves semblent avoir pris comme repère pour effectuer le demi-tour l'axe de symétrie du triangle. A fortiori la figure finale admet deux axes de symétrie.

Alexandre a procédé de même avec le contour de la France décalqué dans son cahier de texte. Mais contrairement à Francis et Abdoul, il a choisi *une figure quelconque*, et a *construit* une droite passant par le centre qu'il avait choisi pour effectuer son demi-tour.



Pour ces productions *un point a été choisi pour être le centre d'un demi-tour, puis devenir le centre de symétrie d'une figure*. La conception rotation de la transformation est mise en oeuvre comme outil de construction.

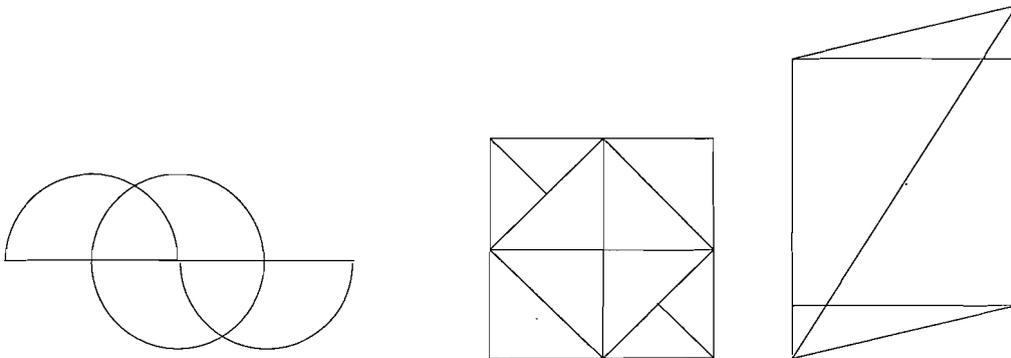
Une autre procédure non annoncée préalablement et mettant directement à l'oeuvre la conception composée de la transformation, consiste à construire une figure quelconque, puis *choisir un point centre de symétrie, point d'intersection de deux droites perpendiculaires*, et composer les deux réflexions d'axes pré-définis. Exemples :



Toutes les autres productions sont caractérisées par une procédure, également non attendue a priori, qui se caractérise de la façon suivante : *le choix d'une figure prototypique de base, admettant généralement deux axes de symétrie, puis la juxtaposition à cette figure d'un élément, et enfin la construction utilisant une procédure semi-punctuelle, du symétrique de cet élément.*

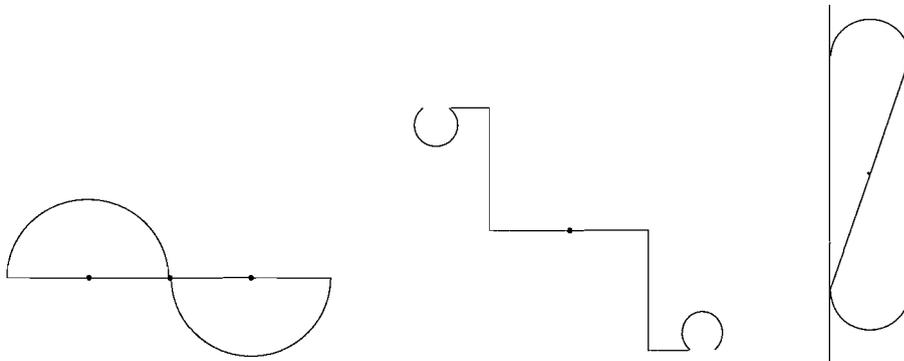
Distinguons les productions en fonction du choix de la figure initiale, il n'est pas anodin et révèle quelques aspects des conceptions des élèves. Trois types de figures sont choisies pour initialiser une construction :

- *une figure usuelle admettant deux axes de symétrie* (ou plus), un carré en général, mais aussi un rectangle, un losange ou un cercle. Ensuite les élèves construisent un élément et son correspondant par symétrie centrale, de telle sorte que soient disqualifiés les axes de symétrie au profit du centre. En voici quelques exemples :



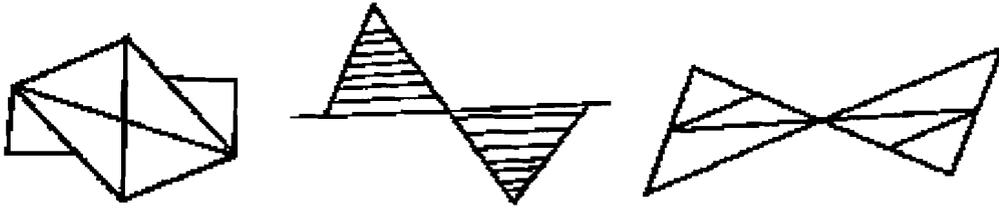
- *deuxième type de figure choisie : un segment.* Même s'il admet comme les figures de base précédentes deux axes de symétrie, je l'ai mis à part pour deux raisons : les élèves l'envisagent en général, comme une figure n'admettant qu'un axe de symétrie. Et d'autre part c'est la figure minimale, faisant a posteriori apparaître le centre de symétrie comme le milieu d'un segment, et non plus comme le point d'intersection de deux axes. Et en cela on pourrait établir une liaison avec une conception homothétique de la transformation.

Quelques propositions d'élèves :



- *la troisième figure de base considérée est un parallélogramme.* Tout à fait prometteur, puisqu'il s'agit de la configuration directement associée à la symétrie centrale. Toutefois je conserve quelques doutes quant au statut de cette figure pour les élèves. Il n'est pas certain, que quelques uns la considèrent comme une figure admettant deux axes de symétrie, auquel cas ce troisième genre de prototype est à ranger avec le premier cité.

Exemples de productions :



Voici comment se répartissent sur les trois séances les productions des élèves *en fonction du choix fait pour la figure initiale*. Je considère également les productions ne répondant pas à la consigne, mais déterminées par ce choix. Cela concerne uniquement les figures non usuelles.

En gras, le nombre d'élèves ayant produit au moins une figure non usuelle admettant un centre de symétrie mais pas d'axe de symétrie. En italique le nombre total d'élèves produisant ce type de figures y compris ceux dont la procédure n'a pas abouti, c'est à dire produisant généralement une erreur dans la construction du symétrique de l'élément juxtaposé à la figure prototypique. La total peut être supérieur à 28, dans la mesure où certains élèves proposent différents types de figures.

	I	II	III
figures quelconques	<b>2</b>		<b>2</b>
demi-tour ou composée		<i>3</i>	<i>1</i>
figures admettant deux axes de symétrie	<b>3</b>	<b>4</b>	<b>4</b>
		<i>11</i>	<i>7</i>
segment	<b>3</b>	<b>9</b>	<b>15</b>
		<i>3</i>	<i>10</i>
parallélogramme	<b>2</b>	<b>4</b>	<b>4</b>
		<i>5</i>	<i>5</i>
			<i>4</i>

Comme nous pouvons le constater, les productions sont de plus en plus initialisées par le choix d'un segment pour figure de base. Cela ne veut pas dire pour autant que les élèves ont *choisi a priori* pour centre de symétrie de leur figure le milieu du segment. *Il semblerait* au contraire, au vu de l'ensemble des productions, *que leurs procédures soient déterminées à partir d'une perception globale*. Ce n'est qu'*a posteriori*, par l'analyse des figures produites, que se dégagent différents statuts du centre de symétrie d'une figure (point d'intersection de deux droites perpendiculaires, milieu d'un segment, point d'intersection des diagonales d'un parallélogramme).

Finalement la mise en oeuvre de la symétrie centrale intervient uniquement dans un second temps de leurs constructions, lorsqu'il s'agit de construire le symétrique de l'élément juxtaposé à la figure de base. Elle s'effectue au travers d'une procédure semi-ponctuelle, qui relève plutôt d'une conception pratique de la transformation, une quatrième *conception de la symétrie centrale relative à ses propriétés globales de conservation*.

Seuls les élèves ayant choisi une figure quelconque utilisent la transformation suivant une des *conceptions relatives à une définition* (ici rotation et composée).

Pour conclure sur cette situation, il semble donc que son intérêt réside dans la mise en évidence des conceptions des élèves, de ce qu'est une figure admettant un centre de

symétrie, sous son aspect perceptif (global). Celui-ci restant très attaché à une prégnance des figures admettant deux axes de symétrie. Dans une perspective d'enseignement, l'analyse a posteriori des productions, que l'on pourrait mener avec les élèves, permettra de dégager les différents statuts (ou natures) du centre de symétrie d'une figure.

#### IV. Comparaisons CM2 - 5ème

Rappelons les conditions d'expérimentation de l'évaluation commune proposée aux élèves de CM2 et de cinquième (annexe 3). Elle a eu lieu en fin d'année scolaire, au mois de juin, un mois après la fin des séances menées à l'école primaire. Elle s'est déroulée sur une durée de 35 minutes, les élèves avaient à disposition tous types d'instruments, entre autre du papier calque pour effectuer ou valider une construction.

Rappelons également en ce qui concerne l'enseignement de la symétrie centrale dans les classes de cinquième, la présentation faite à partir de la conception homothétique, et l'introduction de la notion de centre de symétrie d'une figure comme un cas particulier de l'étude de figures symétriques.

Quatre exercices, correspondant à quatre situations distinctes ont été proposés :

1. Construire le symétrique d'un point situé sur le contour d'une figure n'admettant pas de centre de symétrie.
2. Compléter une figure afin qu'elle admette un centre de symétrie.
3. Effectuer un coloriage pour mettre en évidence de façon exclusive un centre de symétrie ou un axe de symétrie d'une figure en admettant deux.
4. Reconnaître parmi un ensemble de figures, celles admettant un centre de symétrie.

##### 1. Exercice 1 : construction du symétrique d'un point

Je renvoie le lecteur à la partie II. 2 pour la définition des variables de cet exercice, des procédures cercle et segment, des types d'erreurs « alignement » et « contour », et de ce que j'ai appelé « l'effet contour ». Et à l'annexe 3 pour l'énoncé et les figures proposées.

Dressons le tableau des répartitions des différentes procédures utilisées pour les quatre figures.

La mention indétermination est donnée pour des productions contenant au moins une erreur de construction, même si par déduction il était possible d'attribuer telle ou telle procédure à l'élève. Cela permet de renforcer l'aspect « maîtrise d'une procédure ».

	CM2 28 élèves	5ème 56 élèves	CM2 en %	5ème en %
procédure cercle	3	5	10,8	8,9
procédure segment	14	30	50	53,5
procédures cercle et segment	3	1	10,8	1,8
procédure indéterminée	7	18	25	32,1
non fait	1	2	3,6	3,6

Dans la mesure où ne sont prises en compte dans les trois premières catégories que des constructions *toutes* correctes, les élèves de CM2 maîtrisent légèrement mieux leurs procédures que ceux de cinquième. Les conceptions auxquelles elles se réfèrent sont sensiblement moins stables pour ces derniers. *Les deux conceptions rotation et homothétie semblent cohabiter plus facilement pour les élèves de CM2, alors qu'au niveau collège la seconde reste prédominante.*

Puisque les principales erreurs des élèves ont porté sur les figures 1 et 3, et parce l'étude en est plus intéressante, nous allons détailler leurs répartitions, permettant de comprendre peut-être le nombre important de ce que nous avons appelé procédure indéterminée. Remarquons que les figures 1 et 3 se distinguent des deux autres par leur forme courbe, et la position du centre de symétrie.



Figure 1



Figure 3

Le tableau suivant indique le nombre d'élèves produisant telle ou telle erreur, ne donnant aucune réponse, ou effectuant une construction correcte.

	FIGURE 1		FIGURE 3	
	CM2 28 él.	5ème 56 él.	CM2 28 él.	5ème 56 él.
Erreur <b>contour-longueur</b>	1 3,6%	8 14,3%		6 10,7%
Erreur <b>contour-alignement</b>	4 14,3%	3 5,4%	3 10,7%	1 1,8%
Erreur contour		1 1,8%	1 3,6%	4 7,1%
Non fait	1 3,6%	2 3,6%	2 7,1%	3 5,4%
<b>Total de réussite</b>	22 78,6%	42 75,0%	22 78,6%	42 75,0%

Le nombre de constructions répondant à la consigne est sensiblement identique pour les élèves des deux niveaux.

De même l'effet contour joue autant pour les élèves de CM2 que pour ceux de cinquième. Tentons une explication à ce phénomène.

Au niveau collège, les transformations de figures se font généralement dans un cadre non figuratif. On transforme des cercles, des demi-cercles, des quarts de cercles, ou des segments, mais rarement des courbes non droites et non circulaires ; on aurait d'ailleurs du mal à le faire sans un recours au calque pour obtenir un tracé précis en un temps relativement court. D'autre part c'est une idée pouvant apparaître saugrenue que de demander la construction du symétrique d'un point situé sur le contour d'une figure sans que cela ait un lien avec la figure. Les élèves de CM2 avaient eu l'occasion lors du contrôle de se confronter à cette proposition, l'effet de surprise a peut-être joué pour les élèves de cinquième.

Il apparaît dans ce tableau un fait surprenant : la proportion d'élèves de CM2 produisant une erreur « contour - alignement » est identique à celle des élèves de collège produisant une erreur « contour - longueur ».

L'erreur privilégiant l'alignement, est généralement issue de la construction de la droite passant par le centre de la symétrie et le point considéré. Celle privilégiant l'égalité des longueurs, provient de la construction du cercle dont le centre est le centre de la symétrie, passant par le point considéré. Ainsi l'erreur « contour-alignement », issue d'une procédure segment, serait un effet de la conception homothétique. Et l'erreur « contour-longueur », issue d'une procédure cercle, un effet de la conception rotation.

C'est l'hypothèse la plus envisageable, mais concernant les élèves de cinquième, elle contredit l'utilisation massive de la conception homothétique.

Nous pouvons faire une autre hypothèse, contraire à la première, basée sur les faits suivants :

Le processus d'enseignement mis en place avec les élèves de CM2 prend appui sur l'outil demi-tour. Les repères à prendre pour faire effectuer un demi-tour à une forme peuvent se réduire à une droite passant par le centre du demi-tour, d'où l'importance accordée à l'alignement des points. Il n'est pas nécessaire de considérer de longueur.

En cinquième par contre, la construction du symétrique d'un point se fait en utilisant une procédure milieu. Le report des longueurs est toujours sollicité. Or il est une erreur souvent rencontrée à propos du lien entre milieu et longueur, c'est l'implication fautive pouvant se formuler ainsi : « Étant donnés trois points distincts I, A et B, si  $IA = IB$  alors I est le milieu du segment [AB] ». Sa réciproque est bien évidemment vraie, mais les notions de propriétés et propriétés réciproques sont encore mal maîtrisées à ce niveau.

Ainsi l'erreur « contour-alignement » serait un effet de la conception rotation (prise de repères pour effectuer le demi-tour). Et l'erreur « contour-longueur » serait un effet de la conception homothétique (ambiguïté milieu - longueur).

Ces deux hypothèses contradictoires ne permettent pas de conclure sur une éventuelle liaison entre erreur, procédure et conception. Elles permettent d'entrevoir les limites des modélisations proposées, du fait des imbrications et proximités entre les différents algorithmes utilisés dans le cadre ponctuel.

## 2. Exercice 2 : Complétion d'une figure

Nous ferons l'analyse à partir des résultats obtenus pour la figure 2. Car elle met aussi en évidence les résultats obtenus pour les autres figures, les régularités, tout en tenant compte de certaines nuances.

Nous donnons le nombre d'élèves utilisant chacune des procédures définies dans la partie III.1, indépendamment des erreurs d'une part, puis le nombre de ceux ayant

construit une figure répondant à la consigne. Il peut être intéressant de savoir si une procédure aboutit ou non, et pourquoi.

**FIGURE 2**

	Indépendamment des erreurs		Construction correcte	
	CM2 28 él.	5ème 56 él.	CM2 28 él.	5ème 56 él.
Procédure calque	18 <i>64,3%</i>	4 <i>7,1%</i>	16 <i>57,1%</i>	3 <i>5,4%</i>
Procédure semi-ponctuelle	4 <i>14,3%</i>	9 <i>16,1%</i>	2 <i>7,1%</i>	3 <i>5,4%</i>
Procédure ponctuelle	1 <i>3,6%</i>	33 <i>58,9%</i>	1 <i>3,6%</i>	19 <i>33,9%</i>
Non fait	4 <i>14,3%</i>	10 <i>17,9%</i>		
	Total de tracés corrects		19 <i>67,9%</i>	25 <i>44,6%</i>

**• Pour ce qui relève du choix de la procédure**

les élèves de CM2 utilisent très majoritairement le calque, tandis qu'en cinquième la procédure ponctuelle est privilégiée. Résultat conforme aux spécificités des enseignements faits à ces deux niveaux. Il est cependant intéressant de constater qu'un nombre non négligeable d'élèves de primaire mettent en oeuvre des « théorèmes en actes » nécessités par la procédure semi-ponctuelle.

Quelques remarques concernant le nombre important d'élèves de CM2 utilisant une procédure calque : la tâche est proposée dans le cadre d'une évaluation. Or ce moment n'est pas un temps de recherche. Par conséquent les élèves ont recours à l'outil qui fait référence pour eux, le plus sûr pour aboutir à un résultat juste : le calque. *L'éloignement dans le temps de l'évaluation commune fait apparaître ce que les élèves ont construit de manière stable. Ils mettent en oeuvre la stratégie ayant fait sens pour eux lors du premier contact avec cette situation.* Une figure admettant un centre de symétrie est une figure globalement invariante par demi-tour.

Remarquons également qu'aucune propriété de la transformation n'avait été formulée lors du processus, or classiquement il est évalué ce qui est institutionnalisé, les élèves se sont peut-être pliés à cet usage.

**• Des procédures qui n'aboutissent pas**

- Les erreurs produites dans l'utilisation du calque, s'observent uniquement pour cette figure 2. Mises à part celles provenant d'une confusion de tâche (complétion par symétrie axiale), elles sont issues d'un demi-tour mal effectué (pour CM2 et cinquième). En effet, contrairement aux autres figures, la 2 n'offre pas de repère pour effectuer un demi-tour, l'initiative est à prendre par les élèves.

Il est à regretter que la position des autres figures proposées offre des repères pour cette construction : segment de la figure passant par le centre du demi-tour, références horizontale-verticale. Si tel n'était le cas j'aurais pu observer dans quelle mesure les élèves

réinvestissent une procédure cercle ou segment (cadre ponctuel) pour effectuer le demi-tour (un petit manque dans l'analyse a priori de la situation !)

- La procédure ponctuelle fait surgir un nouveau type d'erreur propre aux élèves de cinquième. Ce ne sont pas à proprement parler des erreurs (constructions fausses contredisant une condition nécessaire à un juste tracé), ce sont des oublis. Pour construire le symétrique d'un segment, les élèves construisent bien les symétriques des deux extrémités, mais oublient de relier les points construits ou bien les relient à d'autres points.

C'est un signe nous permettant d'affirmer que cette procédure n'a pas pris sens pour certains élèves comme moyen de transformer *globalement* une figure. Elle apparaît comme un algorithme dépourvu de son objectif.

Rappelons une question que se posaient Grenier et Laborde : « L'élève peut-il réinvestir ses connaissances sur la construction du symétrique d'un point pour construire le symétrique de n'importe quelle figure ? » [1]

Au vu des résultats des élèves de collège, peut-on se risquer à répondre non ? Les connaissances sur la construction du symétrique d'un point ne sont une condition ni nécessaire, ni suffisante à la construction de symétriques de figures. Cependant c'est un passage obligé vers l'étude de transformations comme application du plan dans lui-même, mais ce n'est pas l'objectif de l'enseignement de cette notion en classe de cinquième.

- Les erreurs issues des procédures ponctuelle et semi-ponctuelle proviennent cependant majoritairement de la confusion axe de symétrie - centre de symétrie, avec une même fréquence pour les élèves des deux niveaux. Serait-ce dû à un amalgame d'énoncés ? Rappelons que ce type de situation « Compléter une figure » est un exercice classique posé dans le cadre de la symétrie orthogonale, et ceci principalement en classe de sixième. Seuls 2 élèves en CM2, mais 11 en cinquième proposent quatre constructions de figures dont aucune n'admet un centre de symétrie. L'hypothèse précédente est donc à relativiser pour les élèves de primaire mais semble se confirmer pour ceux de collège.

Ce peut être un effet de contrat didactique, mais il n'en reste pas moins que pour certains élèves la notion d'axe de symétrie est un obstacle pour l'analyse d'une situation faisant intervenir celle de centre de symétrie. Nous allons confirmer cette affirmation dans l'analyse des exercices suivants.

### 3. Exercice 3 : Coloriage subtil

Cette situation permet d'entrevoir si un élève a construit du sens autour de la liaison axes - centre de symétrie, autrement dit autour de la conception composée de la symétrie centrale.

Une figure est donnée qui n'admet que deux axes de symétrie et par conséquent un centre de symétrie. Elle est issue du document EVAPM 5ème [6]. Il s'agit pour les élèves de colorier cette figure afin que dans un premier cas la figure coloriée ait un centre mais aucun axe de symétrie, et dans un second cas elle ait un axe et pas de centre de symétrie.

Cette question est subtile et relativement complexe pour les élèves. Elle nécessite en premier lieu de repérer le centre et les axes de la figure initiale. Elle suppose que l'élève se soit posé la question du rapport entre les deux notions. Et la question reste délicate : elle nécessite de procéder par implications et déductions successives.

Voici les résultats (figure en annexe 3 exercice 3) :

POUR L'ENSEMBLE	CM2	5ème
	28 él.	56 él.
Coloriage 1 et 2 répondant à la consigne	8 <i>28,6%</i>	9 <i>16,1%</i>
Coloriage 1 uniquement répondant à la consigne	3 <i>10,7%</i>	8 <i>14,3%</i>
Coloriage 2 uniquement répondant à la consigne	5 <i>17,9%</i>	15 <i>26,8%</i>
Coloriage 1 et 2 incorrects	11 <i>39,3%</i>	19 <i>33,9%</i>
Aucun coloriage	1 <i>3,6%</i>	5 <i>8,9%</i>

Détails pour chacune des figures :

	FIGURE 1		FIGURE 2	
	Centre de	symétrie	Axe de	symétrie
	CM2	5ème	CM2	5ème
	28 él.	56 él.	28 él.	56 él.
Coloriage répondant à la consigne	11 <i>39,3%</i>	17 <i>30,3%</i>	12 <i>42,8%</i>	24 <i>42,8%</i>
Coloriage erroné d'au plus deux parties	4 <i>14,3%</i>	2 <i>3,6%</i>		
Présence de deux axes de symétrie	3 <i>10,7%</i>	13 <i>23,2%</i>	6 <i>21,4%</i>	19 <i>33,9%</i>
Axe de symétrie pour 1 Centre de symétrie pour 2	4 <i>14,3%</i>	11 <i>19,6%</i>	2 <i>7,1%</i>	
Ni axe ni centre de symétrie	3 <i>10,7%</i>	1 <i>1,8%</i>	7 <i>25,0%</i>	3 <i>5,3%</i>
Partage de la figure en quatre parties	2 <i>7,1%</i>	4 <i>7,1%</i>		
Aucun coloriage	1 <i>3,6%</i>	8 <i>14,3%</i>	1 <i>3,6%</i>	10 <i>17,8%</i>

Rappelons que depuis le cours préparatoire les élèves rencontrent la notion d'axe de symétrie, mais elle n'est formalisée qu'en sixième pour l'enseignement de la notion de

médiatrice, entre autre. Avec les élèves de CM2 nous n'avons pas fait de rappel sur cette notion, seul un travail en début d'année les y avait confrontés.

Un premier fait étrange, que nous ne détaillerons pas : même proportion d'élèves produisant un deuxième coloriage correct. Alors que la notion d'axe de symétrie est fortement institutionnalisée en 6ème. Pourquoi les élèves de cinquième n'ont-ils pas ici un meilleur taux de réussite ?

*Par contre la notion de centre de symétrie est visiblement mieux maîtrisée par les élèves de l'école élémentaire. Il semble qu'elle ait acquis une identité, un statut, du sens, auprès de ces élèves, contrairement à ceux de cinquième. Sa construction, à partir de l'outil rotation, indépendamment de la notion d'axe de symétrie pourrait en être la cause.*

Aux deux niveaux on observe des confusions entre les deux types d'éléments de symétrie : présence de deux axes de symétrie pour l'un ou l'autre des coloriages, présence d'un axe de symétrie pour le premier coloriage. Cependant la proportion d'élèves faisant cette confusion est plus élevée en cinquième qu'en CM2. Mais d'autre part deux élèves de CM2, et aucun de cinquième, produisent un centre de symétrie pour les deux coloriages (effet de contrat ?).

Dans le paragraphe suivant, nous allons confirmer la prégnance de cette notion d'axe de symétrie pour les élèves de cinquième, et mettre en évidence l'utilisation de la conception rotation par ceux de CM2.

#### 4. Exercice 4 : Une situation de reconnaissance

Dans cet exercice il s'agit pour les élèves de reconnaître parmi un ensemble de figures, celles qui admettent un centre de symétrie. Les figures proposées sont issues du manuel « Connaître et pratiquer les mathématiques, 5ème » chez NATHAN. Le document de l'évaluation est en annexe 4 avec ajout d'une numérotation des figures afin de faciliter la lecture de l'analyse.

D'un point de vue mathématique on peut classer les figures suivant les isométries les laissant globalement invariantes :

- symétries axiales, figures admettant un axe de symétrie uniquement ;
- rotations paires (angle  $2\pi/n$  avec  $n$  pair), figures admettant uniquement un centre de symétrie, ou figures admettant un nombre pair d'axes de symétrie et un centre ;
- rotations impaires (angle  $2\pi/n$  avec  $n$  impair), figures admettant un nombre impair (distinct de 1) d'axes de symétrie, ou figures n'admettant ni axe ni centre.

Il est clair que cela ne permet pas suffisamment de les distinguer suivant leurs éléments de symétrie. Et on ne peut donc repérer ce sur quoi les élèves appuient leur reconnaissance. En particulier on ne pourra pas observer les repérages effectués suivant une conception rotation ou composée.

Voici donc une autre proposition de regroupement :

- les figures admettant uniquement un centre de symétrie (5, 7, 11, 13 et 14), catégorie « centre ».
- les figures globalement invariantes par rotation impaire (8, 12 et 16), catégorie « rotation impaire », permettant de repérer une reconnaissance effectuée suivant une conception rotation.
- les figures admettant un nombre pair non nul d'axes de symétrie (1, 3, 4, 9 et 10), catégorie « axes », permettant de repérer une reconnaissance faite suivant une

conception composée.

- les figures admettant un nombre impair d'axe(s) de symétrie (2, 8 et 17), catégorie « axe », permettant de repérer l'amalgame entre les deux notions.

- les figures ne possédant ni axe, ni centre de symétrie (6, 15 et 18), catégorie « N », afin de créer des perturbations pour la reconnaissance. Remarquons que les figures 15 et 18 peuvent se décomposer en deux éléments dont l'un admet un centre et l'autre un axe de symétrie.

*Les repérages corrects*, choix de toutes les figures « centre » et « axes » (à l'exception d'au plus deux), ne permettent pas d'obtenir d'informations sur les conceptions des élèves. Cela autorise par contre à affirmer qu'ils se sont construit des bases solides relatives à la notion étudiée.

Par contre, l'observation attentive des erreurs produites et des associations de figures permet de modéliser les choix des élèves suivant cinq types de repérage, déterminés donc a posteriori à partir des productions.

- Un repérage correct, complété d'une, de deux ou des trois figures de la catégorie « rotation impaire ». S'approchant d'un repérage correct, pour lequel les deux conceptions rotation et composée cohabitent, l'élève semble tout de même se référer plus souvent à la première. C'est pourquoi cette reconnaissance sera appelée *repérage double, privilégiant la conception rotation*.

- Un repérage correct, complété d'une, de deux, ou des trois figures de la catégorie « axe », met en évidence un *repérage double, privilégiant la notion d'axe de symétrie*.

- Le choix de toutes les figures de la catégorie « centre » et d'au moins une figure « rotation impaire », à l'exclusion de toute autre, caractérise un *repérage par rotation excluant la conception composée*.

- Le choix d'au moins quatre figures parmi les cinq de la catégorie « axes », et d'au plus une de la catégorie « axe » (en général la 8), à l'exclusion de toute autre, permet de faire l'hypothèse d'un *repérage par composée excluant la conception rotation*.

- Le choix d'au moins deux figures « axes », associées aux figures 2 et 17 (« axe »), et à au moins deux figures parmi « N » sera appelé *repérage axe par amalgame*, car il semble être issu d'une confusion avec la notion d'axe de symétrie.

On peut également trouver pour ce repérage la présence d'une figure « rotation impaire ». C'est en général la 8, qui a cinq axes de symétrie. On trouve parfois la 12 ou la 16. Elles n'ont pas d'axe de symétrie, mais pourraient à peu de changement près en admettre trois.

On trouve également quelquefois pour ce repérage les figures 13 ou 14, de la catégorie « centre ». Ici aussi quelques modifications pourraient amener ces figures à admettre deux axes de symétrie.

Relativisons l'expression « à l'exclusion de toute autre » : il peut être choisi en plus des figures citées pour chaque repérage au moins une figure du groupe « N ». Du fait qu'elles possèdent des éléments admettant un centre ou un axe de symétrie, leur choix ne remet pas en cause la modélisation proposée.

Les choix ne correspondant à aucune condition définie précédemment sont

répertoriés sous le vocable repérage indéterminé.

Voici maintenant les résultats de l'observation définie par les critères précédents :

	CM2 28 él.	5ème 56 él.
Repérage correct	4 14,3%	10 17,9%
Repérage double privilégiant la conception rotation	15 53,6%	10 17,9%
Repérage double privilégiant la notion d'axe de symétrie	1 3,8%	6 10,7%
Repérage rotation excluant la conception composée	2 7,1%	1 1,8%
Repérage par composée excluant la conception rotation	1 3,6%	5 8,9%
Repérage axe par amalgame	2 7,1%	17 30,4%
Repérage indéterminé	3 10,7%	7 12,5%

Sensiblement autant d'élèves de CM2 que d'élèves de cinquième effectuent des reconnaissances correctes. Par contre ...

Considérant toutes les figures admettant un centre de symétrie et celles globalement invariantes par « rotation impaire », *les élèves de l'école élémentaire semblent avoir construit de manière stable la conception rotation de la symétrie centrale sans exclure celle de composée.*

*Les élèves de collège restent plus sensibles à la notion d'axe de symétrie, mais suivant deux aspects distincts :*

- en attribuant une condition nécessaire à l'existence d'un centre de symétrie, celle d'être le point d'intersection de deux axes de symétrie. C'est bien sûr la conception composée qui prédomine à ce point de vue.

- en répondant semble-t-il à une autre consigne, identique à celle de l'évaluation mais où le terme « centre de symétrie » serait remplacé par « axe de symétrie ».

Le document support des figures proposées pourrait effectivement être accompagné d'une telle consigne ; exercice classique posé dans le cadre de l'étude de la symétrie orthogonale en classe de sixième.

Encore un effet de contrat didactique, qui n'exclut pas de penser que la notion de centre de symétrie n'est pas construite par une grande partie des élèves de cinquième.

## CONCLUSION

L'analyse de l'évaluation commune CM2-5ème a mis en évidence *la prégnance de la notion d'axe de symétrie pour la réalisation de tâche mettant en jeu celle de centre de symétrie.*

Elle constitue un obstacle didactique au développement de cette dernière. L'« *amalgame de notions sur un support donné* » est moins facilement surmonté par les élèves de collège que par ceux de l'école élémentaire. Il est vrai que les situations proposées dans cette évaluation sont également sujets d'étude dans le cadre de l'enseignement de la symétrie axiale en classe de sixième. Construire le symétrique d'un point, compléter une figure, reconnaître une figure qui admet un axe de symétrie sont des exercices classiques à ce niveau.

*La moindre confusion dans les productions des élèves de CM2, auprès desquels la symétrie centrale est présentée comme une rotation et donc indépendamment de la symétrie axiale, permet de relier ce phénomène à des choix didactiques généraux de l'institution :*

- la disparition des programmes de l'école élémentaire de toute transformation (isométrique) autre que la symétrie axiale,
- même remarque pour la classe de sixième, où cette notion fait l'objet d'une forte institutionnalisation,
- l'introduction de la symétrie centrale en cinquième à partir ou toujours en relation avec la notion de symétrie axiale, et comme précédemment unicité de la transformation étudiée à ce niveau.

La présentation conceptuelle de la symétrie centrale (homothétie de rapport - 1) faite généralement en classe de cinquième donne une définition a fortiori conceptuelle de la notion de figure admettant un centre de symétrie. Il ne semble pas que cette approche ait permis de construire le sens de la notion pour une grande partie des élèves de collège, en tous cas bien moins sûrement que pour ceux de CM2. Et d'autre part, tandis que *la multiplicité des points de vue caractérise les conceptions de ces élèves, à l'opposé, comme un effet de l'enseignement des mathématiques au collège, l'unicité d'un point de vue caractérise les stratégies des élèves de cinquième.*

La définition d'une figure admettant un centre de symétrie comme figure globalement invariante par demi-tour, est opératoire. Elle est donc immédiatement et effectivement mobilisable par les élèves. Et surtout, elle permet de faire coexister différentes conceptions que les élèves adoptent suivant les situations proposées.

Cependant, en plus de la composante opératoire du concept de la symétrie centrale, deux autres composantes sont à considérer :

- une composante sémiotique : « *Les langages et les signifiants [...] font partie de la connaissance elle-même et leur acquisition constitue l'un des aspects importants de la formation des connaissances.* » [7]

- une composante situationnelle : « *les situations sont l'un des matériaux constitutifs du concept et non une sorte d'échafaudage destiné à disparaître après la construction.* » [7]

Julo rappelle qu'« *un concept n'est vraisemblablement pas une entité homogène et très abstraite, comme on a pu l'imaginer, mais qu'il serait plutôt le résultat d'une imbrication subtile entre plusieurs composantes, dont les trois données précédemment seraient une première approximation.* »

En cela la processus mis en place en CM2, dans une perspective de recherche, ne constitue pas directement un processus d'enseignement ou d'apprentissage. L'élaboration

d'ingénieries à mettre en place en cinquième, ou à d'autres niveaux de la scolarité, reste à faire.

Ingénieries à replacer dans un cadre plus général de l'étude des transformations (voire de la géométrie) au collège, prenant en compte deux problématiques précisées par Bkouche :

*« D'abord le mouvement, via les translations et les rotations ; vouloir définir celles-ci sans faire appel au mouvement constitue un obstacle, non seulement à leur appréhension en tant que telles, mais aussi à la compréhension de la distinction entre le déplacement comme mouvement et le déplacement comme transformation géométrique.[...] »*

*« Ensuite les figures régulières [...]. La notion de régularité se précise à travers les propriétés d'invariance et c'est une façon d'aborder la problématique des transformations et leur rôle dans la structuration de la géométrie, structuration qui est moins un but que l'un des instruments de la connaissance. »*

L'hypothèse faite à l'origine de cette recherche, restant à valider, de la possibilité d'introduire la symétrie centrale à partir de l'étude de figures admettant un centre de symétrie, et définies comme figures globalement invariantes par demi-tour, participe de ces deux considérations.

## BIBLIOGRAPHIE

[1] GRENIER D., LABORDE C. (1987) *Transformations géométriques : le cas de la symétrie orthogonale*, Actes du colloque du GRECO de Didactique et Acquisition des connaissances scientifiques, Sèvres.

[2] ARTIGUE M., ROBINET J. (1982) *Conceptions du cercle chez les enfants de l'école élémentaire*, RDM Vol. 3/1.

[3] ARTIGUE M. (1991) *Epistémologie et Didactique*, RDM Vol. 10/2.3.

[4] BIGUENET A. (1946) *Notions de géométrie plane*, Ed. Eyrolles, collection de l'enseignement technique et professionnel.

[5] VERGNAUD G. (1991) *Théorie des champs conceptuels*, RDM Vol. 10/2.3.

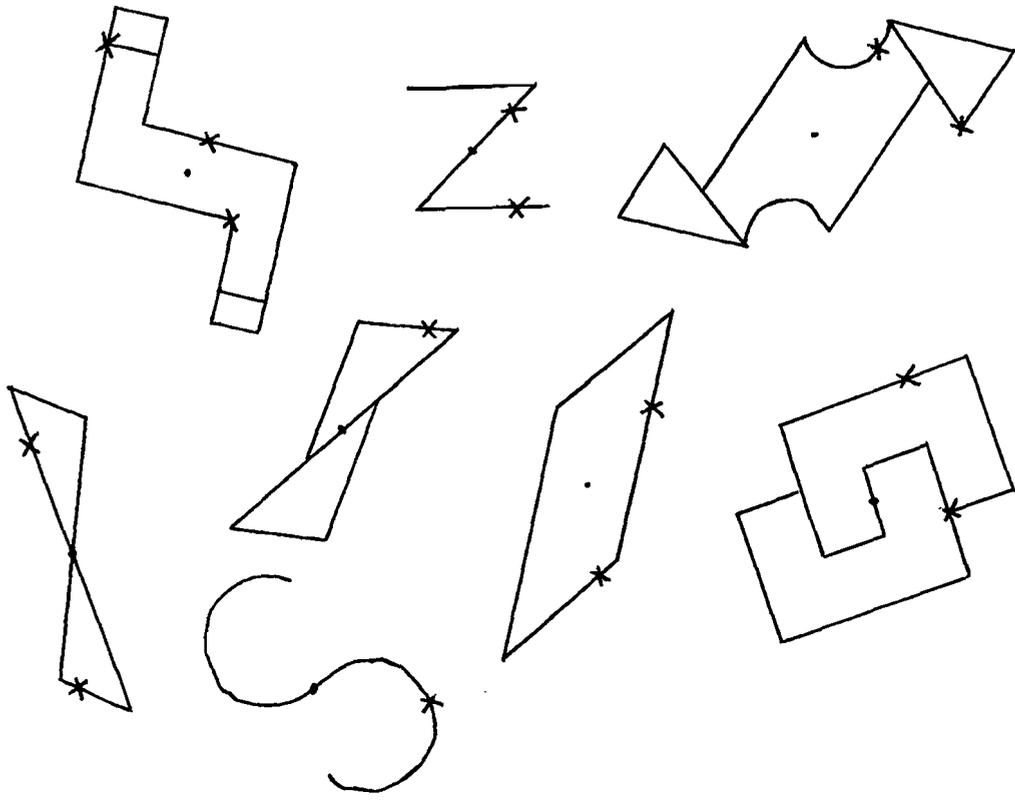
[6] Évaluation du programme de mathématiques, sixième 89 - cinquième 90, une étude de l'APMEP, publication n°84.

[7] JULO J. (1995) *Représentation des problèmes et réussite en mathématiques*, PUR.

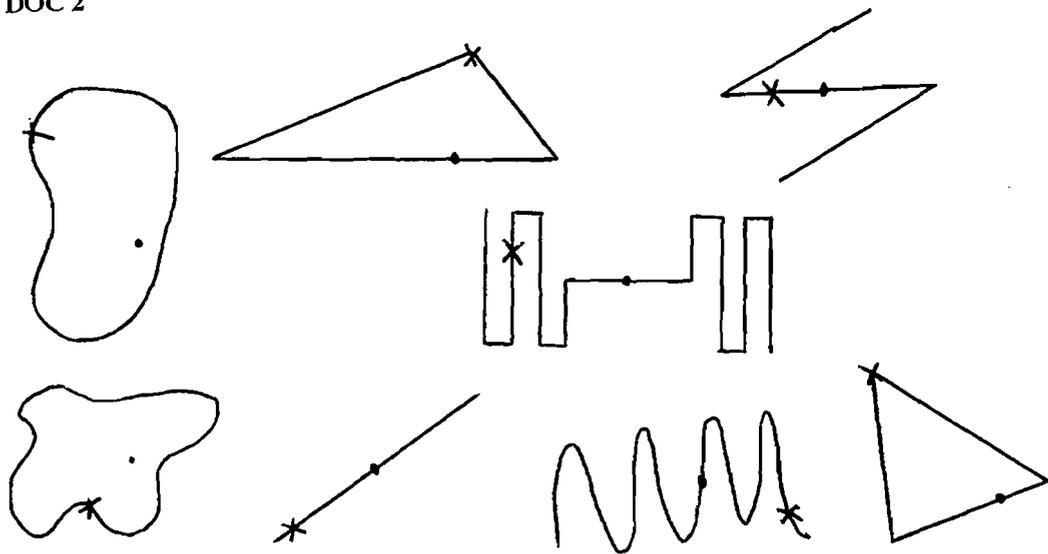
[8] BKOUCHE R. (1991) *De la géométrie et des transformations*, Repères-Irem n°4.

ANNEXE 1

DOC 1



DOC 2



## ANNEXE 2

Contrôle CM2

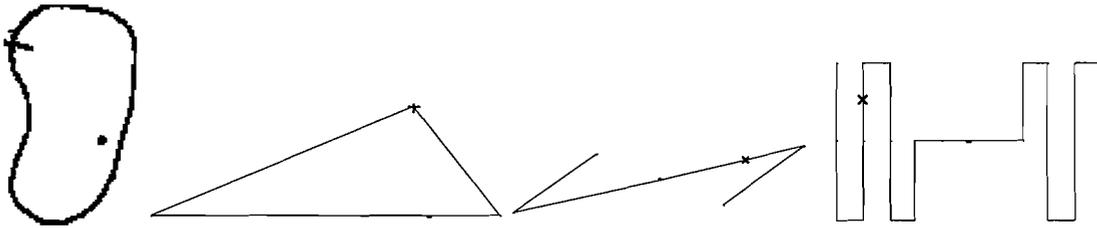
lundi 20 mai 1996

NOM:

Prénom :

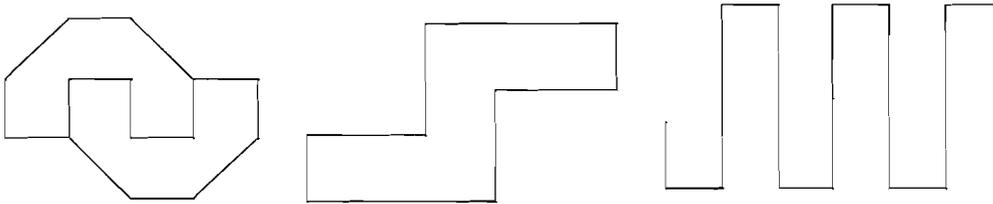
**Exercice 1***Constructions de points correspondants par un demi-tour.*

Pour chaque figure, indiquez précisément où se retrouve le point marqué par une croix après un demi-tour autour du point rouge, ensuite entourez les figures qui ont un centre de symétrie.

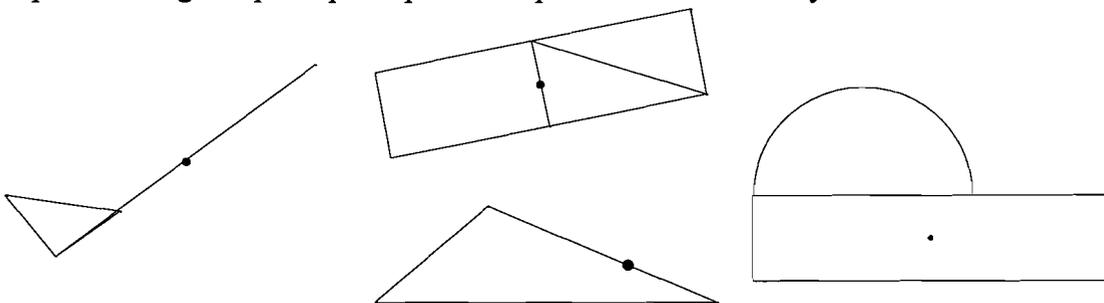
**Exercice 2***Recherche du centre de symétrie d'une figure.*

Chaque figure a un centre de symétrie.

A vous de retrouver sa position, en faisant une construction.

**Exercice 3***Compléter des figures.*

Complétez les figures pour que le point marqué soit un centre de symétrie.

**Exercice 4***Reconnaître des figures ayant un centre de symétrie et le construire.*

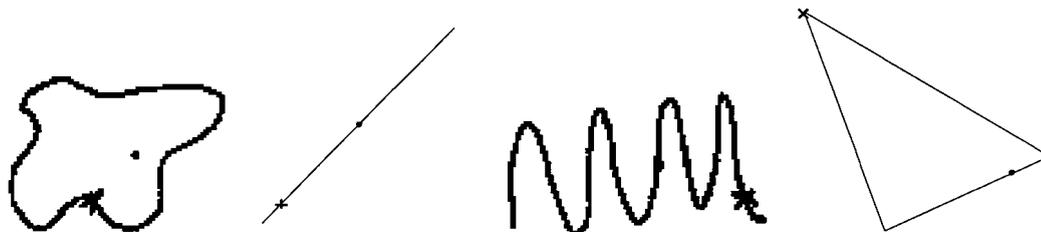
Parmi les figures de la deuxième feuille, certaines ont un centre de symétrie. A vous de les trouver et de construire en rouge le centre de symétrie.

## ANNEXE 3

**Exercice 1**

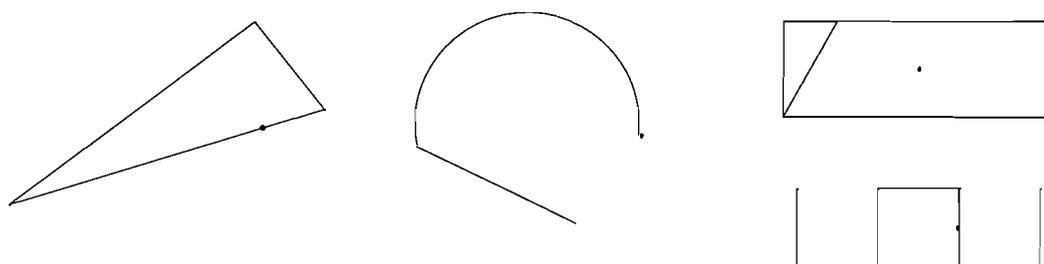
*Construction de points correspondants par un demi-tour.*

Pour chaque figure, indiquez précisément où se trouve le point marqué par une croix après un demi-tour autour du point noir (c'est à dire son symétrique par rapport au point noir).

**Exercice 2**

*Compléter les figures*

Complétez les figures pour que le point marqué soit un centre de symétrie.

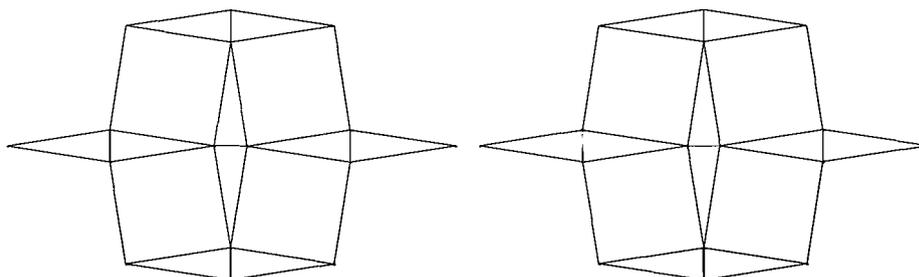
**Exercice 3**

Coloriez la figure 1 pour que cette figure avec son coloriage ait un centre de symétrie mais pas d'axe de symétrie.

Coloriez la figure 2 pour que cette figure avec son coloriage ait un axe de symétrie mais pas de centre de symétrie.

1

2

**Exercice 4**

*Reconnaître une figure ayant un centre de symétrie.*

Entourez sur la deuxième feuille distribuée toutes les figures qui ont un centre de symétrie, et marquez en rouge la position du centre de symétrie.

ANNEXE 4

