UNE ÉTUDE SUR LE MANIEMENT D'ÉNONCÉS DANS UNE DÉMONSTRATION

Robert NOIRFALISE[1]
Irem de Clermont-Ferrand

RÉSUMÉ. Nous intéressant au maniement d'énoncés dans une démonstration, nous avons demandé à des enseignants de collège et de lycée, ainsi qu'à des élèves de troisième, de rédiger une même démonstration. Nous avons ainsi recueilli plusieurs textes. Nous avons analysé les différents pas déductifs contenus dans ceux-ci en nous référant pour l'essentiel à la modélisation proposée par Duval : nous nous sommes intéressés aux signes linguistiques permettant de marquer les différents statuts des énoncés utilisés, à l'usage explicite ou non d'un énoncé-tiers dans un pas déductif

I. Introduction

Yves Chevallard introduit pour décrire l'activité mathématique la notion de *dispositif*, constituant de toute pratique, que la culture courante actuelle tendrait à ignorer lorsqu'il s'agit d'activité intellectuelle : " Le dispositif comprend l'ensemble des objets qui permettent que la pratique se déroule (soit encore l'ensemble de tous les objets nécessaires au déroulement de la pratique, et sans lesquels celle-ci ne pourrait avoir lieu) [...] Une pratique n'est rien d'autre qu'un dispositif à l'intérieur duquel des acteurs réalisent certains gestes... "[2]

Suivant la définition du terme " dispositif ", il est assez clair que, comme les figures, les *énoncés* font partie du dispositif que l'on manipule lorsqu'on fait une démonstration en géométrie : ils ont à la fois une dimension sémiotique lorsqu'ils servent à montrer comment on " lit " une figure, mais aussi une dimension instrumentale dès lors qu'ils servent à " instrumenter " la pensée, le raisonnement, en particulier dans la production d'un pas déductif.

1 Le travail relaté dans cet article a été réalisé en coopération avec les membres du groupe ''démonstration au collège'' de l'Irem de Clermont-Ferrand : J. Ferrari, G. Lequang, M. Maze, A. Noirfalise, M.P. Puymèges.
2 Chevallard (1990-91). Sur le sujet, on peut consulter aussi Chevallard (1995-96).

Or si la main doit se faire à l'instrument, ce dernier doit aussi être fait pour la main qui le manipule. La pensée doit manipuler des énoncés, mais la forme de ceux-ci doit aussi s'adapter à leur manipulation, à la fonction qu'on leur fait jouer, en l'occurrence doit être adaptée à la rédaction de démonstration.

Relativement à ce qui précède, notre ambition est très modeste ; étudier sur quelques exemples, comment se règle la formation de certains énoncés et la rédaction de pas déductifs.

Nous intéressant à la manipulation d'énoncés dans une démonstration, nous nous sommes référés aux travaux de Raymond Duval [Duval (1990) ; Duval (1992-93); Duval (1993) ; Duval (1994)] ; rappelons rapidement que celui-ci distingue deux niveaux d'organisation pour décrire le fonctionnement du raisonnement déductif :

• l'organisation globale propre à l'orientation vers l'énoncé-cible à partir des prémisses, données dans l'énoncé du problème. C'est, par exemple, cette organisation que l'on donne à voir en produisant des déductogrammes. Qu'il y ait une difficulté à réaliser la tâche à ce niveau est assez évident, la difficulté est récurrente, renouvelable dès lors que l'on s'attaque à un problème nouveau dont on ne connaît pas une solution-type. Le cheminement reste à trouver entre " hypothèses " et " conclusions " : cette activité peut rester difficile, même pour un mathématicien rompu à la démonstration ; le niveau de difficulté dépend du rapport que le sujet a avec le type de problèmes.

• l'organisation locale : c'est à ce niveau que l'on trouve le pas déductif. Suivant Duval, un pas déductif met en scène trois énoncés :

- A_0, instanciation de l'énoncé-prémisse A constituant de l'énoncé-tiers
- $A \Rightarrow B$ l'énoncé-tiers,
- B_0, instanciation de l'énoncé-conclusion B constituant de l'énoncé-tiers.

Rappelons que l'on dit que l'on instancie un énoncé lorsqu'on donne des valeurs particulières aux variables de cet énoncé.

A => B
énoncé tiers

↗ ↖

A0 prémisses du pas déductif — B0 conclusion du pas déductif

Cette règle correspond, dans le langage des logiciens[3], à la règle de modus ponens qui serait appliquée à des prédicats avec " instanciation ". (Les logiciens formalisent ainsi cette règle :

''Si $A \Rightarrow B$ et A sont 2 propositions qui sont des théorèmes d'une théorie T alors B est aussi un théorème de la théorie T'' et ils écrivent ''si $T \vdash A \Rightarrow B$ et $T \vdash A$ alors $T \vdash B$'').

Pour étudier " techniquement " la mise en oeuvre de pas déductifs, nous avons demandé à des enseignants de collège et lycée de rédiger une démonstration de l'exercice

3 Cf. par exemple : CORI (R.) ET LASCAR (D.) (1994)

ci-dessous. Nous pouvons ainsi avoir accès à une manipulation d'énoncés écrits par des experts (l'expertise renvoyant à des pratiques existant dans les classes de mathématiques de collège et de lycée).

Exercice.

Soit ABC un triangle :

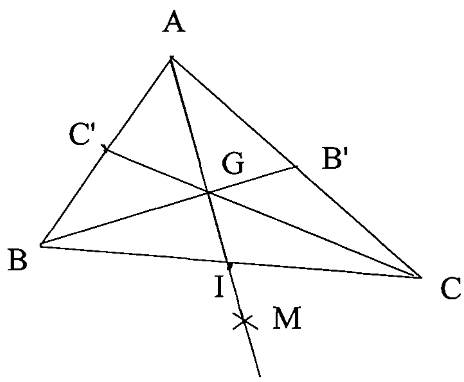
•B' le milieu de [AC] et C' le milieu de [AB]

•G le point d'intersection de (BB') et de (CC')

•M est le symétrique de A par rapport à G

•I est le point d'intersection de (BC) et (AM)

Montrer que I est le milieu de [BC]



Nous l'avons proposé également, en l'aménageant, à des élèves en début de troisième que nous avons considérés comme des " quasi-débutants " en démonstration puisqu'officiellement la pratique démonstrative ne commence à être exigible qu'en quatrième. Nous avons aménagé le problème en introduisant des questions intermédiaires de façon à alléger le travail heuristique, c'est-à-dire la charge de travail correspondant à l'organisation globale de la démonstration, ceci afin de nous centrer sur l'aspect " organisation locale ".

Ainsi nous avons ajouté au texte initial, les questions suivantes :

1° Montrer que G est le milieu de [AM]
2° Montrer que (C'G) est parallèle à (BM) et que (GB') est parallèle à (MC)
3° En déduire que BGCM est un parallélogramme et que I est le milieu de [BC].

Nous invitons le lecteur à nous suivre, pas à pas, dans l'étude menée. Comme cela peut s'avérer quelque peu fastidieux, et que l'étude des derniers pas déductifs n'ajoutent rien d'essentiel, à nos yeux, nous nous sommes limités à la présentation de l'étude faite relativement aux deux premiers pas déductifs.

II. Ce que nous apprend un pas déductif " anodin " : du côté des enseignants

Bien que d'apparence anodine, quasi-insignifiant, c'est le premier pas déductif, son examen, qui pour nous a été le plus productif. Ce pas est celui qui permet d'affirmer, en conclusion, que " G est le milieu de [AM] ".

II.1 Des locutions servant à montrer comment on manipule des énoncés

On peut remarquer que pour certains professeurs, ce pas peut aller de soi et que la conclusion peut être énoncée sans autre forme de procès.

C'est le cas en particulier d'enseignants de lycée qui dans leur rédaction ne manifestent pas qu'il y a là quelque chose à démontrer : *"Par construction, C' est le milieu de [AB] et G est le milieu de [AM]"* écrit l'un d'eux.

En revanche, les professeurs de collège, que nous avons interrogés, manifestent sous des formes diverses, qu'il y a là un pas déductif à faire. Pour l'un d'entre eux cependant, ce pas semble aller quasiment de soi, car il commence sa rédaction en rappelant les données du problème de la manière suivante :

"Données : *1) C' milieu de [AB]*
2) B' milieu de [AC]
3) M symétrique de A par rapport à G donc G milieu de [AM]"
(formulation 1 : F1)

"G milieu de [AM]" apparaît ainsi comme une donnée, quand bien même cela est déduit.

Les autres, dans leur ensemble, règlent rapidement la question en une phrase :

"Par hypothèse M est le symétrique de A par rapport à G, donc G est le milieu de [AM]".
(Formulation 2 : F2)

ou encore :

"Comme M est le symétrique de A par rapport à G, on peut dire que G est le milieu du segment [AM]".
(Formulation 3 : F3)

"Puisque M est le symétrique de A par rapport à G, alors G est le milieu de [AM]".
(Formulation 4 : F4)

"Je sais que M est le symétrique de A par rapport à G, donc G est le milieu de [AM]".
(Formulation 5 : F5)

Si M est le symétrique de A par rapport à G, alors G est le milieu de [AM]". (Formulation 6 : F6)

On peut faire plusieurs remarques d'ordre technique, en examinant ces six formulations :

- il n'y a que deux énoncés "manipulés" : "M est le symétrique de A par rapport à G" (notons le A) et "G est le milieu de [AM]" (noté B)

Le premier a le statut de *prémisse* du pas déductif. Ce statut est marqué par diverses expressions :

- "Par hypothèse..." (F2)
- "Comme..." (F3)
- "Puisque..." (F4)
- "Je sais que..." (F5)
- " Si ..". (F6)

Remarquons que dans la formulation (F1), l'énoncé A n'est pas précédé par une telle locution. *Sa place* dans la phrase, précédant la locution *donc* semble, à elle seule, suffisante pour marquer le statut de A.

Le second énoncé a un statut de conclusion (dans ce pas déductif). Ce statut est marqué par sa place après des locutions comme :

- donc... (F1, F2, F5)
- alors... (F4, F6)
- on peut dire que... (F3)

Nous avons ici une petite variété des expressions servant à marquer le statut des énoncés . On peut d'ores et déjà remarquer qu'il y a dans les phrases utilisées pour marquer un pas déductif, *deux niveaux de langages :*

-Les énoncés du langage mathématique mis en scène dans le problème à traiter.

Ici les deux propositions A et B : "M est le symétrique de A par rapport à G" et "G est le milieu de [AM]".

-Les locutions comme "On sait que", "donc" appartiennent à un second niveau de langage, dont la fonction est de montrer comment on manipule les énoncés du premier niveau de langage et ici comment on attribue des statuts à ces énoncés.

Comme le fait remarquer Duval, ces locutions ne sont donc pas à considérer comme des "connecteurs propositionnels" du langage mathématique lui-même, ce que l'on pouvait avoir tendance à faire, en particulier avec l'usage du "Si... alors... ".

Ces locutions ont une *fonction sémiotique*, pour reprendre l'expression de Chevallard : elles servent à montrer comment on manipule les statuts des énoncés de niveau 1, les uns relativement aux autres.

II.2 Un pas déductif sans énoncé-tiers ?

Il n'y a pas, dans ce premier pas déductif, de référence explicite à un énoncé-tiers. Ceci n'invalide pourtant pas ce que dit Duval, ou la modélisation des logiciens : il est clair, ici, qu'un énoncé-tiers existe, mais qu'il n'est pas mentionné. On peut se demander alors quel est cet énoncé-tiers, ou quelle forme il pourrait prendre : il ne s'agit pas de s'interroger sur l'idée exprimée par celui-ci (elle est clairement contenue dans le pas déductif), mais bien sur sa forme ; en effet, on peut se demander s'il n'y a pas à rechercher du côté syntaxique, des raisons permettant de comprendre pourquoi, ici, l'énoncé-tiers est implicite, alors que, comme nous le verrons plus loin, chez certains auteurs, dans d'autres pas déductifs, il est explicite .

C'est ainsi qu'on peut trouver dans un manuel de 5e [4] en vigueur aujourd'hui, la formulation suivante utilisée dans le chapitre sur la symétrie centrale.

"Le symétrique du point M par rapport à I est le point N tel que I soit milieu du segment [MN]".

ou encore dans un autre [5].

"Les point A et A' sont symétriques par rapport au point C lorsque C est le milieu du segment [AA']".

Ces énoncés sont accompagnés d'un schéma les illustrant.

Comme nous allons le voir, si l'on s'essaye à formuler le pas déductif en voulant marquer l'usage de trois propositions, on se trouve devant une difficulté technique pour exprimer clairement la façon dont se fait l'instanciation de l'énoncé-tiers.

---

4 Hachette : Math 5e - Collection "5 sur 5".

5 Hatier : Math 5^{e}, Collection Pythagore (1987)

Essayons, en utilisant la première forme de l'énoncé tiers...

On sait que M est le symétrique de A par rapport à G,

Or le symétrique du point M par rapport à I est le point N tel que I soit milieu du segment [MN].

Nous avons écrit ainsi les formules $T \vdash A(x_0)$ et $T \vdash A(x) \Rightarrow B(x)$ utilisées par les logiciens. Cependant, la forme de l'énoncé-tiers rend, ici, difficile la mise en évidence de l'opération de détachement qui permettrait d'affirmer $T \vdash B(x_0)$ à savoir que "G est milieu de [AM]".

Une première difficulté technique serait de régler l'appariement des lettres servant à désigner des points dans l'énoncé-tiers et dans l'énoncé-prémisse :

énoncé-prémisse		énoncé-tiers
A	$\longrightarrow$	M
G	$\longrightarrow$	I
M	$\longrightarrow$	N

On peut faire l'hypothèse que la non-référence explicite à un énoncé-tiers est une réponse à cette difficulté technique.

Ainsi, certains pas déductifs n'impliqueraient explicitement que la manipulation de deux énoncés, la structure du pas servant en quelque sorte à "évoquer" l'énoncé-tiers. Ce serait le cas lorsque l'énoncé-tiers, énoncé explicité dans une partie du cours auquel on pourrait faire référence, apparaît lui-même sous une forme *déjà* instanciée et renvoyant à la situation de son énonciation (par exemple, en référence aux lettres utilisées dans une figure accompagnant l'énoncé).

On pourrait s'essayer à produire un énoncé-tiers autorisant un usage explicite dans le pas déductif étudié ici::

"Un point est le symétrique d'un autre par rapport à un troisième lorsque le troisième est le milieu du segment formé par les deux premiers".

On pourrait alors écrire:

- On sait que M est le symétrique de A par rapport au point G,

Or un point est le symétrique d'un autre par rapport à un troisième lorsque le troisième est le milieu du segment formé par les deux premiers.

donc G est le milieu du segment [AM].

Cette forme d'énoncé autorise plus que la précédente l'explicitation de l'énoncé-tiers et l'ostension de son instanciation, mais on perd en "fluidité du discours". S'astreindre à expliciter, à chaque pas déductif, l'énoncé-tiers, rendrait la rédaction d'une démonstration longue, pesante, fastidieuse.

On pouvait se demander s'il n'y avait pas intérêt à écrire, dans une organisation du savoir de référence (le cours), les énoncés sous une forme non-instanciée, cette forme autorisant l'usage de l'énoncé comme énoncé-tiers dans un pas déductif. En fonction de ce qui précède, on peut nuancer la réponse: il y a sûrement intérêt à le faire avec un énoncé qu'on veut faire apparaître explicitement comme énoncé-tiers. Cependant, des formes instanciées apparaissent comme fonctionnelles, leurs usages conduisant à des rédactions de pas déductifs plus concises que celles où les énoncés-tiers sont explicités.

III. Ce que nous apprend le même pas déductif anodin : du côté des élèves

III.1 Des productions voisines de celles des enseignants

Vingt élèves étaient présents au moment de l'épreuve : parmi ceux-ci, 5 (25%) procèdent de façon analogue aux enseignants en se référant à une formulation de la définition du symétrique d'un point par rapport à un autre.

• " Si M est le symétrique de A par rapport à G alors G est le milieu de [AM] ".

" Comme M est le symétrique de A par rapport à G alors on peut donc dire que G est le milieu de [AM] ".

ou encore :

" D'après l'hypothèse (4) [l'élève a noté les différentes hypothèses du texte : " M symétrique de A par rapport à G " est noté dans l'hypothèse (4)], G est le milieu de [AM] ".

On peut dire de ces trois formulations qu'elles sont semblables à celles produites par les enseignants[6].

• " D'après l'hypothèse (4), je sais que G est le milieu de [AM], car lors d'une symétrie d'un point par rapport à un deuxième point, ce deuxième point est le milieu du segment formé par le point et son symétrique ".

Nous avons là un élève qui cite l'hypothèse, puis la conclusion et donne explicitement un *énoncé-tiers* lui permettant de justifier la déduction faite.

• " Si M est symétrique à A par rapport à G , alors G se trouve au milieu du segment [AM], donc G se trouve au milieu du segment [AM] "

Remarquons, ici, la distinction faite entre le " alors " et le " donc " ; la proposition " G se trouve au milieu du segment [AM] " appelée par " alors " est la conclusion d'une implication, sa reprise par le " donc " en fait une propriété dont on peut affirmer la vérité dans le problème posé (puisque la prémisse de l'implication est vérifiée par hypothèse), le " donc " sert ici à marquer l'opération de détachement.

On tient, peut-être ici, un complément d'explication permettant de comprendre la forme réduite d'un pas déductif, forme sans énoncé-tiers explicite.

En effet, si l'énoncé-tiers est, dans un texte de référence, sous une forme déjà instanciée : "si I' est le symétrique de I par rapport à A alors A est le milieu du segment [II']", les lettres utilisées peuvent être remplacées par d'autres, en particulier par celles utilisées dans le problème étudié :

"Si M est le symétrique de A par rapport à G alors G milieu de [AM]". Le contenu sémantique de l'énoncé n'est pas modifié, sa forme non plus. Un pas déductif pourrait alors s'écrire :

- si M est le symétrique de A par rapport à G alors G milieu de [AM] (A => B)
- or M est le symétrique de A par rapport à G (A)
- donc G milieu de [AM] (B).

6 Le fait de repérer les hypothèses par des numéros est une pratique de l'enseignant qui a la classe en responsabilité.

On retrouve la structure ternaire d'un pas déductif : le premier énoncé est une implication ; il signifie que si une condition est remplie, alors on a nécessairement la conséquence énoncée dans la conclusion ; le deuxième énoncé marque que la condition de l'implication est supposée réalisée. Dès lors, la conclusion qui apparaît dans le troisième énoncé est nécessairement réalisée (règle modus ponens).

Mais, on peut deviner que formellement, on peut aller vers plus de concision en formulant le pas déductif avec le maniement de deux énoncés :

"M est le symétrique de A par rapport à G, donc G milieu de [AM]", forme qui "implicite" ainsi l'énoncé-tiers mais que l'on peut quasiment lire dans la succession des deux énoncés.

Dès lors, on peut comprendre qu'un principe économique tend à montrer un pas déductif comme une structure binaire (manipulation de deux énoncés) alors même que fondamentalement, il implique trois énoncés. Ceci doit aussi permettre de comprendre la confusion faîte parfois entre l'implication (nouvel énoncé constitué à partir de deux énoncés initiaux) et la structure d'un pas déductif.

III.2 Où il apparaît un rapport non conforme à une organisation officielle des énoncés

Bien que nous intéressant, prioritairement, à la mise en forme technique des pas déductifs, il nous a paru pertinent de pointer un autre phénomène relevé par ce premier pas déductif: en effet, il apparaît que l'on peut faire l'hypothèse que les élèves manifestent un rapport non conforme à une organisation officielle des énoncés. C'est là, un phénomène déjà signalé par Annie Berté (1995) qui en usant des outils donnés par la notion de " transposition didactique " a déjà montré que l'absence de référence légitimant un ordre mathématique peut engendrer " une consistance mathématique insuffisante "[7].

Examinons ce qui se passe ici :

- Dix élèves sur vingt (50%), avec de nombreuses variantes, utilisent le fait que AG=GM comme conséquence de "M symétrique de A par rapport à G" et en déduisent que G est le milieu de [AM].

Exemples :

- D'après l'hypothèse (3), je sais que M est le symétrique de A par rapport à G donc AG = GM, donc G est le milieu de [AM].
- Si M est le symétrique de A par rapport à G donc AG = GM donc G est le milieu de [AM].

On peut penser qu'ainsi les élèves montrent la propriété qui, à leurs yeux, caractérise G comme milieu de [AM] à savoir : AG = GM (le fait que G point de (AM) allant de soi ici!).

Des élèves produisent "un énoncé-tiers non instancié" pour justifier la déduction permettant d'affirmer que AG = GM.

"Dans une symétrie par rapport à un point, les points sont à égale distance, de part et d'autre du point de symétrie, donc d'après l'hypothèse (3) et la propriété ci-dessous, je peux dire que G est le milieu de [AM]".

7 Berté (1995).

"D'après l'hypothèse (3) et d'après la propriété : - dans une symétrie, le point de symétrie se trouve à égale distance des 2 symétriques - donc G se trouve au milieu de [AM]".

"D'après l'hypothèse (3) et si un segment est le symétrique d'un autre segment, par rapport à un point, alors ces 2 segments sont isométriques, alors [AG] = [GM]. Conclusion : G est milieu de [AM]".

"G est le milieu de [AM] car M est le symétrique de A par rapport à G et l'on sait que la symétrie conserve les longueurs, donc le point G est le milieu de [AM]".

Les déductions ainsi produites sont correctes (en supposant que G un point de (AM) va de soi et n'a pas besoin d'être dit) ; cependant, elles ne sont pas "strictement conformes" à celles produites par les enseignants. On peut donc se demander pourquoi, et émettre plusieurs hypothèses.

- La version donnée aux enseignants ne comportait pas explicitement la question "démontrer que G est le milieu de [AM] et ainsi ils règlent rapidement ce point (pour certains cela va même de soi). En revanche, les élèves ont pu être surpris qu'on leur pose cette question et ont pu interpréter cette situation comme devant s'accompagner d'un petit discours plus "consistant" qu'un simple "M est le symétrique de A par rapport à G, donc G est le milieu de [AM]". Bref, la divergence des productions pourrait ainsi s'expliquer par un simple fait de circonstance, auquel cas il ne faudrait pas y attacher une très grande importance.

- En revanche, on peut aussi se demander si une autre explication ne serait pas liée aux rapports entretenus par les enseignants et par les élèves à *la cohérence du discours mathématique* et en particulier à *l'organisation ordonnée des énoncés mathématiques :* cette organisation va par exemple faire que l'on va choisir une définition de l'objet (parmi des candidats possibles) qui soit fonctionnelle pour le caractériser dans une démonstration, en déduire des propriétés (des théorèmes) dont certaines vont être caractéristiques de l'objet...

Ici, l'organisation déductive adoptée par les enseignants est cohérente avec le choix fait dans l'institution collège de la définition, sous forme d'énoncé, du symétrique d'un point par rapport à un autre : il suffit de se référer à la définition pour pouvoir déduire ici que G est le milieu de [AM] (puisque la définition le dit).

En revanche, dire que "M symétrique de A par rapport à G, que G est son propre symétrique et donc, comme une symétrie conserve les longueurs, que AG = GM, ce qui par définition du milieu permet alors d'affirmer que G est bien le milieu de [AM], car G point de (AM)" est certes correct logiquement, mais peut être qualifié de maladroit.

On peut se demander si pour les élèves l'objet "symétrique d'un point par rapport à un autre" n'est pas un objet doté de diverses propriétés (dont la conservation des longueurs), celles-ci n'ayant pas de statut particulier les unes par rapport aux autres.

Il se peut, en particulier, que le rôle d'une définition sous forme d'énoncé ne soit pas pour eux le même que pour les enseignants. Ainsi, on peut imaginer qu'une définition n'est qu'une façon commode de commenter une figure qui montre l'objet "symétrique d'un point" et non point l'énoncé de référence dont on va se servir pour déduire d'autres propriétés de l'objet.

Signalons que cinq élèves ont fourni des réponses autres, toutes erronées. Ce sont des élèves qui n'ont pas vu la déduction possible avec l'usage de la symétrie et qui ont produit d'autres inférences non conformes à celles attendues. Nous n'entreprendrons pas ici l'analyse de leurs productions (elle nécessiterait l'introduction d'autres outils et nous entraînerait dans un autre type d'étude)

IV. Un pas déductif avec énoncé-tiers

Si le premier pas était " anodin ", le second, quant à lui, ne l'est pas; c'est celui qui permet d'affirmer que (GC') est parallèle à (BM). On peut s'attendre à une référence au théorème de " la droite des milieux ".

Examinons quelques-unes des formulations utilisées par les enseignants (les élèves ayant répondu correctement à cette question ont usé de formes analogues).

Voici une des formulations utilisées :

- dans le triangle ABM on sait :

C' et le milieu de [AB]

G est le milieu de [AM]

D'après le théorème : "dans un triangle, une droite qui passe par les milieux de deux côtés est parallèle au support du troisième côté".

La droite (C'G) est parallèle à (BM).

Nous avons respecté la mise en page proposée par l'enseignant, car celle-ci, nous semble-t-il, contribue à mettre en évidence les trois énoncés du pas-déductif. L'énoncé-tiers "dans un triangle, ... troisième côté" est annoncé par la marque "d'après le théorème".

La conclusion du pas "la droite (C'G) est parallèle à (BM) n'est précédée par aucune marque linguistique, c'est sa position qui semble servir ainsi de marquage pour montrer son statut.

Nous sommes sûrement en présence de la forme la plus institutionnalisée d'un pas déductif en classe de quatrième : c'est celle qui formellement ressemble le plus à la modélisation des logiciens.

$T \vdash A(xo)$	*l'hypothèse* est clairement affirmée
$T \vdash (A(x) \Rightarrow B(x))$	la propriété du cours est mentionnée clairement
$T \vdash B(xo)$	la règle de modus ponens fonctionne et la conclusion est dite explicitement.

D'autres rédactions font apparaître des variantes dans le marquage des énoncés :

- variante de position

Voici une rédaction où c'est tout d'abord l'énoncé-tiers qui est écrit :

"Par le théorème des milieux : la droite passant par les milieux des deux côtés d'un triangle est parallèle au troisième côté", appliqué au triangle ABM, on a :

$$\left.\begin{array}{l} G \text{ milieu de } [AM] \\ C' \text{ milieu de } [AB] \end{array}\right\} \text{donc } (GC')\ //\ (BM)$$

- *une variante* où le statut de l'énoncé-hypothèse et de l'énoncé-tiers sont liés par la conjonction " et ".

Dans le triangle AMC, d'après les hypothèses précédentes et la propriété : "La droite qui passe par les milieux de deux côtés d'un triangle est parallèle au troisième côté" je peux affirmer que (GB') // (MC).

On trouve aussi une forme où l'énoncé-tiers est simplement cité de façon emblématique par son nom :

"Par construction, C est le milieu de [AB] et G est le milieu de [AM], donc d'après le théorème des milieux, la droite (C'G) est parallèle à (BM)".

Notons la position du "donc", avant l'évocation de l'énoncé-tiers.

On peut remarquer que conformément à ce que nous avons dit à propos du pas déductif précédent, la formulation de l'énoncé-tiers, sans instanciation des variables, autorise son explicitation. Malgré cela, et bien que la forme décrite ci-dessus d'un pas déductif soit la plus institutionnalisée, d'autres enseignants de collège procèdent différemment. L'énoncé-tiers n'est pas formulé en toute généralité, mais est en partie ou en totalité instancié. En voici des exemples :

- Cas où l'énoncé-tiers est en partie instancié

Soit le triangle AMC :
on a donc : G est le milieu de [AM]
et d'après l'énoncé, B est le milieu de [AC]
La droite (BB') passe par les milieux de deux des côtés, donc elle est parallèle au troisième côté : (BB') // (MC)

L'énoncé-prémisse de l'énoncé-tiers est instancié avec les données du problème. En revanche, la partie conclusion de cet énoncé (est parallèle au troisième côté) est formulée en toute généralité, comme dans l'énoncé de cours de référence. Il n'est instancié que dans la ligne suivante ; l'opération de détachement de la conclusion du pas se marque ainsi.

- Cas où l'énoncé-tiers est en totalité instancié

"Dans le triangle AMC, puisque la droite (GB) passe par le milieu (G) du côté [AM] et par le milieu B' du côté [AC], alors elle est parallèle à la droite (MC) qui porte le troisième côté, donc (GB) //(MC)".

La forme utilisée ici, s'apparente à celle utilisée dans le premier pas déductif. On y remarque la présence simultanée des marqueurs “ alors ” et “ donc ” : ce dernier marque l'opération de détachement de la conclusion, le “ alors ” en revanche est utilisé comme marqueur de l'implication formant l'énoncé-tiers.

En voici une autre variante :

"Dans le triangle ABM, la droite (C'G) joint les milieux C' et G de deux côtés du triangle. La droite (C'G) est donc parallèle à la droite (BM)".

Le mot *donc* est ici placé au milieu de l'énoncé-conclusion : il ne le précède donc pas nécessairement.

Ce pas déductif fait apparaître, comme on pouvait s'y attendre, explicitement l'énoncé-tiers concernant “ la droite des milieux ”. Cependant, sous la plume d'enseignants, on voit que cela n'est pas une stricte nécessité : la forme plus concise, avec instanciation spécifique au problème, apparaît également ici.

Nous avons analysé des productions d'enseignants et d'élèves relativement à deux pas déductifs assez contrastés, ceci en suivant le texte d'un problème. Nous ne présentons pas la totalité du travail d'analyse fait avec ce texte car cela impliquerait des redites ou nous conduirait à écrire des éléments bien connus, par ailleurs. Signalons simplement qu'il y a “ un pas incertain ”, celui permettant d'affirmer, par exemple, que

(BG)=(BB'). Certains enseignants, comme certains élèves affirment cette égalité sans justification, d'autres esquissent un pas déductif (B, G, B' alignés donc (BG)=(BB')). Nous sommes ici à la frontière de ce que " légitimement " au collège ou au lycée on peut s'autoriser à lire sur la figure. La frontière n'est pas placée strictement au même endroit par les uns et les autres, mais c'est là quelque chose qui ne devrait pas surprendre.

Sur ce point, on peut lire utilement le travail de Arsac[8] qui utilisant l'axiomatique de Hilbert montre quel serait le coût " déductif " d'une rigueur démonstrative qui voudrait se passer totalement de la lecture de certains résultats sur les figures.

IV. Conclusion

Nous avons examiné deux pas déductifs d'une démonstration, de façon technique en nous centrant sur la façon dont étaient manipulés des énoncés, ceux-ci étant considérés comme un dispositif autorisant une pratique. Nous avons invité le lecteur à nous suivre, pas à pas, dans cet examen, ce qui en rend l'exposé sûrement quelque peu fastidieux.

Il conviendrait de retravailler les pistes explorées sur d'autres protocoles pour en examiner le bien fondé. Nous retenons cependant les faits suivants :

- L'existence de deux niveaux de langage :

Les énoncés sont manipulés avec des statuts différents qui sont " prémisse, conclusion, énoncé-tiers ". Ces statuts sont marqués par des signes linguistiques comme " on sait que, si, or, donc... " et par leurs positions respectives dans la phrase. Il apparaît ainsi deux niveaux de langage : celui des énoncés mathématiques et celui des locutions qui servent à montrer comment on travaille avec les énoncés précédents. Comme le dit Duval, ces dernières ne sont donc pas des connecteurs logiques appartenant au même niveau de langage que les énoncés mathématiques manipulés, ce qui conduit à distinguer clairement un pas déductif d'une implication.

Remarquons que l'usage d'une locution ne suffit pas à assurer d'un maniement correct du statut d'un énoncé: nous avons pu vérifié que des élèves utilisant d'autres modes de raisonnement que l'inférence déductive, usent des mêmes locutions.

- Explicitation de l'énoncé-tiers :

L'énoncé-tiers constitutif d'un pas déductif est parfois explicite: c'est ainsi que l'on rencontre l'énoncé " la droite des milieux est parallèle au troisième côté ". Cependant, nous avons vu que, techniquement, la nature ternaire d'un pas déductif peut se donner à voir avec simplement l'écriture de deux énoncés. La mise en texte s'en trouve allégée et il est assez évident qu'on gagne en lisibilité. Il apparaît ainsi que l'énoncé-tiers sera " implicité " si son expression dans un savoir de référence est déjà instanciée.

• Si dans une classe donnée, un enseignant désire que les élèves mentionnent explicitement un énoncé-tiers dans un pas déductif, il convient, semble-t-il que cet énoncé ait un nom (c'est le cas du théorème de Pythagore, ou du théorème de Thalès) ou alors qu'il ait une forme non instanciée[9] dans le savoir de référence, c'est-à-dire ici dans le

8 Arsac(1996).

9 D'autres pratiques existent dans le savoir savant où des définitions, axiomes ou théorèmes sont codés selon une mise en texte du savoir (Cf. Bourbaki par exemple).

cours. (Il apparaît, cependant, que certains élèves savent produire des formes non instanciées d'énoncés).

Plus généralement, il convient, semble-t-il, lorsqu'on fait apparaître un objet mathématique ou certaines de ces propriétés, d'être attentif à la formulation en terme d'énoncés des définitions et propriétés, en pensant aux usages à venir, dans des démonstrations, de ces mêmes énoncés, prendre soin en quelque sorte du dispositif sur lequel va s'exercer les gestes de la démonstration. Si l'on se permet cette remarque, c'est que parfois, à la lecture de certains manuels actuels, ceci nous semble parfois un peu perdu de vue.

• Certains enseignants de quatrième semblent exiger de leurs élèves, pour marquer un pas déductif, l'explicitation d'un énoncé-tiers : c'est du moins ce que déclarent certains d'entre eux lors d'une enquête réalisée à l'Irem de Lyon par Germain[10]. Cette exigence nous apparaît abusive et devrait être restreinte à quelques pas déductifs, ceux-là mêmes qu'un énoncé-tiers explicite met en lumière dans une démonstration.

Bibliographie

ARSAC G. (1996). La démonstration : cours sur l'axiomatique de la géométrie in *Actes de l'U.E. " Formation de formateurs en didactique des mathématiques "* Ed. Irem de Clermont-Ferrand.

BERTE A. (1995). Premières notions de géométrie métrique, *RDM*, Vol.15.3, pp. 83-130.

CHEVALLARD Y. (1990-91). Dimension instrumentale, sémiotique de l'activité mathématique, *Séminaire de didactique des mathématiques et d'informatique,* Université J. Fourier, Grenoble, pp. 103-117.

CHEVALLARD Y. (1995-96). Les outils sémiotiques du travail mathématique, *« petit x »*, n° 42, pp. 33-57.

CORI R. et LASCAR D. (1994) . *Logique mathématique,* Tome 1, Masson.

DUVAL R. (1990). Pour une approche cognitive de l'argumentation, *Annales de didactique et sciences cognitives*, B, pp. 195-221.

DUVAL R. (1992-93). Argumenter, démontrer, expliquer : continuité ou rupture cognitive ? *« petit x »*, n° 31, pp. 37-61.

DUVAL R. (1993). Introduction à la démonstration et apprentissage du raisonnement déductif, *Repères*, n° 12, pp.114-143.

DUVAL R. (1994). Les différents fonctionnements d'une figure dans une démarche géométrique, *Repères*, n° 17.

GERMAIN G. (1996). Questionnaire sur l'implicite et l'évidence dans l'enseignement de la géométrie au collège, *Actes de l'U.E. " Formation de formateurs en didactique des mathématiques "* de Saint-Jean d'Angély, Ed. Irem de Clermont-Ferrand.

10 Germain(1996).