

UNE ÉTUDE INSTITUTIONNELLE SUR L'ENSEIGNEMENT DES VECTEURS AU NIVEAU SECONDAIRE AU VIÊT-NAM ET EN FRANCE

Hoài Châu LÊ THI
École Normale Supérieure de Vinh, Viêt-nam
Équipe Didactique des Mathématiques, Laboratoire Leibniz, Grenoble

Introduction

Le projet de recherche¹ auquel est lié cet article a émergé du contexte de la réforme de l'éducation effectuée depuis 1990 dans les lycées vietnamiens. Cette réforme a transformé profondément les programmes d'enseignement des mathématiques au niveau secondaire en introduisant l'enseignement des vecteurs pour la première fois en tant qu'objet mathématique en première année du lycée.

Le but de l'enseignement des vecteurs est de faire passer les élèves de la géométrie euclidienne du plan et de l'espace à une géométrie vectorielle où ces mêmes plan et espace sont modélisés en terme d'espaces affines associés aux espaces vectoriels de deux et trois dimensions. Dans la mesure où la théorie générale des espaces vectoriels n'est pas à la portée des lycéens, ce n'est pas le modèle axiomatique des espaces affines qui est proposé mais un intermédiaire, l'ensemble des vecteurs géométriques du plan et de l'espace. Cet ensemble a une structure d'espace vectoriel si l'on travaille sur des classes d'équivalence convenables, mais cette structure n'est pas donnée axiomatiquement : un vecteur est donc défini d'abord par ses caractéristiques géométriques de norme, de direction et de sens, avec tous les problèmes liés à la définition même de ces termes.

Dès les premières années d'introduction du vecteur dans le programme de dixième², les enseignants, ont notamment repéré chez leurs élèves de nombreuses difficultés à « distinguer le vecteur du segment, distinguer la direction du sens, prendre en compte les trois caractéristiques du vecteur, envisager le vrai/faux d'une égalité vectorielle, chercher le nombre m tel que $\vec{a} = m \cdot \vec{b}$, décomposer un vecteur sur deux vecteurs co-linéaires »

1 cf. Lê Thi 1997

2 Première classe d'un cursus scolaire en trois ans, dans lequel les élèves sont admis sur concours, à la suite d'un cycle d'enseignement obligatoire de 9 ans. Ce cycle de trois ans ouvre l'accès (sur concours) à l'université. Cette classe correspond donc à la classe de seconde en France (élèves de 15 à 16 ans).

et enfin à « mettre en oeuvre les savoirs vectoriels dans la résolution d'un problème de géométrie »³.

Afin de déterminer dans quelle mesure les difficultés rencontrées par les élèves vietnamiens étaient spécifiques de l'institution vietnamienne, je me suis demandée si l'on rencontrait les mêmes difficultés en France où les vecteurs sont introduits dans l'enseignement secondaire depuis les années 1940 et où l'évolution des programmes montre des différences significatives avec les choix faits au Viêt-nam.

Mes hypothèses de travail étaient les suivantes.

- *Une analyse comparative* des conditions de l'enseignement et de l'apprentissage des vecteurs, en classe de dixième au Viêt-nam et de seconde en France, devrait permettre de mettre en évidence *des régularités et des disparités* d'une part dans les contraintes de l'enseignement, d'autre part dans les difficultés d'apprentissage des élèves.

- Une bonne connaissance des caractéristiques de la genèse historique devrait permettre une interprétation plus fine et épistémologiquement mieux fondée des difficultés *récurrentes* des élèves rencontrées simultanément *dans les deux pays*.

Ceci m'a conduite à adopter une démarche méthodologique s'appuyant sur un double point de vue épistémologique et didactique, démarche qui s'est traduite par les études suivantes, objet de mon travail de thèse⁴ :

- étude épistémologique,
- étude institutionnelle comparative de l'enseignement des vecteurs, en classe de dixième au Viêt-nam et de seconde en France ;
- études expérimentales dans ces deux institutions.

L'étude épistémologique a été conduite en liaison avec une première analyse d'erreurs d'élèves français en mathématiques et en physique issue d'études didactiques antérieures. Elle a permis de préciser les conditions dans lesquelles la théorie des vecteurs s'est développée ainsi que celles qui ont pu empêcher certains progrès de cette théorie⁵ et de mettre en évidence des résistances à l'apparition de la notion de vecteur. Cette analyse m'a notamment conduite à formuler l'hypothèse, en ce qui concerne l'apprentissage des élèves, de l'existence de deux niveaux de difficultés à sortir du modèle métrique lors du passage au modèle vectoriel : celui du franchissement de la vision dominante du métrique en géométrie pour pouvoir envisager une géométrie orientée et celui de la prise en compte des *deux* caractéristiques d'orientation du vecteur, la direction et le sens.

L'analyse comparative du rapport institutionnel à l'objet vecteur dans les deux institutions classe de dixième au Viêt-nam et classe de seconde en France a permis la mise en évidence des contraintes et des conditions de réalisation de l'enseignement des vecteurs dans chacune des institutions concernées. La mise en relation de cette analyse institutionnelle avec l'étude épistémologique précédente, a également permis de comprendre comment les choix d'enseignement effectués peuvent contribuer au dépassement, ou au contraire, au renforcement, de difficultés d'ordre épistémologique.

3 Lê Thi 1997 p.184-185

4 Thèse réalisée sous la co-direction de Claude Comiti (Laboratoire Leibniz, Grenoble) et Trần Van Tân (Université nationale du Viêt-nam à Ho Chi Minh Ville).

5 À ce propos, voir Lê Thi 1997, chapitre B1.

Dans cet article, je présenterai essentiellement l'étude institutionnelle.

1. Quelques considérations générales sur différentes méthodes d'approche de la géométrie élémentaire⁶

L'enseignement de la géométrie élémentaire peut reposer sur au moins trois approches différentes.

La première est l'approche synthétique qui prend pour objet d'étude les figures géométriques. Ces figures géométriques sont représentées par des dessins⁷. Ce dernier est un appui intuitif qui peut donner une direction de recherche dans la résolution du problème posé. Cependant, dans certaines situations, un dessin ne peut représenter tous les différents cas de figure, notamment lorsque l'on trouve des propositions qui se vérifient dans certains cas mais pas dans d'autres.

Un deuxième mode d'étude repose sur l'introduction d'un système de coordonnées, c'est la méthode analytique. Dans ce cas, des objets et des relations algébriques se substituent, par l'intermédiaire d'un système de coordonnées, aux objets et aux relations géométriques. Plus précisément, les objets et les relations géométriques sont représentés par des couples ou des triplets de nombres liés par des relations numériques, le problème se ramène ainsi à la résolution d'une ou plusieurs équations numériques. Autrement dit, on traduit des propriétés géométriques dans le cadre algébrique et on se ramène à des calculs dans ce cadre. Ici, c'est le calcul algébrique qui forme le noyau dur d'une résolution.

La méthode analytique apporte à la résolution de problème une possibilité de généralisation. Cependant, elle pose le problème de la relation du contexte algébrique à l'intuition géométrique, à chaque étape de la résolution. Quelle est en effet la signification d'une transformation d'écriture algébrique par rapport au contexte géométrique représenté ?

La troisième méthode d'étude de la géométrie élémentaire est la méthode vectorielle. Comme la méthode analytique, la méthode vectorielle introduit un point de vue algébrique en géométrie, mais, contrairement à celle-ci, elle permet d'opérer directement sur des objets géométriques, sans transfert sur un domaine numérique. En effet, la méthode vectorielle s'appuie sur des objets de nature géométrique, les vecteurs, sur lesquels sont définies des opérations algébriques. Cette méthode permet d'exploiter l'aspect intuitif du cadre géométrique lors de la résolution de problèmes tout en utilisant des techniques algébriques. Elle introduit donc un nouveau point de vue tout en restant dans un cadre essentiellement géométrique (il n'y a pas, comme dans le cas de la méthode analytique, de passage à un cadre numérique).

Ainsi, bien qu'ayant la même caractéristique, à savoir combiner géométrie et algèbre pour bénéficier des techniques algébriques dans l'étude de la géométrie, les méthodes

⁶ L'expression "géométrie élémentaire" désignera ici la géométrie du collège et du lycée.

⁷ Nous reprendrons ici la distinction assez répandue en didactique des mathématiques entre figure, objet géométrique, et dessin ; par exemple selon les termes de Parzys (cité dans (Laborde et Capponi 1994, 168)) : "la figure géométrique est l'objet géométrique décrit par le texte qui la définit, une idée, une création de l'esprit, tandis que le dessin est une représentation."

analytique et vectorielle manifestent deux points de vue différents dans l'étude de la géométrie, notamment en ce qui concerne le rapport entre calcul algébrique et intuition géométrique.

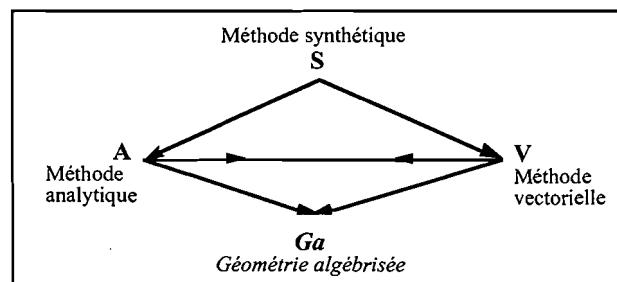
Remarquons que le vecteur pouvant être représenté par des coordonnées, il existe une quatrième méthode, mixte, qui utilise les vecteurs dans le cadre analytique. Dans la suite, par commodité, nous qualifierons cette méthode de "vecteur-coordonnées".

Dans l'histoire du développement des mathématiques, la géométrie analytique est née avant que n'apparaisse l'idée de construire un calcul géométrique intrinsèque, ce qui est devenu dans la deuxième moitié du 19^e siècle le calcul vectoriel. Pourtant, d'un strict point de vue mathématique, le passage de la géométrie euclidienne à la géométrie vectorielle ne s'appuie pas sur la géométrie analytique. En d'autres termes, partant de la géométrie synthétique, on peut construire la méthode analytique ou la méthode vectorielle de façon indépendante.

Ainsi, dans l'enseignement des mathématiques, rien n'oblige à respecter un ordre chronologique : la méthode analytique n'est pas un pont obligatoire pour passer de l'approche synthétique de la géométrie à la méthode vectorielle.

À un autre niveau, il est important de souligner ici que le vecteur géométrique et les opérations algébriques peuvent être définis indépendamment de la théorie des espaces vectoriels : ceux-ci ont en effet une signification avant tout géométrique dont on peut déduire les propriétés algébriques, sans se référer à une structure qui représente un niveau de conceptualisation nettement plus élevé. Ce type d'approche n'écarte pas la nature algébrique du calcul vectoriel, mais l'aborde dans son rapport au contexte géométrique et à sa signification dans celui-ci.

Pour représenter les différentes approches possibles de l'enseignement de la géométrie élémentaire, nous proposons le schéma suivant :



Dans ce schéma, le mot "géométrie algébrisée" désigne une approche dans laquelle la géométrie est présentée et étudiée par une méthode qui permet d'exprimer des objets et des relations géométriques par des expressions algébriques et de résoudre des problèmes géométriques en bénéficiant des techniques algébriques. Ainsi, la géométrie euclidienne, même si elle prend en compte des relations de grandeurs numériques (distance, aire et volume), n'est pas, selon notre définition, une géométrie algébrisée, parce qu'elle ne s'appuie pas sur une traduction algébrique (en termes d'opérations) des relations géométriques.

Dans l'institution scolaire, s'il est clair que la priorité d'approche de la géométrie

par la méthode synthétique (S) est épistémologiquement incontournable, il n'y a pas, comme nous l'avons dit ci-dessus, d'ordre de priorité absolue entre la méthode analytique (A) et la méthode vectorielle (V). Par ailleurs, les méthodes vectorielle et analytique communiquent entre elles, par l'intermédiaire de la méthode "vecteur-coordonnées". Ce cheminement en deux étapes gomme en fait en partie la nouveauté de celle des deux méthodes abordée en dernier (A si l'on a suivi le chemin S-V-Ga-A, V si l'on a suivi le chemin S-A-Ga-V).

Cependant, les deux types de chemins ne sont pas de même nature, bien qu'ils permettent d'accéder tous les deux à une géométrie algébrisée. De plus, l'introduction de grandeurs géométriques orientées est un point essentiel et spécifique de la méthode vectorielle. Passer de la géométrie synthétique à la géométrie vectorielle représente un véritable saut conceptuel dans l'apprentissage, car il s'agit pour les élèves de concevoir l'existence, dans le cadre géométrique, de grandeurs orientées ainsi que la possibilité d'effectuer, dans ce cadre, des opérations algébriques.

Sur le plan didactique, commencer ou non par la méthode analytique va créer des conditions différentes pour l'introduction du vecteur et en contraindre, en partie, les choix possibles. Ceci nous conduit à analyser comment se situe l'enseignement du vecteur dans l'enseignement de la géométrie au Viêt-nam, puis en France, en particulier par rapport à l'introduction de la méthode analytique. Nous étudierons notamment, à partir d'une analyse, d'une part des programmes et du manuel⁸ le plus utilisé dans le Nord du Viêt-nam, d'autre part des programmes en vigueur en France, comment l'enseignement des vecteurs s'articule avec l'enseignement global de la géométrie.

2. L'enseignement du vecteur au Viêt-nam

2.1. Place du vecteur dans l'enseignement de la géométrie au Viêt-nam

Au Viêt-nam, dès l'école primaire, les élèves se familiarisent avec quelques objets géométriques simples. Cette étape est consacrée à une introduction des objets usuels du plan, par l'intermédiaire de leur représentation sous forme de dessins. Il s'agit d'apprendre à reconnaître la forme du triangle, du quadrilatère, du rectangle et du carré, et à calculer des longueurs et des aires. L'étude est effectuée de manière empirique, aucune définition n'est donnée.

Mais à partir de la sixième⁹ (première année du collège) les problèmes de géométrie élémentaire sont présentés de façon systématique, les programmes de la sixième à la douzième s'organisant dans une certaine continuité.

⁸ Les programmes sont très succincts au Viêt-nam (liste de contenus), de plus ils ne sont pas diffusés auprès des enseignants qui disposent en général seulement d'un manuel officiel et du guide du professeur correspondant.

⁹ Dans le cursus scolaire, la classe de sixième au Viêt-nam correspond à la classe de même nom du collège en France, la septième à la cinquième en France, ..., la neuvième à la troisième.

La classe de sixième est consacrée à une familiarisation avec des objets élémentaires de la géométrie, comme le point, la droite, le segment, la demi-droite, le plan, le demi-plan et l'angle. Ces objets sont introduits de manière ostensive, en montrant des représentations. Par exemple, le segment est présenté comme “la figure qui comporte deux points A et B et tous les points alignés se trouvant entre A et B”. On demande aux élèves de savoir comparer deux segments. Cette comparaison se base sur celle des mesures de leur longueur : deux segments sont dits “égaux” si leurs longueurs sont égales, et le segment [AB] est dit “plus grand” que le segment [CD] si sa longueur est plus grande que celle de [CD]. Les problèmes concernant la notion d'angle non-orienté (les angles orientés ne sont pas abordés à ce niveau) sont présentés dans la même perspective : la comparaison des angles est effectuée à travers celle de leurs mesures.

L'enseignement de géométrie de la classe de septième est centré sur l'étude du parallélisme et de l'orthogonalité dans le plan et certains problèmes concernant les triangles, à savoir les relations entre les éléments d'un triangle, les conditions d'égalité de deux triangles, les propriétés des médiatrices, des médianes, des hauteurs et des bissectrices.

À ce niveau, on vise à conduire les élèves à sortir du domaine de l'empirisme et à commencer à mettre en place un raisonnement déductif dans l'étude de la géométrie.

Par ailleurs, le programme d'algèbre vise à étendre l'ensemble des nombres aux rationnels négatifs. On introduit l'axe des nombres pour représenter les rationnels, puis le système de coordonnées planes pour représenter les couples de rationnels. On fait ainsi correspondre à un point M un couple (x,y) de nombres rationnels, que l'on appelle le couple de ses coordonnées. On introduit ensuite la notion de graphique d'une fonction et on étudie le graphique de $f(x) = ax$ et celui de $f(x) = \frac{a}{x}$.

En huitième, les élèves approfondissent l'étude des polygones, et tout particulièrement, celle des triangles et des quadrilatères. Après l'étude des trapèzes isocèles, on leur présente la notion de figures symétriques par rapport à une droite. De la même façon, la notion de figure symétrique par rapport à un point est introduite après l'étude des parallélogrammes. Ces connaissances, et notamment les théorèmes concernant la construction de la figure symétrique (par rapport à un axe ou un point) seront ultérieurement la base de l'étude des transformations.

Le chapitre intitulé “Triangles semblables” commence par “Le théorème de Thalès dans le triangle”. Ce théorème n'est étudié que dans le cas particulier de la configuration en triangle. À l'aide de la propriété des droites parallèles équidistantes, le théorème est démontré dans le cas où les mesures des longueurs des segments sont des entiers ; l'extension au cas rationnel est admise. Le cas des mesures irrationnelles n'est pas abordé puisque les élèves ne connaissent, à ce niveau, que l'ensemble des nombres rationnels.

Le programme de géométrie de la classe de neuvième contient deux parties.

La première est consacrée à l'étude des cercles. On introduit ici la rotation (dans le plan). C'est la première transformation qui est décrite comme application du plan sur lui-même. Pourtant, on ne parle pas, là encore, d'angle orienté, mais de deux sens possibles d'une rotation (dans le sens des aiguilles d'une montre ou dans le sens contraire).

Dans la deuxième partie, on étudie d'abord le parallélisme et l'orthogonalité dans

l'espace, puis on introduit quelques solides essentiels comme le prisme, le parallélépipède, la pyramide, le tronc de pyramide, le cylindre, le cône, la sphère, enfin on établit les formules donnant leur aire et leur volume.

Pour résumer, nous pouvons dire que l'apprentissage de la géométrie au collège au Viêt-nam peut être caractérisé comme suit : les élèves travaillent sur des objets élémentaires tels que les points, les droites et les plans et sur des dessins de configurations usuelles. Les premiers objets géométriques sont présentés de manière ostensive. Puis, tout en continuant à introduire de nouveaux objets, du triangle en sixième à la sphère en neuvième, on habitue au fur et à mesure les élèves à démontrer les propriétés géométriques représentées sur les dessins de ces objets. Dans ce but, on introduit également, sous la forme de théorèmes à admettre, quelques axiomes de la géométrie élémentaire.

Les élèves restent donc toujours, jusque là, dans le cadre de la méthode synthétique, sans qu'il soit question d'orientation des objets géométriques et sans que l'on ait recours à des techniques algébriques pour la résolution des problèmes géométriques. Enfin, bien qu'on introduise la notion de repère (avec les seules coordonnées rationnelles), l'usage de ce dernier reste limité à la représentation de quelques fonctions. Il n'y a donc pas à proprement parler d'introduction de la méthode analytique en géométrie à ce stade.

Ce n'est qu'en dixième, avec l'introduction des vecteurs, qu'apparaît pour la première fois l'orientation des objets géométriques et le recours aux techniques algébriques dans l'étude de la géométrie élémentaire.

Ainsi, dans le choix d'enseignement effectué au Viêt-nam, l'introduction des vecteurs est-elle vraiment le premier pas de l'algébrisation de la géométrie et du passage de la géométrie euclidienne, très tributaire des cas de figures, à la géométrie algébrisée qui cherche à s'en dégager.

2.2. La méthode vectorielle : une nouvelle méthode pour l'étude de la géométrie ?

Les auteurs du programme affirment que l'une des tâches principales de l'enseignement de la géométrie en dixième consiste à *“introduire la méthode vectorielle [...] dans l'étude de la géométrie. C'est une nouvelle méthode car au collège les élèves ne disposent que de la méthode synthétique pour étudier des figures géométriques.”* (Nguyễn Gia Cúc 1990).

Regardons comment cet objectif est pris en compte dans le déroulement du programme de géométrie de la classe de dixième.

Ce programme comporte trois parties dont la première est consacrée à l'introduction de la notion de vecteur, l'addition, la soustraction des vecteurs et la multiplication d'un vecteur par un nombre. Ainsi, apparaissent ici des objets géométriques nouveaux sur lesquels on définit des opérations algébriques. Ces objets doivent fournir aux élèves un nouvel outil pour l'étude de la géométrie.

Est introduite ensuite la notion d'axe - définie, à ce niveau, par un point O et un

vecteur unitaire - puis de repère dans le plan, ainsi que celle de coordonnées d'un vecteur par rapport à ce repère¹⁰. Les expressions analytiques des opérations vectorielles, qui ont été auparavant définies géométriquement, sont présentées. Tout ceci constitue la base de la construction de la méthode "vecteur-coordonnées".

La deuxième partie du programme de géométrie de la classe de dixième est consacrée à une étude des relations trigonométriques dans les triangles et les cercles. À cette occasion, on introduit le produit scalaire de deux vecteurs. Grâce à ce produit scalaire, on démontre quelques formules qui permettent de calculer l'aire, les angles, les longueurs des côtés et des médianes d'un triangle. C'est aussi à l'aide de ce produit que l'on introduit la notion de puissance d'un point par rapport à un cercle.

Dans la dernière partie, les transformations géométriques sont définies comme des applications du plan sur lui-même. Les déplacements du plan (translation, symétrie orthogonale, rotation), l'homothétie et la similitude sont alors abordés. Les vecteurs sont utilisés également pour l'introduction des notions de translation et d'homothétie.

Les trois parties du programme de géométrie de la classe de dixième mettent ainsi en œuvre, en accord avec les objectifs annoncés, l'utilisation de ce nouvel outil.

Bien que le mot "espace vectoriel" n'y apparaisse pas, il s'agit de construire, sans le dire, un espace vectoriel euclidien réel, celui des vecteurs du plan, introduits avec leurs propriétés d'addition, de multiplication par un nombre réel et de produit scalaire. Les deux axiomes qui permettent de définir le plan affine à partir du plan vectoriel, la relation de Chasles et le caractère bijectif de l'application qui, un point O étant fixé, associe à un point M le vecteur $\vec{u} = \vec{OM}$, sont donnés. Les connaissances vectorielles introduites ici suffisent donc à étudier les propriétés affines et métriques de la géométrie plane.

2.3. Les choix effectués pour l'introduction du vecteur

Nous allons analyser ci-dessous comment les objectifs précédents sont opérationnalisés, à partir de l'étude du manuel ayant pour auteur Van Nhu Cuong et al., qui est le plus couramment utilisé dans les provinces du Nord¹¹, parmi les trois collections utilisées au Viêt-nam. Ce manuel est accompagné d'un "Livre du Maître" dans lequel on peut trouver les justifications des auteurs sur leurs choix de présentation des contenus de géométrie enseignée en classe de dixième.

2.3.1. Le vecteur : segment orienté

Les auteurs du manuel présentent aux enseignants, dans le Livre du Maître, trois façons différentes d'introduire la notion de vecteur actuellement retenues, dans différents pays, pour l'enseignement au niveau de secondaire et justifient leurs propres choix.

- 1) Le vecteur peut être considéré comme l'ensemble des couples de points (A, B)

10 Rappelons que le système de coordonnées rationnelles (en dimensions un et deux) a déjà été introduit en algèbre en classe de septième, à partir de "deux axes rectangulaires en O". La nouveauté est qu'ici la construction repose sur les vecteurs et prend en compte les coordonnées dans l'ensemble des réels.

11 Ce manuel est une référence dans l'ensemble du pays. C'est notamment à partir de ce dernier qu'ont été faites les traductions du photocopie utilisé dans l'enseignement en français des mathématiques en classe de dixième des filières bilingues, dans les lycées d'Ho Chi Minh ville (Van Nhu Cuong, Pham Gia Duc, Nguyễn Việt Hải 1994).

définissant une translation. Le vecteur est alors associé à une translation.

Les auteurs rejettent cette méthode. À leur avis, l'utilisation des translations donne une définition exacte du vecteur, *“mais didactiquement, le vecteur dans cette définition est loin des connaissances de force, de vitesse... en physique. Par conséquent les élèves rencontrent des difficultés lorsqu'ils utilisent la notion de vecteur en physique.”* (Van Nhu Cuong et al. 1990b, 10).

2) Le vecteur peut être considéré comme une classe d'équivalence de segments orientés. Cette définition permet d'atteindre non seulement un point de vue exact mathématiquement, mais encore une compatibilité avec la théorie des ensembles : deux vecteurs égaux sont deux ensembles égaux.

Les auteurs ne choisissent pas non plus cette deuxième méthode, car : *“Cela n'est pas compatible avec la compréhension des élèves sur l'égalité de deux figures, par exemple deux triangles égaux, deux cercles égaux ... et avec l'utilisation du vecteur en physique. D'autre part, lorsque l'on manipule les opérations sur des vecteurs on doit choisir un élément qui est un segment orienté quelconque dans l'ensemble des segments orientés définissant le vecteur donné. Cela complique la construction de la théorie et en fait n'est pas nécessaire.”* (ibid., 10).

3) Le vecteur peut être défini comme un segment orienté, un segment dont on précise l'origine et l'extrémité.

C'est cette troisième méthode qui est retenue par les auteurs du manuel. Ils choisissent donc de confondre dans un premier temps la notion de vecteur avec celle de segment orienté. Cependant, ils ont conscience que cette présentation est critiquable du point de vue mathématique, du fait *“qu'elle entraîne une définition de l'égalité de deux vecteurs qui n'est pas compatible avec la théorie des ensembles (deux vecteurs égaux comportent des ensembles de points différents)”*. Mais ils font remarquer à juste titre que *“les élèves ont déjà rencontré la même chose : deux triangles égaux ou deux cercles égaux comportent des points différents”*. Ils affirment que *“ce que l'on dit "non exact" de cette définition n'a pas de conséquences néfastes dans la suite de l'apprentissage de la géométrie, alors qu'une telle définition est favorable à la compréhension des élèves des notions de physique comme la force, la vitesse ...”* et reviennent sur l'affirmation de l'objectif essentiel de l'introduction des vecteurs qui *“est de construire un outil pour étudier la géométrie mais n'est pas d'étudier profondément cette notion comme un objet de mathématiques.”* (ibid. , 10-11).

Dans ce contexte, afin d'introduire la notion de vecteur, les auteurs partent donc du segment orienté. Ils appellent vecteur un segment dont l'origine et l'extrémité sont précisées.

La distinction entre le segment AB et le vecteur \vec{AB} repose sur le rapprochement que l'élève doit faire entre les deux phrases suivantes :

- “Un segment est pleinement déterminé par ses deux extrémités. Soient A et B ses deux extrémités, ce segment est alors appelé AB ou BA.”

- “Selon cette définition, si A et B sont deux points distincts, alors on a deux vecteurs différents \vec{AB} et \vec{BA} ” (Van Nhu Cuong et al. 1990a, 3).

Les élèves sont censés en conclure que par deux points distincts A et B on définit un seul segment, mais deux vecteurs (puisque les deux “extrémités” du vecteur ne jouent

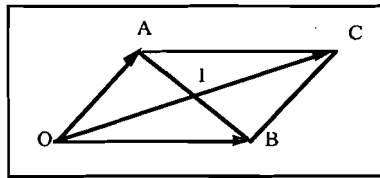
pas le même rôle).

2.3.2. Comment définir les opérations sur des segments orientés ?

Le vecteur ainsi introduit est donc un segment orienté, c'est-à-dire un "vecteur lié à un point", son origine. Regardons alors comment pourraient, à partir de là, être définies les opérations vectorielles, avant d'étudier comment cela est fait dans le manuel.

Si on s'arrête à l'ensemble des vecteurs liés, on ne peut définir l'addition, la soustraction et la multiplication par un nombre que sur un sous-ensemble $V(O)$ formé de vecteurs ayant une même origine O .

Dans ce cas, la somme de deux vecteurs \vec{OA} et \vec{OB} est déterminée comme suit : on appelle I le milieu du segment $[AB]$; si O et I ne sont pas confondus, on prend le point C sur la droite (OI) tel que I soit le milieu du segment $[OC]$; si I se confond avec O , le point C pris est O , lui-même. Le vecteur \vec{OC} est appelé la somme de deux vecteurs \vec{OA} et \vec{OB} . On peut aussi commencer par le cas de deux vecteurs colinéaires (d'abord de même sens puis de sens opposé), puis dans le cas où les deux vecteurs ne sont pas colinéaires, le point C est l'unique point tel que $OACB$ soit un parallélogramme.



L'opposé du vecteur \vec{OA} est le vecteur $\vec{OA'}$ de même direction et de sens opposé. La différence de deux vecteurs \vec{OA} et \vec{OB} est définie par la somme de \vec{OA} et l'opposé $\vec{OB'}$ de \vec{OB} .

Le produit $k\vec{OA}$ est le vecteur \vec{OD} tel que D appartienne au rayon $[OA)$ si $k > 0$, au rayon opposé de $[OA)$ si $k < 0$, et la longueur de \vec{OD} soit $|k| \cdot \|\vec{OA}\|$. Enfin, si $k = 0$, le point D est O lui-même.

Il est facile de vérifier qu'avec les opérations définies comme ci-dessus $V(O)$ est un espace vectoriel de dimension deux sur \mathbb{R} . Autrement dit, dans l'ensemble $V(O)$ des vecteurs ayant une même origine O , la somme, la différence et le produit par un scalaire définis ci-dessus sont totalement déterminés. De plus, ces opérations vérifient les propriétés commutativité, associativité, distributivité.

Le produit scalaire de deux vecteurs de $V(O)$ peut être défini de façon analogue à ce qu'on fait, pour les vecteurs libres¹². Avec ce produit, $V(O)$ devient un espace vectoriel

¹² Pour définir le produit scalaire de deux vecteurs, on utilise l'une des trois expressions suivantes (elles sont équivalentes, à partir de l'une on démontre les deux autres) :

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = \frac{1}{2} (\|\vec{a} + \vec{b}\|^2 - \|\vec{a}\|^2 - \|\vec{b}\|^2)$$

euclidien réel de dimension deux.

2.3.3. Vecteur lié ? Vecteur libre ? Vecteurs physiques ? Vecteur géométrique ?

Pourtant, pour que les connaissances vectorielles puissent fournir un outil efficace dans l'étude de la géométrie, il faut nécessairement qu'elles permettent de faire des calculs sur des vecteurs n'ayant pas même origine. Cela ne peut pas être résolu en "ramenant" les vecteurs à une même origine O. On bute toujours sur le problème de la détermination univoque du résultat des opérations vectorielles.

Il est donc clair que si l'on veut introduire la méthode vectorielle dans l'étude de la géométrie, il est indispensable de passer aux vecteurs libres (classes d'équivalence de bipoints équipollents ou classe d'équivalence de segments orientés).

Comment les auteurs s'y prennent-ils ?

Notre analyse du manuel met en évidence deux lieux où les auteurs introduisent *implicitement* le vecteur comme classe d'équivalence.

1) Dans quelques exercices traités à la suite de la définition de deux vecteurs égaux. Voici deux de ces exercices :

Exercice 2 : Étant donné le vecteur \vec{AB} . Tracer certains vecteurs égaux à \vec{AB} .

Exercice 3 : Étant donné le vecteur \vec{AB} et le point C. Déterminer le point D tel que

$\vec{AB} = \vec{CD}$. Démontrer l'unicité de D. (Van Nhu Cuong et al. 1990a, 5).

Les auteurs précisent, dans le Livre du Maître, que par ces exercices, il s'agit de présenter "l'application d'un vecteur en un point donné. Cette application d'un vecteur en un point donné constitue la base sur laquelle, à partir de la leçon suivante, on réalisera les opérations vectorielles. Elle exprime *implicitement*¹³ le fait qu'un vecteur est une classe d'équivalence de segments orientés." (Van Nhu Cuong et al. 1990b, 75).

2) Avant de pouvoir donner la définition de la somme de deux vecteurs, les auteurs sont obligés de faire une "mise au point" :

"Pour noter un vecteur quelconque on peut écrire \vec{AB} ou parfois il est suffisant de noter \vec{a} , \vec{b} , \vec{x} ou \vec{y} , ...

[...] Soit un vecteur \vec{a} et un point quelconque O, alors il existe un point et un seul A tel que $\vec{OA} = \vec{a}$ " (Van Nhu Cuong et al. 1990a, 6).

C'est cette affirmation qui est censée faire passer l'élève de la notion de vecteur introduite initialement à un vecteur comme classe d'équivalence de segments orientés. Cependant, cela n'est fait que de façon implicite, il y a donc dans le manuel une ambiguïté

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = \|\vec{a}\| \|\vec{b}\| \cos(\vec{a}, \vec{b})$$

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = x_1x_2 + y_1y_2, \text{ si } (x_1, y_1) \text{ et } (x_2, y_2) \text{ sont respectivement les coordonnées des vecteurs } \vec{a} \text{ et } \vec{b}.$$

¹³ C'est nous qui soulignons.

entre le vecteur lié et le vecteur libre.

Notre analyse est confirmée par les précisions apportées par les auteurs du manuel dans le Livre du Maître : “En donnant le vecteur \vec{a} on donne aussi l'ensemble des vecteurs égaux à \vec{a} . Si à partir d'un point A on trace le vecteur $\vec{AB} = \vec{a}$ alors \vec{AB} est le vecteur lié (l'origine est déterminée). La distinction entre le vecteur libre et le vecteur lié [...] n'est pas abordée dans le manuel.”¹⁴ (Van Nhu Cuong et al. 1990b, 15).

Si les auteurs affirment, comme nous l'avons vu ci-dessus, que ce choix “est favorable à la compréhension des élèves des notions de physique comme la force, la vitesse ...”, ils soulignent par ailleurs eux-même sur ce point l'ambiguïté de la notion de vecteur en physique et en mathématiques : “Les élèves rencontrent pour la première fois la notion de segment orienté lorsqu'ils étudient “la force” en physique (en classe de septième). Peut-être pensent-ils donc que le vecteur est une notion de physique alors que c'est une notion de mathématiques ayant des applications en physique et dans d'autres domaines.” (ibid., 8).

Il nous paraît intéressant de citer à ce sujet Dorier (1997b). Se plaçant dans une problématique d'approche écologique des savoirs (Chevallard 1991), qui permet de rendre compte, pour l'étude de la vie d'un savoir donné, non seulement de la différence de lieux dans lesquels on peut observer son fonctionnement, mais aussi des différences structurelles de ces lieux, Dorier distingue trois types de vecteurs.

Il les appelle vecteur géométrique, vecteur algébrique et vecteurs physiques, distinguant ainsi les vecteurs qui apparaissent dans trois habitats écologiques différents de l'enseignement : la géométrie élémentaire, l'algèbre linéaire et la physique.

D'après la signification que Dorier attache à ces termes, le vecteur géométrique est le vecteur (du plan ou de l'espace) défini de façon géométrique par trois caractéristiques (longueur, direction et sens). Le vecteur algébrique est le vecteur défini axiomatiquement par des propriétés algébriques. Les vecteurs physiques sont de plusieurs sortes : “vecteur lié” (à origine fixe : représentant de la force), “vecteur glissant” (à direction fixe : représentant de la vitesse), “vecteur axial” (dont le signe dépend de l'orientation choisie pour le repère spatial : représentant du moment d'un couple de forces), “champ de vecteurs”, etc. Toutes ces sortes de vecteurs physiques peuvent être définies à partir du vecteur algébrique ou du vecteur géométrique (cf. Dorier 1997b).

Il est clair que les vecteurs physiques et le vecteur géométrique n'ont pas le même statut. En mathématiques, le fait qu'un vecteur soit une classe d'équivalence de segments orientés, et non un segment orienté, conditionne l'existence d'opérations vectorielles. Le passage du vecteur-segment orienté au vecteur-classe d'équivalence est donc indispensable en mathématique, tandis que l'aspect de structure algébrique semble moins important en physique. Ainsi, une distinction explicite entre le vecteur géométrique et les vecteurs physiques est bien nécessaire.

14 C'est nous qui soulignons.

2.3.4. Quelques contradictions relevées lors de l'analyse du manuel

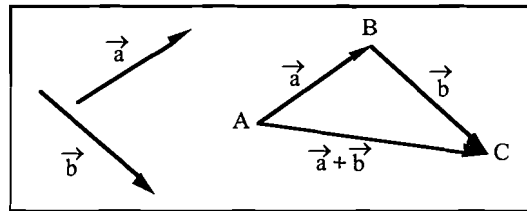
À propos des opérations vectorielles

Le choix des auteurs de ne pas expliciter la différence entre les deux types de vecteurs (lié et libre) et de laisser dans le domaine de l'implicite la construction d'une conception correcte du vecteur géométrique a provoqué des ambiguïtés dans la mise en texte de certains savoirs abordés dans le manuel.

En ce qui concerne les opérations vectorielles, elles sont définies sur les vecteurs libres. Mais les auteurs auraient-ils pu faire autrement ?

L'addition, la soustraction et la multiplication par un nombre réel sont définies à travers la construction géométrique des vecteurs somme, différence et produit par un scalaire. Par exemple, la somme de deux vecteurs est définie comme suit :

“ Soit deux vecteurs \vec{a} et \vec{b} . À partir d'un point quelconque A, on trace $\vec{AB} = \vec{a}$, puis, à partir de B, on trace $\vec{BC} = \vec{b}$. Le vecteur \vec{AC} est appelé somme des vecteurs \vec{a} et \vec{b} et on note : $\vec{AC} = \vec{a} + \vec{b}$ ” (ibid., 6).



Selon cette définition, \vec{AC} est la somme de \vec{a} et \vec{b} . Or, puisqu'on peut changer le choix de A, la somme de deux vecteurs donnés n'est pas déterminée.

Nous retrouverons ce problème du choix du représentant d'un vecteur lors de l'étude de la différence de deux vecteurs et du produit d'un vecteur par un nombre.

Une autre contradiction apparaît dans le paragraphe “ différence de deux vecteurs ”. dans lequel les auteurs abordent tout d'abord la notion de *vecteur opposé* et démontrent ensuite comme suit l'existence et l'unicité du vecteur opposé :

“ Étant donné un vecteur \vec{a} , il existe toujours un vecteur et un seul, \vec{x} , tel que $\vec{a} + \vec{x} = \vec{0}$.

Évidemment, si on trace $\vec{AB} = \vec{a}$, on appelle $\vec{x} = \vec{BA}$, alors $\vec{AB} + \vec{BA} = \vec{0}$

Si \vec{x}' est un vecteur tel que $\vec{a} + \vec{x}' = \vec{0}$ selon les propriétés de la somme deux vecteurs, on a :

$$\vec{x} = \vec{x} + \vec{0} = \vec{x} + (\vec{a} + \vec{x}') = (\vec{x} + \vec{a}) + \vec{x}' = \vec{0} + \vec{x}' = \vec{x}'$$

D'où $\vec{x} = \vec{x}'$.

On appelle \vec{x} vecteur opposé de \vec{a} et on note $\vec{x} = -\vec{a}$." (ibid., 9).

On note ici un décalage entre le souci de pragmatisme dans le choix de la définition d'un vecteur (qui rend évident le fait que \vec{BA} est l'opposé de \vec{AB}) et le souci de rigueur dans la démonstration de l'unicité, dont on se demande ce que les élèves peuvent en penser. Si on reste dans la vision pragmatique du début, cette démonstration qui est très formelle, semble bien superflue.

La différence de deux vecteurs \vec{a} et \vec{b} est définie à partir de la somme des deux vecteurs \vec{a} et $(-\vec{b})$. Ici, on voit également une contradiction avec le choix initial, car cette définition de la différence n'est pas une définition "géométrique". De fait, les auteurs ne peuvent pas s'en sortir : il est impossible de définir les opérations sur les vecteurs comme seuls segments orientés.

À propos du vecteur nul

Le vecteur nul n'a de sens que lorsque l'aspect algébrique intervient : sa présence conditionne l'existence de la somme de deux vecteurs opposés ainsi que la différence de deux vecteurs égaux. Géométriquement, le vecteur nul qui n'a pas de direction et dont la norme est nulle est plus difficile à concevoir.

Comment les auteurs du manuel étudié prennent en compte ce fait ?

Le vecteur nul est introduit par la définition suivante :

" Si A et B sont confondus, \vec{AB} et \vec{BA} sont identiques. Dans ce cas, ce vecteur est appelé vecteur nul." (Van Nhu Cuong et al. 1990a, 3).

Rappelons qu'en sixième, la notion de segment n'est considérée que dans le cas de deux points distincts, il n'y a donc pas de "segment nul". Il existe donc une contradiction avec la définition que l'on vient de présenter : comment peut-on parler des vecteurs \vec{AB} et \vec{BA} si on n'a pas de segment [AB] et [BA] dans ce cas ?

Il y a ici, à notre avis, une nouvelle ambiguïté dans la présentation du manuel. Cette ambiguïté risque de provoquer des difficultés pour l'élève dans l'apprentissage de ces notions nouvelles.

De plus, le fait que la distinction entre un vecteur et ses représentants n'est pas explicitée peut amener les élèves à croire qu'il y a autant de vecteurs nuls que de points dans le plan.

2.4. L'introduction des caractéristiques d'orientation du vecteur

Comment les deux caractéristiques d'orientation du vecteur (direction et sens) sont-elle introduites ?

Pour définir l'égalité de deux vecteurs, le manuel s'appuie sur des notions connues de l'élève (droite, sens d'un chemin,...). La définition de l'égalité de deux vecteurs \vec{AB} et \vec{CD} est présentée en utilisant simultanément le langage mathématique et le langage de la

vie quotidienne :

“ Deux vecteurs \vec{AB} et \vec{CD} sont égaux si :

a) les deux droites (AB) et (CD) sont parallèles ou confondues et telles que sur ces droites le sens de A à B est le même que celui de C à D,

b) les longueurs des vecteurs \vec{AB} et \vec{CD} sont égales : $\|\vec{AB}\| = \|\vec{CD}\|$

Si deux vecteurs \vec{AB} et \vec{CD} sont égaux, on note $\vec{AB} = \vec{CD}$.”

(Van Nhu Cuong et al. 1990a, 4).

Les auteurs n'introduisent pas la notion de direction (ni celle de support) du vecteur \vec{AB} , mais parlent de “la droite (AB)”. Par ailleurs, l'utilisation de la langue naturelle “le sens de A à B” renvoie l'élève à la signification du sens d'un chemin dans la vie courante.

En outre, en ce qui concerne le sens d'un vecteur, les élèves peuvent se référer à la définition de deux vecteurs de même sens, qui est donnée sous une rubrique “Attention” : “Si deux vecteurs ne vérifient que la condition a), on dit qu'ils ont même sens.” (ibid., 5).

Cette définition se présente implicitement comme une convention : on considère que le sens du vecteur \vec{AB} est le sens de A à B. Le terme “sens du vecteur” est utilisé dans la suite du manuel.

Dans le Livre du Maître les auteurs justifient leur choix de contourner l'introduction d'une définition mathématique des vecteurs de même sens en parlant des complications que cette définition peut provoquer dans la pratique des élèves. Le sens du vecteur (de l'origine à l'extrémité) est un des deux sens de la droite contenant ce vecteur. Mathématiquement, dans le cas où les points A, B, C, et D ne sont pas alignés, deux vecteurs \vec{AB} et \vec{CD} sont de même sens s'ils se situent sur deux droites parallèles et appartiennent au même demi-plan dont la frontière est la droite (AC) liant leurs deux origines. Deux vecteurs \vec{AB} et \vec{EF} sont de sens opposés s'ils se situent sur deux droites parallèles et appartiennent aux deux demi-plans opposés dont la frontière est la droite (AE) liant leurs deux origines. Dans le cas où les points A, B, C, et D sont alignés, \vec{AB} et \vec{CD} sont de même sens si l'une des deux demi-droites [AB) et [CD) est contenue dans l'autre. Ces deux vecteurs sont de sens opposés si l'une des deux demi-droites [DC) et [AB) est contenue dans l'autre (cf. Van Nhu Cuong et al. 1990b, 12).

En pratique, les élèves doivent utiliser la transitivité de la relation “avoir même sens” des vecteurs. La démonstration de la transitivité n'est pas simple pour les élèves à partir de la définition de vecteur de même sens qui leur a été donnée. Alors que “*les conceptions de “sens”, de “même sens”, de “sens opposé” sur une droite ne sont pas étrangères aux lycéens. Au contraire, elles sont habituelles pour eux, par exemple “le sens unique”, “deux amis vont ensemble de la maison à l'école”, “deux voitures circulent dans le sens opposé”, ..., sont des situations qu'ils ont rencontrées dans la vie courante ainsi que dans plusieurs problèmes mathématiques du niveau de collège.*” (ibid., 12).

Sur le plan didactique, donner une définition mathématique de la notion de vecteurs

de même sens n'est en effet pas nécessaire. Il suffit de faire comprendre aux élèves que la notion de sens n'est pertinente que pour des vecteurs de même direction (vecteurs se trouvant sur des droites parallèles ou confondues, selon les termes employés par les auteurs).

Cependant l'utilisation, dans le manuel, de la langue naturelle (sens de A à B) jointe au fait que l'on ne parle ni de direction ni de support d'un vecteur, risque de ne pas mettre suffisamment en évidence le fait que l'on ne peut comparer que le sens des vecteurs de même direction (ou de même support).

2.5. Utilisation de l'outil vectoriel

Nous allons maintenant examiner dans quelle mesure le manuel étudié met en pratique la démarche affichée dans les objectifs des auteurs, à savoir se baser sur les vecteurs pour introduire des notions nouvelles et entraîner ensuite les élèves à résoudre des problèmes de géométrie en utilisant ce nouvel outil, comme l'exprime cet extrait du Livre du Maître : *“Le programme de géométrie de classe de dixième est changé. Ce changement ne consiste pas à ajouter ou à soustraire des savoirs mathématiques de “façon arithmétique”, mais dans la nouvelle structure du système de connaissances et dans l'introduction d'un nouvel outil pour la résolution de problèmes géométriques.”* (Van Nhu Cuong et al. 1990b, 106)

De ce point de vue, la prise en considération du rôle de l'outil vectoriel dans l'enseignement de la géométrie en dixième devrait se refléter au travers d'une part de la structuration du texte du savoir, d'autre part du choix des exercices proposés aux élèves.

2.5.1. Structuration du texte du savoir

Comme nous l'avons déjà précisé, ce manuel comporte trois chapitres. Le premier est consacré à l'introduction de la notion de vecteur, de l'addition, de la soustraction et du produit par un scalaire, puis des coordonnées d'un vecteur dans un repère. Dans le deuxième chapitre, les auteurs introduisent certaines relations trigonométriques dans les triangles et les cercles. Les transformations du plan font l'objet de l'étude du troisième chapitre. Regardons comment sont utilisés les vecteurs dans la présentation des contenus de ces deux derniers chapitres.

Vecteurs et relations trigonométriques

Dans le deuxième chapitre, pour introduire des relations trigonométriques dans le triangle, les auteurs présentent d'abord le produit scalaire de deux vecteurs.

Grâce à ce produit scalaire, ils démontrent quelques théorèmes, le théorème de “la fonction cosinus”¹⁵, celui de “la fonction sinus”¹⁶ ainsi que les formules de calcul des longueurs des médianes d'un triangle par exemple. Ils précisent que le théorème de

15 ABC étant un triangle quelconque ($AB = c$, $BC = a$, $CA = b$) :

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos A$$

$$b^2 = a^2 + c^2 - 2ac \cos B$$

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos C$$

16 ABC étant un triangle quelconque : $\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C}$

Pythagore est un cas particulier du théorème de “la fonction cosinus”, mais il n'y a aucun retour sur le théorème de Thalès. Nous reviendrons en détail sur ce point lors de l'étude sur l'articulation de l'enseignement des vecteurs avec celui des autres connaissances géométriques.

Dans cette première partie du chapitre, l'outil vectoriel intervient donc pour démontrer des théorèmes qui s'énoncent sans utiliser le langage vectoriel.

Néanmoins, à la fin du chapitre on trouve deux utilisations de nature différente du calcul vectoriel.

Tout d'abord, à l'aide de la relation de Chasles, les auteurs démontrent que pour chaque point M du plan, le produit $\vec{MA} \cdot \vec{MB}$, où A et B sont les points d'intersection d'un cercle donné et d'une droite quelconque passant par M, est constant. Cette expression est utilisée ensuite pour définir la puissance d'un point M par rapport à un cercle. Ici une notion nouvelle est introduite dans une formulation qui utilise explicitement les vecteurs.

Enfin, sont démontrées deux propositions concernant la condition nécessaire et suffisante pour qu'un quadrilatère soit inscrit dans un cercle¹⁷ et pour qu'une droite soit tangente à un cercle donné¹⁸. Ici on donne donc une formulation vectorielle à des propriétés géométriques déjà connues.

Vecteurs et transformations

La notion de translation a des liens très étroits avec celle de vecteur. Dans l'enseignement on peut :

- soit définir d'abord la translation, puis le vecteur par la classe des couples de points dont le second est l'image du premier par la translation ;
- soit définir d'abord le vecteur, puis la translation à partir du vecteur.

Au Viêt-nam, le choix effectué est de définir d'abord le vecteur.

D'après les auteurs du programme, la définition du vecteur comme bipoint déterminant une translation est “*moderne et exacte mais comporte des inconvénients. [...] Selon la position de l'axiomatique de Weyl, l'axiomatique la plus moderne pour la reconstruction de la géométrie euclidienne, le vecteur est l'objet élémentaire, on part de là pour présenter les autres notions, en particulier les transformations. Il convient donc d'introduire les transformations en se basant sur les vecteurs.*” (Tran Thuc Trinh 1985, 18).

Ce point de vue conduit à introduire la translation après l'enseignement des vecteurs.

Dans le manuel, les auteurs présentent d'abord une définition ponctuelle d'une transformation générale du plan :

“ La transformation f est une règle qui permet de faire correspondre à un point

17 Le quadrilatère ABCD est inscrit dans un cercle si et seulement si $\vec{MA} \cdot \vec{MB} = \vec{MC} \cdot \vec{MD}$, où M est le point d'intersection des droites (AB) et (CD).

18 Étant donné un triangle ABC et M un point pris sur la droite (BC), MA est la tangente au cercle

(ABC) si et seulement si $\vec{MA}^2 = \vec{MB} \cdot \vec{MC}$.

quelconque M le point M' complètement déterminé. [...] On dit que [...] M' est l'image de M par rapport à la transformation f." (Van Nhu Cuong et al. 1990a, 63).

Les symétries centrale et orthogonale ainsi que la translation sont ensuite introduites comme des exemples de ces transformations. Par exemple :

“ Soit un vecteur quelconque \vec{v} . Pour chaque point M on détermine le point M' tel que $\vec{MM'} = \vec{v}$. Une telle transformation est appelée translation de vecteur \vec{v} et est notée $T_{\vec{v}}$ ” (ibid., 64).

Les vecteurs sont également utilisés ensuite pour introduire l'homothétie :

“ Soient un point O et un nombre $k \neq 0$. La transformation qui fait correspondre à un point quelconque M le point M' tel que $\vec{OM'} = k \cdot \vec{OM}$. est appelée l'homothétie de centre O et de rapport k et est notée V_0^k .” (ibid., 71).

De plus, les démonstrations des propriétés de l'homothétie, la conservation du rapport des distances et celle de l'alignement par exemple, sont réalisées grâce à l'usage des vecteurs.

Les auteurs mettent donc bien en pratique l'intérêt de l'utilisation de l'outil vectoriel pour l'étude des contenus introduits dans l'enseignement de la géométrie de dixième.

2.5.2. Utilisation de l'outil vectoriel dans les exercices

Regardons maintenant comment se fait l'exploitation de ce nouvel outil à travers les exercices proposés aux élèves. Comme chacun des trois chapitres a sa fonction propre, nous effectuerons l'analyse des exercices chapitre par chapitre.

Afin de mettre en évidence le domaine de fonctionnement des connaissances vectorielles, nous classons les exercices figurant dans le chapitre 1 et dans le paragraphe 10 du chapitre 2 où sont introduites les notions et les opérations vectorielles, en fonction du statut d'objet ou d'outil du vecteur dans l'exercice.

De ce point de vue, nous définissons deux types d'exercices.

- Premier type : les exercices ayant pour but d'approfondir les notions relatives au vecteur, aux opérations portant sur des vecteurs et aux coordonnées du vecteur. Ils visent l'approfondissement de la théorie et de certaines techniques nécessaires pour manipuler des expressions vectorielles.

- Deuxième type : les exercices ayant pour but d'appliquer des connaissances concernant le vecteur pour démontrer des résultats géométriques.

Il existe en fait un troisième type d'exercices, se situant entre les deux types précédents, pour lequel il s'agit de traduire en langage vectoriel les propriétés connues de figures géométriques, et réciproquement. S'il ne s'agit pas vraiment d'une utilisation de l'outil vectoriel, c'est cependant un entraînement à ce qui représente une première étape cruciale dans le processus de résolution de problèmes géométriques en utilisant les vecteurs comme outil.

Nous distinguerons donc ci-dessous les exercices, selon qu'il s'agit d'exercices portant sur le vecteur objet mathématique (vecteur objet), d'exercices consistant en la traduction de propriétés géométriques en langage vectoriel, y compris des expressions analytiques concernant les coordonnées des vecteurs (traduction vectorielle), ou

d'exercices pouvant être résolus en utilisant l'outil vectoriel (vecteur outil). Comme l'utilisation de la méthode "vecteur-coordonnées" est une forme de celle de l'outil vectoriel, les exercices résolus par cette méthode sont également classés dans la catégorie "vecteur outil".

Tableau 1 : Caractérisation des exercices proposés dans le chapitre 1 et le paragraphe 10 du chapitre 2

Situation de l'exercice		égalité de 2 vecteurs	addition	soustraction	produit par un scalaire	Coordonnées	Fin de chapitre 1	produit scalaire	Total
Type d'exercice									
vecteur objet		4	4	3	1	5	8	5	30
traduction vectorielle		2	3	3	7		4	2	21
vecteur outil	utilisation de la méthode vectorielle		0	0			4		4
	utilisation de la méthode "vecteur-coordonnées"					9	4	1	14
total		6	7	6	8	14	20	8	69

Ce tableau montre que :

- 30 des 69 exercices (soit 43,5%) concernent l'étude du vecteur objet ;
- 18 sur 69 exercices (soit 26,1%) concernent l'utilisation de l'outil vectoriel. Mais, 14 sur 18 des exercices de ce type ne font intervenir que l'utilisation de la méthode "vecteur-coordonnées".

Il semble donc que l'outil vectoriel (indépendamment des coordonnées) ne soit pas vraiment exploité dans ce chapitre ($4/69 = 5,8\%$ des exercices).

Cependant, pour pouvoir utiliser l'outil vectoriel dans des démonstrations de problèmes géométriques, l'élève doit savoir traduire en langage vectoriel des propriétés connues des figures géométriques, et réciproquement. Or, le type d'exercice "traduction vectorielle", considéré comme un pont essentiel reliant le type "vecteur objet" au type "vecteur outil" est bien représenté ($21/69 = 30,4\%$).

Il faut de plus remarquer que dans le texte des exercices du type "vecteur outil", soit l'hypothèse, soit la conclusion sont formulées en terme de vecteurs ou de coordonnées : aucun texte d'exercice n'est donc donné sans utiliser les vecteurs et les coordonnées. Autrement dit, on ne propose pas à l'élève, dans ce chapitre, de résoudre des problèmes de géométrie élémentaire par la méthode vectorielle, sans indication de cet outil dans l'énoncé.

Le tableau 2 montre que ceci évolue dans le deuxième chapitre. On trouve en effet dans ce chapitre plusieurs exercices dont l'énoncé n'est pas donné en langage vectoriel et qui peuvent être résolus par l'outil vectoriel ($20/66 = 30,3\%$).

Tableau 2 : Caractérisation des exercices proposés dans le chapitre 2

Type d'exercice	Nombre d'exercices
-----------------	--------------------

Pas de vecteurs dans l'énoncé et pas de vecteurs dans la résolution	33
Pas de vecteurs dans l'énoncé mais possibilité d'utiliser les vecteurs dans la résolution	20
Vecteurs dans l'énoncé	3

Pourtant, comme la plupart des exercices figurant dans le chapitre 2 concernent l'orthogonalité, le calcul des longueurs et des aires, et la puissance d'un point par rapport à un cercle, l'usage de l'outil vectoriel ne concerne essentiellement que la relation de Chasles et le produit scalaire.

La translation et l'homothétie n'occupent qu'une partie du chapitre 3 qui est consacré à l'étude systématique des transformations du plan. Cependant, pour résoudre les exercices concernant la translation et l'homothétie les élèves doivent utiliser l'outil vectoriel.

Pour résumer, nous pouvons dire que les auteurs mettent bien en pratique les objectifs annoncés qui consistent à utiliser les vecteurs comme outil pour introduire des notions nouvelles. L'intérêt de cet outil est aussi mis en œuvre, dans une certaine mesure, à travers les exercices proposés aux élèves. Cependant, le type de problèmes abordés ici n'est pas varié. Par exemple, on ne demande jamais aux élèves de démontrer l'alignement de points ou le parallélisme de droites. L'outil vectoriel n'est donc pas vraiment exploité sous tous ses aspects dans les exercices.

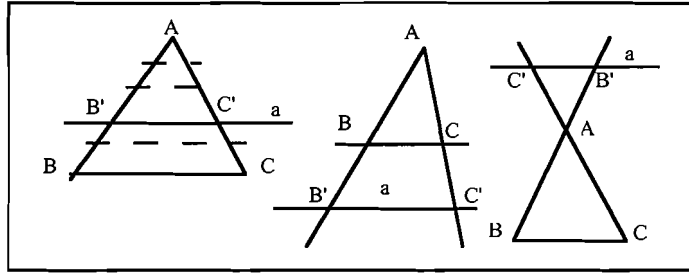
2.6. Articulation de la notion de vecteur avec les connaissances géométriques enseignées au niveau secondaire

2.6.1. Un exemple : vecteurs et théorème de Thalès

Le théorème de Thalès a un rapport très étroit avec la structure d'espace vectoriel des vecteurs géométriques du plan¹⁹, c'est pourquoi il nous paraît ici nécessaire de consacrer un paragraphe spécial à l'analyse de son enseignement en relation avec celui des vecteurs.

Le théorème de Thalès est également lié au problème délicat de la construction de la droite réelle. Or, nous l'avons vu plus haut, au Viêt-nam, ce théorème est introduit en classe de huitième, à un moment où les élèves ne connaissent que l'ensemble des nombres rationnels. Rappelons qu'à ce stade, le théorème n'est abordé que dans la configuration du triangle. Sa démonstration est établie dans le cas où les mesures des longueurs des segments AB et AB' sont des entiers, son extension au cas rationnel étant admise. Voici les énoncés introduits dans le manuel de géométrie de 8^e :

¹⁹ À ce propos, le travail de Matheron (1994) apporte une analyse intéressante sur la dialectique "ancien-nouveau" dans l'enseignement effectué en France.



"*Théorème* : Si une droite coupe deux côtés d'un triangle et est parallèle au troisième côté, alors elle détermine sur ces côtés des couples de segments correspondants proportionnels.

Réciproque : Si une droite coupe deux côtés d'un triangle et détermine sur ces côtés deux couples de segments correspondants proportionnels, alors elle est parallèle au troisième côté.

Conséquence : Si une droite coupe deux côtés d'un triangle et est parallèle au troisième côté, alors elle forme un nouveau triangle ayant trois côtés correspondants proportionnels aux trois côtés du triangle donné.

Attention : Cette conséquence est aussi vraie dans le cas où la droite donnée coupe deux droites contenant deux côtés du triangle (voir la figure)." (Géométrie 8^e 1996, 57-58-59).

En neuvième, l'ensemble des nombres est étendu aux réels, mais on ne reprend pas ce théorème pour le démontrer dans le cas des mesures quelconques. Cependant, en réalité, l'utilisation du théorème n'est pas limitée au cadre des mesures rationnelles. Il reste ainsi une partie cachée dans l'établissement du théorème, celle relative à la construction de la droite réelle.

Pourtant, l'introduction de l'addition vectorielle et de la multiplication d'un vecteur par un nombre réel, donnerait une occasion de reprendre ce théorème dans le cas général. Mais cela n'est pas fait dans le manuel. Ce problème n'est pas non plus proposé en exercice.

Donc, officiellement, les élèves ne connaissent pas le théorème de Thalès sous sa forme vectorielle ni dans le cas général. Pourtant, pour démontrer la distributivité de la multiplication d'un vecteur par un nombre réel les auteurs sont obligés d'utiliser ce théorème. En effet le théorème de Thalès et la loi de distributivité sont très liés : il faut admettre l'un pour démontrer l'autre. C'est ce que nous allons à présent détailler.

De la distributivité au théorème de Thalès

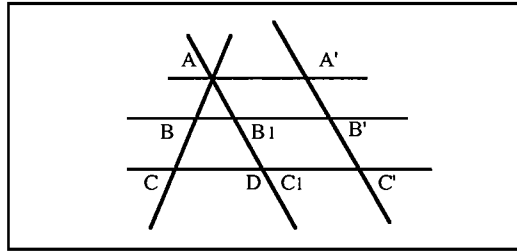
Si on considère la distributivité $k(\vec{a} + \vec{b}) = k\vec{a} + k\vec{b}$ comme un axiome de l'espace vectoriel, le théorème de Thalès n'en devient qu'une conséquence dans l'espace affine associé.

En effet, la formulation vectorielle du théorème est :

Si $(AA') \parallel (BB') \parallel (CC')$ et $\vec{AC} = k\vec{AB}$, alors $\vec{A'C'} = k\vec{A'B'}$.

Démonstration : Traçons la droite passant par A et parallèle à $(A'C')$. Elle coupe (BB') et (CC') en B_1 et C_1 . Il est clair que $\vec{A'C'} = \vec{AC_1}$ et $\vec{A'B'} = \vec{AB_1}$, il convient donc de

démontrer que $\vec{AC}_1 = k \vec{AB}_1$.



Sur la droite (CC') on prend le point D tel que $\vec{CD} = k \vec{BB}_1$. On a :

$$\vec{AD} = \vec{CA} + \vec{AC'} = k \vec{BA} + k \vec{AB'} = k(\vec{BA} + \vec{AB'}) = k \vec{BB'}$$

D'où : $D \in (AB_1)$.

Donc nécessairement D et C_1 sont confondus et $\vec{AC}_1 (= \vec{AD}) = k \vec{AB}_1$

De même, la réciproque du théorème, dans le cas où $A = A'$, est immédiate.

En effet, si les propositions précédentes sont vraies, on a :

$$\vec{CC'} = \vec{AC} + \vec{CD} = k \vec{AB} + k \vec{BB}_1 = k(\vec{AB} + \vec{BB}_1) = k \vec{AB}_1$$

Donc (CC') est parallèle à (BB') .

Dans le cas où A et A' sont distincts, il faut rajouter dans l'hypothèse de la "réciproque" du théorème de Thalès, que (AA') est parallèle à (BB') , on obtient alors que

$$\begin{aligned} \vec{CC'} &= \vec{CA} + \vec{AA'} + \vec{A'C'} = k \vec{BA} + \vec{AA'} + k \vec{A'B'} = k(\vec{BA} + \vec{A'B'}) + \vec{AA'} \\ &= k \vec{BB}_1 + \vec{AA'} = m \vec{AA'} \end{aligned}$$

D'où on déduit que (CC') est également parallèle à (AA') et (BB') .

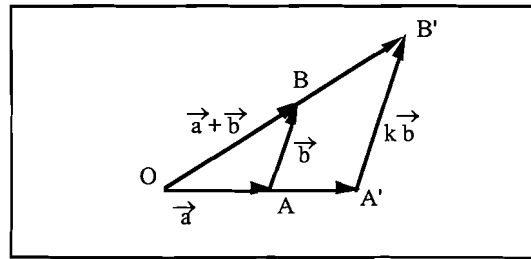
Ainsi, en admettant la distributivité $k(\vec{a} + \vec{b}) = k \vec{a} + k \vec{b}$ on peut démontrer facilement le théorème de Thalès et sa réciproque.

Mais ce n'est pas le choix des auteurs : dans le manuel la loi de distributivité est démontrée. Montrons comment la démonstration introduite dans le manuel s'appuie en fait sur le théorème de Thalès et sa réciproque.

Du théorème de Thalès à la distributivité

Voici la démonstration proposée dans le manuel :

- Si $k = 0$: évidemment, $k(\vec{a} + \vec{b}) = k \vec{a} + k \vec{b}$
- Considérons le cas où $k > 0$:



À partir d'un point quelconque O , on trace $\vec{OA} = \vec{a}$, puis à partir de A on trace $\vec{AB} = \vec{b}$

On a : $\vec{OB} = \vec{a} + \vec{b}$.

Sur les deux rayons $[OA)$ et $[OB)$ on prend deux points A' et B' tel que $OA' = k OA$, $OB' = k OB$.

Selon la définition de la multiplication d'un vecteur par un nombre :

$$\vec{OA}' = k \vec{OA} = k \vec{a} \text{ et } \vec{OB}' = k \vec{OB} = k(\vec{a} + \vec{b}) \quad (*)$$

D'autre part, *il est évident*²⁰ que $\vec{A'B'}$ et \vec{AB} sont de même sens,

et que, de plus, $\|\vec{A'B'}\| = |k| \cdot \|\vec{AB}\|$, c'est-à-dire que $\vec{A'B'} = k \vec{AB} = k \vec{b}$.

$$\text{Donc : } \vec{OB}' = \vec{OA}' + \vec{A'B'} = k \vec{a} + k \vec{b} \quad (**)$$

De (*) et (**) on déduit que $k(\vec{a} + \vec{b}) = k \vec{a} + k \vec{b}$

- Si $k < 0$: démontrer de manière analogue mais prendre respectivement deux points A' et B' sur deux rayons opposés de $[OA)$ et de $[OB)$.”

(Van Nhu Cuong et al. 1990a, 13).

Si l'on considère les contenus enseignés jusqu'ici, ce qui est affirmé “évident” par les auteurs est en fait le résultat d'un processus de raisonnement assez compliqué pour les élèves. En effet, si \vec{a} et \vec{b} ne sont pas de même direction, le fait que $\vec{A'B'}$ et \vec{AB} sont de même sens est déduit de la réciproque du théorème de Thalès, et l'égalité $\|\vec{A'B'}\| = |k| \cdot \|\vec{AB}\|$ résulte de la conséquence de ce théorème, conséquence présentée en huitième et citée ci-dessus par nous. Dans le cas où \vec{a} et \vec{b} sont de même direction, il faut calculer la longueur de $[A'B']$ en fonction de celle de $[AB]$.

En un mot, pour démontrer la distributivité, les auteurs sont obligés d'utiliser implicitement le théorème de Thalès et sa réciproque dans le cas des mesures quelconques, alors que ce théorème n'a pas été étudié auparavant par les élèves.

Toujours à propos du théorème de Thalès

Notre analyse du manuel montre une autre contradiction créée, sans le vouloir, par les auteurs.

Lors de la présentation des propriétés de l'homothétie, les auteurs introduisent le théorème suivant :

²⁰ C'est nous qui mettons en italique.

“ Si A' et B' sont les images respectivement des points A et B par l'homothétie de

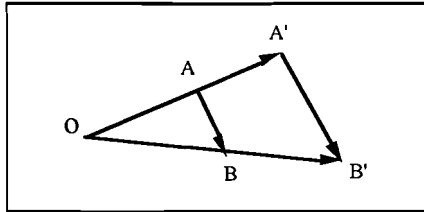
rapport k, alors : $\vec{A'B'} = k \vec{AB}$

Ce théorème est démontré par les auteurs comme suit :

“ Supposons que O est le centre de l'homothétie donnée. On a :

$\vec{OA'} = k \vec{OA}$ et $\vec{OB'} = k \vec{OB}$. On en déduit que

$\vec{A'B'} = \vec{OB'} - \vec{OA'} = k \vec{OB} - k \vec{OA} = k(\vec{OB} - \vec{OA}) = k \vec{AB}$.” (ibid., 72).



Enfin, une conséquence de ce théorème est énoncée :

“ Si A' et B' sont les images respectivement des points A et B par l'homothétie de rapport k, alors (A'B') est parallèle (ou confondue) à (AB) et $A'B' = |k| AB$.” (ibid, 72).

De fait, ce théorème ainsi que sa conséquence ne sont rien d'autre que la réciproque du théorème de Thalès (exprimée en langage vectoriel et en celui de l'homothétie). De plus, la démonstration présentée ci-dessus est elle-même celle de la réciproque du théorème de Thalès, à condition d'admettre la distributivité du produit d'un vecteur par un nombre. Or, nous venons de le voir ci-dessus), les auteurs ont, auparavant, fait l'inverse en utilisant la première propriété pour démontrer la seconde.

Une présentation qui aurait permis de rester cohérent avec les choix effectués par les auteurs du manuel, aurait été, dans l'ordre, de :

- considérer que le théorème de Thalès et sa réciproque sont démontrées en géométrie synthétique ;
- les exprimer en langage vectoriel ;
- les utiliser (sous la forme de langage vectoriel) pour démontrer certaines propriétés et exercices introduits dans le manuel, en particulier la distributivité du produit d'un vecteur par un nombre ;
- dire, à propos du théorème cité ci-dessus, qu'il s'agit de la réciproque du théorème de Thalès et faire le lien entre le langage vectoriel et le langage de l'homothétie.

2.6.2. Méthode vectorielle et méthode des coordonnées (chemin S-V-A)

Nous ne distinguons pas ici les termes “méthode des coordonnées” et “méthode analytique”, puisqu'essentiellement la méthode analytique consiste à substituer aux objets et aux relations géométriques des objets et des relations numériques en s'appuyant sur l'introduction d'un système de coordonnées.

Dans les programmes de géométrie du Viêt-nam et dans le manuel étudié, la

méthode des coordonnées est construite, elle aussi, à partir de la notion de vecteur (comme nous l'avons vu plus haut).

En réalité, les élèves connaissent déjà le mot "coordonnées" depuis la septième. Mais à ce niveau, ce concept est lié à la représentation graphique de fonctions

élémentaires, $f(x) = ax$ et $f(x) = \frac{a}{x}$ par exemple. En neuvième, le repère est également

utilisé dans l'étude des fonctions $f(x) = ax + b$ ($a \neq 0$) et $f(x) = ax^2$ ($a \neq 0$).

Ainsi, au collège, la notion de coordonnées est-elle liée à l'étude de quelques fonctions et à la résolution des équations du premier et du second degré. On dit que le graphique de la fonction $f(x) = ax + b$ est une droite, mais on n'exprime pas, comme on le fera plus tard par la méthode analytique, que toutes les droites (du plan) ont une équation de forme $f(x) = ax + b$. Ce n'est donc pas vraiment la méthode des coordonnées qui est étudiée à ce niveau, mais seulement un préambule.

En dixième, la définition des coordonnées d'un vecteur est introduite. Les opérations vectorielles sont exprimées ensuite sous une forme analytique. L'expression qui permet de calculer la longueur d'un vecteur selon ses coordonnées est également donnée. Cela signifie que la longueur d'un vecteur et les opérations vectorielles, définies auparavant de façon géométrique, sont déterminées maintenant de façon numérique. Tout ceci permet de passer des calculs sur les vecteurs à des calculs sur les nombres. Autrement dit, avec ces connaissances, les auteurs amènent les élèves à la méthode "vecteur-coordonnées". Grâce à cette méthode, les élèves peuvent résoudre certains exercices figurant dans le manuel, calculer les coordonnées du milieu d'un segment ou du centre de gravité d'un triangle, démontrer l'alignement des points de coordonnées connues ou calculer le périmètre d'un triangle par exemple.

C'est à partir de la méthode "vecteur-coordonnées" que les auteurs construiront, en douzième, la méthode analytique. Cependant, en dixième, ils s'arrêtent à la première méthode, parce que, selon le programme, c'est seulement en douzième que l'on utilisera la méthode analytique.

L'enseignement de géométrie de la classe de douzième est en effet consacré totalement à l'extension du calcul vectoriel dans l'espace et à la méthode analytique dans le plan, on introduit la notion de vecteur directeur et celle de vecteur normal à une droite. C'est à partir des vecteurs et de leurs coordonnées que l'on établit l'équation d'une droite dans le plan. À ce niveau, les problèmes concernant les droites, les cercles, ou les coniques sont étudiés à travers leurs équations. La notion de vecteur est étendue ensuite dans l'espace. Comme dans le plan, grâce à l'usage des vecteurs, on établit l'équation d'un plan. Enfin, l'étude des droites, des plans, des sphères et des cylindres repose sur la méthode de coordonnées. C'est donc en douzième seulement que les élèves travailleront véritablement dans le cadre de la géométrie analytique dont le terrain est bien préparé en dixième.

Le schéma d'organisation de l'enseignement de la géométrie dans l'enseignement secondaire vietnamien est donc du type S-V-Ga-A.

3. Analyse comparative Viêt-nam / France

3.1. Processus d'évolution de la notion de vecteur géométrique au cours des années de l'enseignement secondaire

Nos lecteurs connaissent bien le système français, nous ne le détaillerons pas ici. Nous nous bornerons donc à mettre l'accent sur les points importants dans la perspective comparative adoptée.

En France, l'enseignement du vecteur géométrique se déroule selon deux étapes. Dans la première étape le vecteur est toujours associé à une translation et tracé en un point donné. Les élèves travaillent donc avec les vecteurs liés. La deuxième étape est consacrée à l'étude du vecteur-classe d'équivalence. Il y a un passage fait explicitement entre ces deux types de vecteurs. Regardons comment est construite, à chaque étape, la notion de vecteur. Notre analyse sera mise en comparaison avec l'étude de l'enseignement des vecteurs au Viêt-nam faite au chapitre précédent.

3.1.1. Vecteur : associé à une translation

Comme nous l'avons montré, au Viêt-nam, les vecteurs sont introduits d'abord, puis la translation est définie et étudiée en utilisant les vecteurs. Quel ordre de traitement de ces deux notions est choisi en France ?

D'après les programmes en vigueur : au début *“les vecteurs sont introduits “naïvement” par direction, sens, longueur. À toute translation, on associe son vecteur. Si, dans une translation, A' est l'image de A et B' celle de B, on écrit : $\vec{AA'} = \vec{BB'}$.”* (Programme de mathématiques de la classe de quatrième, B.O. n° 25 du 30 juin 1988, 51).

À ce niveau, la translation n'est pas présentée comme une application du plan dans lui-même, mais *“apparaît dans son action sur une figure, ou comme laissant invariante une figure.”* (Programme de mathématiques de la classe de quatrième, B.O. n° 25 du 30 juin 1988, 51). En quelque sorte, les manuels mettent en évidence les caractéristiques d'une translation et font le lien entre translation et vecteur comme suit : Si A' et B' sont les images respectivement des points A et B par une translation, alors $(AA') \parallel (BB')$; les demi-droites $[AA')$ et $[BB')$ sont de même sens ; et $AA' = BB'$. À partir de ceci, une définition du vecteur est dégagée :

“ Deux points A et A', pris dans cet ordre, représentent un vecteur que l'on note $\vec{AA'}$ ” (Pythagore 4^e 1992, 230).

Donc, le terme *vecteur* est utilisé ici pour désigner un vecteur fixé à un point (vecteur lié). Bien que le mot *“représentent”* puisse donner l'idée d'un représentant du vecteur au sens mathématique, mais cela n'est pas introduit explicitement à ce niveau.

Avec cette définition, en principe, le vecteur a donc été dissocié de la translation : un vecteur est déterminé par un ensemble de bipoints. Pourtant, l'étude des vecteurs au collège reste toujours liée à celle des translations. Par exemple, les caractéristiques d'un vecteur et l'égalité vectorielle sont présentées comme suit :

“ Soit quatre points A, B, E, F. Construire l'image E' de E par la translation de

vecteur . Construire l'image F' de F par la translation de vecteur \vec{AB} . On dit alors que les vecteurs $\vec{EE'}$ et $\vec{FF'}$ sont égaux : $\vec{EE'} = \vec{FF'}$ [...]. Dire que $\vec{EE'} = \vec{FF'}$ revient à dire que les vecteurs $\vec{EE'}$ et $\vec{FF'}$ ont même direction, même sens et même longueur..." (Pythagore 4^e 1992, 231).

3.1.2. Direction et sens

À la différence du choix effectué par les auteurs vietnamiens, la notion de direction d'un vecteur est introduite, dans les manuels français, à l'aide de celle de direction d'une droite, présentée préalablement en troisième.

Par contre, comme dans le manuel vietnamien étudié, la notion de sens d'un vecteur n'est pas définie mathématiquement.

Les contextes qui donnent leur signification aux deux mots "vecteur" et "sens" sont néanmoins différents dans les deux institutions. Le vecteur dans le manuel vietnamien est un segment orienté et son sens est celui de l'origine à l'extrémité. Dans le manuel français le vecteur est représenté par un bipoint et ses caractéristiques sont dégagées en relation avec les propriétés de la translation. Un vecteur est déterminé ici par une translation et son sens est celui du "glissement" d'une figure sur le plan, c'est-à-dire le sens d'un point à son image par cette translation. L'égalité de deux vecteurs est donc définie d'abord par le fait que ce sont les vecteurs d'une même translation. Ceci facilite le passage du vecteur lié au vecteur libre.

3.1.3. Vecteur lié ? Vecteur libre ? Vecteurs physiques ? Vecteur géométrique ?

Le passage du vecteur lié au vecteur libre se fait en seconde. Remarquons que ces mots n'apparaissent pas dans les programmes et les manuels, le même terme de vecteur s'applique donc à deux objets différents : le vecteur géométrique et son représentant d'origine un point donné.

À ce niveau, le vecteur est totalement dissocié de la translation et les notions sont conceptualisées. On précise que :

- deux points A et A' , pris dans cet ordre, représentent un vecteur que l'on note $\vec{AA'}$;
- la direction du vecteur \vec{AB} est la direction de la droite (AB) , son sens sur cette droite est le sens de A vers B et sa longueur est la longueur du segment $[AB]$;
- deux vecteurs sont égaux s'ils ont même direction, même sens et même longueur ;
- à deux points distincts A, B sont associés deux vecteurs \vec{AB} et \vec{BA} ; ces deux vecteurs sont différents car ils n'ont pas même sens.

La distinction entre le vecteur \vec{AB} et le vecteur \vec{u} est introduite dans les rubriques *Nouvelle notation d'un vecteur* et *Représentation d'un vecteur*. On précise que la nouvelle notation \vec{u} est utilisée pour désigner tous les vecteurs égaux à \vec{AB} . Ceci permet de distinguer les deux types de vecteurs. La distinction est mieux mise en évidence

dans la rubrique *Représentation d'un vecteur* où l'on précise que "pour représenter un vecteur \vec{u} , nous pouvons choisir l'origine à notre guise." (Transmath 2° 1990, 243).

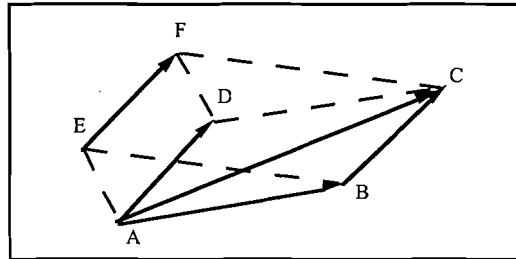
Une distinction entre le vecteur géométrique et certains types de vecteurs physiques est également présentée dans le manuel. L'auteur montre qu'en mécanique l'origine d'un vecteur force est le point d'application de la force et il a donc une importance considérable (une force n'a pas le même effet selon qu'elle appliquée à tel point ou à tel autre), alors qu'en mathématiques l'origine n'a pas d'importance (voir Transmath 2° 1990).

Ainsi, au contraire du choix des auteurs du manuel vietnamien étudié, la distinction entre le vecteur \vec{AB} et le vecteur \vec{u} est faite explicitement dans l'enseignement en France.

3.1.4. Opérations vectorielles

Comme pour l'introduction de la notion de vecteur, la construction des opérations vectorielles se déroule également en deux étapes.

Le vecteur défini en quatrième est le vecteur lié. En troisième l'addition de deux vecteurs est abordée en relation avec la composition de deux translations. La relation de Chasles est dégagée à partir de l'observation de l'effet de l'application successive de deux translations. Enfin en partant de la propriété caractéristique du parallélogramme, propriété exprimée par une égalité vectorielle et présentée en quatrième, on présente deux façons de construire la somme de deux vecteurs (liés, mais d'origines différentes) \vec{AB} et \vec{EF} . Remarquons que dans cette présentation, le vecteur somme est lié au point A (l'origine du premier vecteur), quelle que soit la construction réalisée (par la relation de Chasles ou par la propriété du parallélogramme)



$$\vec{AB} + \vec{EF} = \vec{AB} + \vec{BC} = \vec{AC} \text{ (relation de Chasles)}$$

$$\text{ou } \vec{AB} + \vec{EF} = \vec{AB} + \vec{AD} = \vec{AC} \text{ (règle du parallélogramme)}$$

Pourtant, tant qu'on en reste aux vecteurs liés, on ne peut pas construire un calcul vectoriel qui donne à la géométrie un outil efficace. Par exemple, avec cette définition de l'addition, les vecteurs $\vec{AB} + \vec{EF}$ et $\vec{EF} + \vec{AB}$ ne sont pas les mêmes, puisqu'ils sont d'origines différentes. C'est pourquoi les propriétés de l'addition ne sont pas étudiées à ce niveau et qu'"*aucune compétence sur le calcul vectoriel n'est exigible des élèves.*" (Programme de mathématique de la classe de troisième, B.O. n°12 du 23 mars 1989, 64).

Dans la deuxième étape de l'enseignement des vecteurs, en classe de seconde, on

passé du vecteur \vec{AB} au vecteur \vec{u} . Le problème de l'addition de deux vecteurs est alors reconsidéré. La somme de deux vecteurs, la relation de Chasles, les notions de vecteur nul et de vecteur opposé ainsi que la soustraction de deux vecteurs sont traitées plus formellement d'un point de vue algébrique structurel. Par exemple, les deux façons de construire la somme de deux vecteurs liés, présentées en troisième, deviennent ici deux façons de représenter le vecteur somme, le mot "vecteur" étant maintenant compris au sens de vecteur libre.

Le produit d'un vecteur par un réel apparaît pour la première fois en seconde et le produit scalaire en première, après que la distinction du vecteur \vec{u} avec le vecteur \vec{AB} ait été faite explicitement. À ce niveau, en ce qui concerne ces opérations vectorielles, il n'y a pas une grande différence entre les manuels vietnamiens et français. Les propriétés des opérations vectorielles sont introduites, et le plan vectoriel réel ainsi que le plan euclidien qui lui est associé sont construits (les mots n'apparaissent toutefois ni dans les programmes ni dans les manuels des deux pays).

3.2. Interaction des méthodes vectorielle et analytique dans l'enseignement de la géométrie

Comme nous l'avons vu, l'enseignement de la géométrie au Viêt-nam est divisé en trois étapes différentes durant lesquelles les élèves sont successivement initiés à la méthode synthétique, puis à la méthode vectorielle et enfin à la méthode analytique. Chaque étape est consacrée à l'étude approfondie d'une seule de ces méthodes.

Dans l'enseignement de la géométrie élémentaire en France, au contraire, la "dose" de l'utilisation des méthodes vectorielle et analytique augmente progressivement de façon conjointe. De classe en classe ces méthodes sont consolidées et étendues conjointement ou de façon parallèle. Il n'y a pas une coupure absolue dans le temps pour leur introduction dans l'enseignement.

Dès la cinquième, dans le domaine géométrique, les élèves connaissent déjà la détermination des coordonnées du point symétrique d'un point donné par rapport à une droite ou à un point. En quatrième, le programme exige que les élèves sachent calculer les coordonnées du milieu d'un segment. Mais, à ce moment là, la méthode des coordonnées n'est pas vraiment construite.

C'est en troisième que les élèves sont réellement confrontés à la méthode des coordonnées. À la suite de l'introduction de la notion des coordonnées d'un vecteur, la formule permettant de calculer la distance entre deux points de coordonnées connues est dégagée. Les élèves sont amenés à l'utiliser pour trouver le périmètre d'un polygone. La méthode utilisée ici est la méthode "vecteur-coordonnées".

Certes ces types de problèmes apparaissent également dans le manuel de dixième au Viêt-nam. Mais la différence ne provient pas seulement du moment de leur apparition (troisième ou dixième) mais surtout de l'usage fait de la méthode "vecteur-coordonnées". En France, dès la classe de troisième, la méthode analytique est exploitée explicitement dans l'étude des problèmes concernant les droites. Ces problèmes sont traités à travers les équations de droites données. Le terme "coefficient directeur d'une droite" est utilisé. À

cette occasion, la direction d'une droite est introduite de façon mathématique, indépendamment des vecteurs, à l'aide de nombres. Cette introduction sera un point d'appui dans la conceptualisation de la notion de direction d'un vecteur abordée en seconde où il est dit que "la direction du vecteur \vec{AB} est la direction de la droite (AB)."

Les élèves doivent être capables de déterminer l'équation d'une droite définie par deux points ou par son coefficient directeur et par un point. Il faut qu'ils sachent aussi "*exprimer à l'aide des coefficients directeurs, le parallélisme de deux droites ou, en repère orthonormal, leur orthogonalité.*" (Programme de mathématique de classe de troisième, B.O. n°12 du 23 mars 1989, 64). Les propositions concernant ces problèmes - Deux droites sont parallèles si leurs coefficients directeurs sont égaux ; Si le produit de deux coefficients directeurs est (-1), alors les deux droites données sont perpendiculaires - sont introduites dans le cours.

Par contre, bien que l'objet vecteur ait été introduit dès la quatrième, l'outil vecteur n'est mis en place et exploité qu'à partir de la seconde. À ce niveau, "*le calcul vectoriel dans le plan est le principal outil nouveau.[en géométrie] [...] La mise en œuvre des vecteurs sur les configurations et les transformations joue un rôle essentiel, aussi bien pour la compréhension de la notion de vecteur que pour la résolution des problèmes de géométrie.*" (Programme de mathématique des classes de seconde, première et terminale, Encart n°1, 1990, Brochure n° F 6173, 2 et 16).

Il s'agit d'entraîner les élèves à résoudre des problèmes concernant l'alignement, la concourance, le parallélisme, l'orthogonalité, des calculs de distances, d'angles, d'aires, en exploitant l'outil vectoriel. Après le passage au vecteur libre, on introduit la notion de vecteur directeur d'une droite. La colinéarité des vecteurs est utilisée pour caractériser le parallélisme de deux droites, l'alignement de trois points, l'appartenance à une droite définie par deux points ou par un point et un vecteur directeur. Le théorème de Thalès et sa réciproque sont représentés dans le cas général en langage vectoriel. Les vecteurs sont utilisés aussi pour introduire l'homothétie.

En seconde, l'exploitation de l'outil vectoriel, permet de revenir également à la méthode analytique qui a été présentée en troisième sans relation avec les vecteurs. Les opérations et les égalités vectorielles sont exprimées par des expressions analytiques. Ceci permet de passer du calcul sur des vecteurs à celui sur des nombres. La détermination de l'équation d'une droite définie par un point et un vecteur directeur est traitée. La notion de coefficient directeur d'une droite est reliée à celle de vecteur directeur (si $ax + by + c = 0$ est l'équation de la droite donnée, alors $\vec{u}(-b, a)$ est un vecteur directeur de cette droite). L'alignement des points, le parallélisme et l'orthogonalité des droites, qui viennent d'être étudiés dans le paragraphe précédent par l'outil vectoriel, sont traduits en langage analytique.

En première, les deux méthodes vectorielle et analytique continuent à être exploitées et consolidées en même temps.

Le produit scalaire de deux vecteurs est introduit ici. Les élèves s'habituent à "*traduire vectoriellement des propriétés géométriques portant sur des distances et des angles à l'aide du produit scalaire, et, inversement, à interpréter géométriquement des*

résultats vectoriels.” Ainsi les propriétés du losange et du triangle isocèle sont reliées au fait que $\|\vec{u}\| = \|\vec{v}\|$ si et seulement si $(\vec{u} + \vec{v})$ et $(\vec{u} - \vec{v})$ sont orthogonaux; de même, le théorème des médianes est relié au calcul du carré scalaire de la somme et de la différence de deux vecteurs : $\|\vec{u} + \vec{v}\|^2$ et $\|\vec{u} - \vec{v}\|^2$. (Programme de mathématique des classes de Premières S et E, B.O. n° spécial 2, 2 mai 1991, 46). En particulier, le produit scalaire est systématiquement utilisé pour résoudre les problèmes concernant l'orthogonalité.

Les connaissances vectorielles, à l'exception du produit scalaire, sont étendues ensuite à la géométrie dans l'espace. La notion de vecteurs coplanaires est présentée aux élèves. L'orientation du plan par un couple de vecteurs orthonormaux est également abordée. Comme auparavant, les connaissances vectorielles sont exploitées pour caractériser le parallélisme ou l'orthogonalité de droites et de plans ainsi que l'appartenance d'un point à une droite ou à un plan.

L'équation d'un cercle de centre et de rayon donnés est également abordée en première. De plus, par l'intermédiaire des repères, les expressions vectorielles se traduisent en des expressions analytiques, la méthode des coordonnées est utilisée aussi pour l'étude de la géométrie dans l'espace.

Le programme de terminale scientifique poursuit l'étude du calcul vectoriel en mettant en place le produit scalaire (dans l'espace) et le produit vectoriel. Les notions de bases et de repères sont étendus également à l'espace. À ce niveau, l'étude des coniques et de la sphère sont réalisées à l'aide de leur équation. Dans le même esprit, on approfondit la géométrie du plan et de l'espace à travers l'étude de configurations en mettant en œuvre les méthodes vectorielle et analytique.

Conclusion

Les apports de l'analyse institutionnelle

L'analyse institutionnelle nous a permis de mieux comprendre où et comment apparaît le savoir Vecteur et comment il fonctionne dans chacune des deux institutions concernées.

Dans une démarche dont le point de départ est le segment orienté (comme au Viêt-nam), le passage à la classe d'équivalence est assez abstrait et difficilement concevable par des élèves. De plus, les auteurs du manuel vietnamien étudié n'abordent pas la différence entre les deux types de vecteurs (lié et libre) et travaillent implicitement sur les vecteurs libres. On peut alors prévoir le risque que les élèves confondent le vecteur et ses différents représentants. D'un point de vue pragmatique, ceci n'a pas forcément de conséquence néfaste dans l'utilisation de l'outil vectoriel, mais ceci pose problème du côté du savoir mathématique visé.

Dans la démarche française, où le point de départ est la translation (qui n'est pas étudiée comme une application du plan dans lui-même, mais à travers son effet sur des objets géométriques), le mot “vecteur” est lié à une information contenant trois composantes inséparables (direction, sens, longueur) par lesquelles cette translation est

entièrement définie. Dans ce cas, l'égalité $\vec{AB} = \vec{CD}$ traduit le fait que le premier point de chacun des bipoints (A, B) et (C, D) a pour image le deuxième point par une même translation. Ainsi dès l'introduction, le vecteur n'est pas lié à un représentant unique. Ceci facilite le passage à la classe d'équivalence et minimise les risques de confusion entre vecteur et représentant. Il semble donc que l'organisation et le choix des programmes français gèrent mieux la nature algébrique du vecteur géométrique.

Malgré des choix d'enseignement différents, dans chacun des pays, le vecteur est caractérisé essentiellement par ses trois caractéristiques de direction, sens et longueur.

Dans les manuels et les programmes français, la direction d'un vecteur est explicitement reliée à la direction de deux droites parallèles ou à celle (coefficient directeur) d'une droite. Cet aspect est complètement absent du manuel vietnamien étudié : ni le terme de direction ni le terme de support d'un vecteur n'apparaissent dans ce dernier. Les élèves vietnamiens ne connaissent pas la notion de direction d'un vecteur et, pour traduire le fait que \vec{AB} et \vec{CD} ont même direction et même sens, ne disposent que de l'expression " les deux droites (AB) et (CD) sont parallèles ou confondues et le sens de A à B est le même que celui de C à D ”.

Les notions de direction et de sens semblent être plus lacunaires dans le manuel vietnamien que dans l'approche française. En effet, il est essentiel de bien préciser que l'on ne peut définir la notion de vecteurs de même sens que dans le cas de vecteurs de même direction. De plus, le fait que le vecteur soit lié à une translation et que l'égalité vectorielle soit exprimée par un parallélogramme nous paraît susceptible de moins de confusion, chez les élèves, entre sens d'un vecteur et "sens" dans la langue naturelle.

Qu'en est-il effectivement ? Quelques résultats complémentaires

Dans la troisième partie²¹ de notre thèse, nous avons analysé les productions obtenues par la passation d'un même test, centré sur l'égalité des vecteurs, par les élèves de cinq classes de dixième de lycée au Viêt-nam et de trois classes de seconde de lycée en France. Nous résumons ci-dessous les principaux résultats obtenus, en demandant au lecteur de bien vouloir excuser le côté inévitablement schématique et caricatural d'un tel résumé.

Nos analyses montrent tout d'abord une *difficulté commune à sortir du domaine métrique dans les deux populations* : près d'un quart des élèves testés utilise, lors de la première question, l'égalité des longueurs comme seul critère pour décider de l'égalité de vecteurs (23% d'élèves vietnamiens et 25,5% de français) ; de plus, l'étude de l'ensemble des réponses fournies par les autres élèves montre que la prise en compte privilégiée de la norme est encore présente chez nombre d'entre eux lorsque les questions posées se complexifient.

L'étude historique de l'apparition du concept de vecteur et du développement du calcul vectoriel²² nous a montré comment la résistance du modèle métrique en géométrie a été source de difficultés dans la genèse du calcul vectoriel. On peut donc penser que ce

21 Lê Thi 1997, chapitre B3, p.201-251

22 Lê Thi 1997, chapitre B1, pp.79-108.

type d'erreurs a des racines épistémologiques : la difficulté du passage des grandeurs scalaires (longueur) à la prise en compte des caractéristiques d'orientation des entités vectorielles paraît ne pas pouvoir être évitée, quels que soient les choix d'enseignement.

Cependant, une analyse détaillée nous montre que la stratégie Norme²³ est beaucoup plus stable chez les élèves vietnamiens (ils la mettent en oeuvre du début à la fin du test) que chez les élèves français (qui ne l'utilisent que dans certaines situations). Nous interprétons ceci comme une conséquence de la différence des rapports institutionnels : le fait que la notion de vecteur soit en France liée à la translation semble favoriser la compréhension de l'équivalence des segments orientés. Par contre, l'utilisation faite au Viêt-nam du segment pour introduire la notion de vecteur semble aggraver la difficulté à sortir du modèle métrique.

Les résultats obtenus confirment également une *difficulté d'appropriation des caractéristiques d'orientation* : les justifications apportées aux réponses aux différentes questions montrent que 65,2% des élèves vietnamiens et 32,1% des élèves français ont du mal à s'approprier correctement les deux caractéristiques d'orientation du vecteur, ce qui se traduit notamment par le fait qu'ils comparent le sens de deux vecteurs n'ayant pas la même direction²⁴ ou amalgament²⁵ dans leurs réponses les deux caractéristiques d'orientation. Cette difficulté dans l'appropriation des notions de direction et de sens n'est pas seulement un problème de vocabulaire et traduit *des difficultés de conceptualisation*.

Nous avons montré dans notre travail de thèse comment le passage du modèle métrique au modèle vectoriel peut être décomposé en deux étapes. La première, qui consiste à passer du modèle métrique au modèle unidirectionnel orienté, permet de concevoir deux sens sur une direction. Ce passage est à rapprocher de celui du modèle des nombres positifs au modèle des nombres relatifs. La deuxième, qui consiste à passer du modèle unidirectionnel orienté au modèle vectoriel, exige d'abandonner le modèle de la droite et de concevoir diverses directions orientées dans leurs rapports mutuels dans le plan ou dans l'espace.

Ainsi, la question du sens serait-elle première par rapport à celle de direction. Pour sortir du modèle métrique, on doit d'abord avoir une vision de la droite orientée. Il faut ensuite sortir de ce modèle unidirectionnel orienté pour accéder au modèle vectoriel, et prendre en compte toutes les directions orientées. L'intégration de la direction et du sens dans un même modèle présente donc une grande complexité d'ordre épistémologique.

Mais là encore, la différence des résultats obtenus dans les deux populations (65,2% des élèves vietnamiens versus 32,1% des élèves français) nous semble pouvoir être expliquée par la différence des rapports institutionnels à l'objet vecteur : en France, la notion de direction d'une droite est enseignée avant les vecteurs. De plus, l'enseignement en classe de seconde insiste sur les deux notions de direction et de sens des vecteurs. Par contre, la notion de direction n'est pas, nous l'avons vu, introduite dans le manuel vietnamien. Ainsi les élèves vietnamiens ne disposent-ils que du parallélisme des droites

23 Deux vecteurs sont dits égaux « parce qu'ils ont même longueur »

24 ce qui peut les conduire à justifier l'égalité de deux vecteurs de même norme par le fait qu'« ils vont dans le même sens », le sens pouvant alors être aussi bien celui de gauche à droite, de haut en bas ou encore des aiguilles d'une montre.

25 en justifiant par exemple la non égalité de deux vecteurs par la phrase « car ils ont même norme mais pas même sens et même direction ».

et du mot "sens.

En bref, notre étude, tout en permettant d'affirmer la nature épistémologique de la difficulté du passage des grandeurs scalaires à la prise en compte des caractéristiques d'orientation des grandeurs vectorielles, confirme également le rôle important des choix didactiques, dans la création de conditions favorables au dépassement de cette difficulté.

Références bibliographiques

CHEVALLARD Y. (1989). Le concept de rapport au savoir. Rapport personnel, rapport institutionnel, rapport officiel. *Séminaire de Didactique des Mathématiques et de l'Informatique*, Année 1988-1989, IMAG, pp. 211-235.

CHEVALLARD Y. (1991). *La transposition didactique*, 2^{ème} éd., Grenoble : La Pensée Sauvage.

DORIER J.-L. (1990) : *Analyse Historique de l'Emergence des Concepts Elémentaires d'Algèbre Linéaire*, Cahier Didirem n°7, Paris: IREM de Paris VII.

DORIER J.-L. (1997a). *L'algèbre linéaire en question*, collection travaux et thèses en didactique des mathématiques, Grenoble : La Pensée Sauvage Éditeur.

DORIER J.-L. (1997b). *Recherche en historique et en didactique des mathématiques sur l'algèbre linéaire*. Note de synthèse pour le diplôme d'habilitation à diriger des recherches - Document interne.

LÊ THI HOÀI CHÂU et COMITI C. (1995). Problème d'enseignement / apprentissage des vecteurs : une comparaison de résultats d'élèves vietnamiens et français. *Didactique des Disciplines Scientifiques et Formation des Enseignants*, Actes du Premier Colloque Régional des Pays Francophones d'Asie du Sud-Est, Maison d'édition de l'éducation, Hanoï, Viêt-Nam, pp. 318-325.

LÊ THI HOÀI CHÂU (1996). Difficultés rencontrées dans l'apprentissage du vecteur : une approche didactique à la lumière épistémologique. *Actes de la septième conférence Sud Est Asiatique sur l'enseignement Mathématiques*, 3-7 Juin 1996 Hà-nôi, Viêt-nam, pp. 156-160.

LÊ THI HOÀI CHÂU (1997). *Étude didactique et épistémologique sur l'enseignement du vecteur dans deux institutions : la classe de dixième au Viêt-nam et la classe de seconde en France*. Thèse en *Didactique des mathématiques*. Université Joseph Fourier - Grenoble I et École normale supérieure de Vinh- Viêt-nam.

LABORDE C. , CAPPONI B. (1994) Cabri-géomètre constituant d'un milieu pour l'apprentissage de la notion de figure géométrique. *Recherches en didactique des mathématiques*, Vol I4/1-2.

MATHERON Y. (1993). Les répercussions des changements de programme entre 1964 et 1989 sur l'enseignement du théorème de Thalès. *Petit x*, N°34, pp. 59-87.

TRANH THUC TRINH (1985). Nouveauté de la géométrie enseignée dans les lycées. in *Certains problèmes de géométrie enseignée dans les lycées*, Ministère de l'éducation, Hanoï, Viêt-nam

Références de manuels et programmes

ANTIBI A. et al. (1990). *Mathématiques de 2^e*, collection Transmath.

NGUYỄN GIA CÔC (1990). Certains problèmes généraux dans l'enseignement de la géométrie en classe de dixième. *Document pour les maîtres, accompagnant la réforme d'éducation*. Ministère de l'éducation et de la formation, Viêt-nam.

VAN NHU CUONG, VU DUONG THUY, TRUONG CÔNG THÀNH (1990a). *Géométrie de 10^e*. Maison d'édition de l'éducation, Ha-nôi, Viêt-nam.

VAN NHU CUONG, VU DUONG THUY, TRUONG CÔNG THÀNH (1990b). *Livre du maître-Géométrie de 10^e*. Maison d'édition de l'éducation, Ha-nôi, Viêt-nam.

Programme de mathématiques de la classe de 3^e. B.O. n°12 du 23 mars 1989.

Programme de mathématiques de la classe de 4^e. B.O. n°25 du 30 juin 1988.

Programme de mathématiques des classes de seconde, première et terminale. Encart n°1, 1990. Brochure n°F 6173 (réédition 1989).