

**LU POUR VOUS :**  
**UN, DEUX, ... BEAUCOUP, PASSIONNEMENT !**  
**Les enfants et les nombres**

*COMITÉ DE REDACTION*

L'équipe INRP travaillant au niveau de l'école élémentaire vient de publier dans le numéro 21 de "Rencontres pédagogiques"\* un fascicule consacré aux activités développant les connaissances numériques des enfants de 5 à 8 ans.

En rapport avec les interrogations actuelles des enseignants sur le rôle et la place du nombre, notamment à l'école maternelle, l'équipe INRP fournit des éléments de réflexion issus de plus de trois années de recherches ainsi que des propositions d'activités. Vous trouverez dans les pages qui suivent un extrait significatif de cette brochure concernant l'apprentissage de la numération au cours préparatoire.

Les principaux points élaborés sont les suivants :

- les nombres, un outil pour l'enfant;
- des problèmes pour apprendre en GS et CP;
- observer pour comprendre et agir;
- les nombres, mémoire des quantités;
- les nombres, outil de gestion des quantités;
- la suite des nombres.

Le mérite de cette brochure est de montrer comment construire des situations didactiques permettant de prendre en compte les connaissances des enfants et de faire évoluer leurs procédures, en identifiant à chaque fois sur quels éléments l'enseignant peut agir.

Ce fascicule apporte ainsi un regard neuf sur les activités numériques à proposer aux élèves de grande section et cours préparatoire

\* Rencontres pédagogiques n°21  
 INRP, 29, rue d'Ulm 75005 PARIS

Nous devons l'idée et les développements pédagogiques de cette situation des carrelages à Michel RODES, professeur de mathématiques à l'Ecole Normale d'Albi. Michel nous a quittés. Le lecteur trouvera dans cet article un remarquable exemple de son grand talent pédagogique et de sa grande richesse intellectuelle.

## Les carrelages...<sup>1</sup>

### Présentation

#### Objectifs

- Différencier chiffre des dizaines et chiffre des unités dans l'écriture d'un nombre à deux chiffres.

- Prendre conscience que le nombre de dizaines compris dans une quantité se « voit » dans l'écriture du nombre qui exprime cette quantité : dans 25, il y a deux dizaines et cela se voit parce que l'écriture de 25 contient un 2 « à gauche »...

#### Matériel

- des rectangles quadrillés de différentes tailles faits en bristol ou en papier de couturière ; les mailles carrées ont 1,5 ou 1 cm de côté ;

- des carrés de bristol de 1,5 ou 1 cm de côté (suivant le quadrillage choisi pour les rectangles précédents) ;

- des assemblages de dix carrés (correspondants aux précédents), de différentes formes : bandes de dix carrés alignés, rectangles de  $5 \times 2$ ... que nous appellerons, par la suite, les « paquets de dix ».

#### Thème

Les rectangles sont présentés aux enfants comme des cuisines, des salles de bain, ou toute autre pièce d'une maison qu'il va falloir carreler. Pour cela les enfants devront aller chercher, puis, dans une deuxième phase, commander les carreaux nécessaires. Au fur et à mesure du déroulement, des contraintes seront imposées de manière à amener les enfants à utiliser, au maximum, les paquets de dix carreaux, jusqu'à ce que la commande fasse apparaître un nombre de paquets de dix équivalent au chiffre des dizaines du nombre total de carreaux de la pièce à carreler, et un nombre de carreaux isolés correspondant au chiffre des unités.

(1) Sur une idée de Michel RODES, Professeur à l'École Normale d'Albi.

L'activité comprend un aspect géométrique évident mais qui ne fait pas l'objet d'une attention particulière ici (même si ce point de vue peut être repris à un autre moment) : le choix des rectangles proposés aux enfants ou l'organisation géométrique des « paquets de dix » ne doivent pas apporter des difficultés parasites (voir annexe). On pourra, si nécessaire, suggérer aux enfants de découper les « paquets de dix » reçus, si la forme de ces « paquets » ne permet pas le pavage.

#### Variables didactiques

- La taille et la forme des « pièces » à carreler :

- rectangles effectivement carrelables à l'aide des « paquets » de dix proposés ou non (certains ne le sont pas pour des raisons géométriques),

- nombres de carrés variant entre 20 et 99.

- La disposition géométrique des « paquets » de dix :

- tous de même forme ( $2 \times 5$ ),

- plusieurs formes proposées :  $10 \times 1$ ,  $2 \times 5$ , assemblages non rectangulaires.

- Les contraintes sur le nombre de carreaux isolés :

- autant que l'on veut,

- moins de dix.

- La façon d'obtenir les carreaux :

- service direct,

- commande orale,

- utilisation d'un bon de commande (et manière de rédiger ce bon).

- Organisation du travail :

- travail individuel,

- groupes de deux,

- binômes de groupes de deux, etc. ;

- Mode de validation :

- la validation est faite par le groupe qui a fait la commande ou non,

- elle se fait par collage des carreaux.

#### Les différentes étapes de la situation

L'ensemble de l'activité se déroule sur cinq ou six séances et comprend quatre phases :

## **Phase 1 : Appropriation**

Les enfants vont travailler en groupes de deux. Chaque groupe reçoit une « pièce » quadrillée ; les paquets de dix carreaux sont disposés dans une boîte et les carreaux isolés dans une autre, ces deux boîtes sont placées sur une table accessible à tous les groupes.

*Séance 1* : elle a pour but de permettre aux enfants de se familiariser avec la situation et le matériel ;

La consigne suivante est donnée : « vous allez chercher, *en une seule fois*, juste ce qu'il faut de carrés pour recouvrir toute la pièce ; vous pouvez prendre des carrés isolés ou des paquets de dix carrés, comme vous voulez ; un seul des deux enfants du groupe se déplacera pour prendre lui-même les carreaux ». (Il n'y a pas de « vendeur ».)

Pendant la réalisation, le maître observe les conduites des enfants, et, en particulier :

- le recours au dénombrement initial ;
- l'attitude devant les boîtes ;
- l'utilisation des paquets de dix : les enfants y ont-ils recours ? Si oui, pensent-ils à les utiliser avant de se déplacer ? Ou bien se contentent-ils de les prendre sur place ?
- la mémorisation du nombre à prendre : n'y a-t-il des oublis ?

La validation se fait par calcul du nombre total de carreaux obtenus (est-il le même que le nombre compté au départ ?) ou par recouvrement de la pièce (ai-je juste ce qu'il me faut pour recouvrir la pièce ?) ; une mise en commun permet de mettre en évidence les réussites et les échecs et les raisons de ceux-ci.

*Séance 2* : Cette séance doit « contraindre » les enfants à utiliser des paquets de 10.

« Aujourd'hui, il y aura un vendeur : l'enfant chargé d'aller chercher les carreaux devra lui demander (oralement) ce qu'il veut, au lieu de se servir lui-même ; de plus, pour que chaque équipe puisse avoir assez de carreaux, le vendeur refusera de donner plus de neuf carrés isolés. »

L'obligation de demander les carreaux au lieu de les prendre amène les deux enfants du groupe à se mettre d'accord sur ce qui sera réclamé.

Le rôle du vendeur est fondamental dans cette partie et, de ce fait, pourra être joué par deux enfants responsables à la fois du respect des contraintes (en particulier sur le maximum de carreaux isolés) et de la satisfaction de la commande. Il y a lieu de prévoir la possibilité d'une deuxième commande orale pour les enfants qui n'auraient pas satisfait, dans un premier temps, à la contrainte du maximum de neuf carrés isolés. C'est aussi à ce moment qu'il peut être utile de rappeler ou de suggérer que les « paquets » commandés peuvent être découpés si nécessaire. Dans la phase d'analyse, les « vendeurs » seront amenés à faire part de ce qu'ils ont constaté.

Lorsque tous les groupes ont terminé, le maître fait observer quelques réalisations et analyser réussites et échecs ; il met particulièrement en évidence les erreurs de commandes dues à un oubli de ce qui avait été décidé par les deux enfants du groupe, de manière à motiver la phase suivante. Certains groupes (en particulier ceux qui ont rencontré des difficultés) sont invités à dire ce qu'ils ont effectivement commandé et comment ils ont pu ou non carreler leur cuisine.

## **Phase 2 : Utilisation de bons de commande**

En prenant appui sur les « oublis », s'il y en a eus..., ou en prétextant la nécessité de préparer les commandes pour gagner du temps..., le maître propose l'utilisation du BON DE COMMANDE à utiliser par chaque équipe pour le carrelage de chaque pièce différente : le bon sera remis au vendeur qui pourra ainsi préparer les commandes.

La forme et la formulation de ce bon peuvent être le fruit d'une recherche collective : que faut-il indiquer pour obtenir satisfaction ? pour pouvoir ensuite contrôler ?

Deux types de bons peuvent être proposés :

<p>Bon de commande n° 1</p> <p>Il me faut <input type="checkbox"/> carreaux</p> <p>Je commande :</p> <p><input type="checkbox"/> paquets de dix</p> <p><input type="checkbox"/> carrés</p> <p>Nom : _____</p> <p>Prénom : _____</p>	<p>Bon de commande n° 2</p> <p>Je commande :</p> <p><input type="checkbox"/> paquets de dix</p> <p><input type="checkbox"/> carrés</p> <p>Nom : _____</p> <p>Prénom : _____</p>	<p>Signature : _____</p>
---	---	--------------------------

Avec le premier bon de commande, on espère provoquer la mise en relation, par lecture « directe », du chiffre des dizaines du nombre total de carrés à commander et du nombre de « paquets de dix » ainsi que l'identité du chiffre des unités et du nombre de « petits carrés ».

A l'inverse, le deuxième bon de commande pourra permettre, à partir des indications sur le nombre de « paquets » et sur le nombre de carrés isolés, de retrouver le nombre total de carreaux nécessaires, puisque celui-ci n'est pas indiqué sur le bon.

Au cours de la séance les enfants reçoivent plusieurs pièces à carreler : le nombre de carreaux varie de 20 à 99.

Cette séance est reprise deux ou trois fois. A chaque fois le maître fait comparer quelques bons de commandes et les réalisations correspondantes.

### Phase 3 : Analyse

Cette phase a pour objectif d'amener les enfants à « passer commande », à partir du nombre total de carreaux nécessaires *sans disposer du quadrillage*.

Les groupes de deux enfants sont binômés : l'un des deux groupes, à son tour, indique à l'autre, le nombre total de carreaux dont il a besoin pour recouvrir la pièce qu'il a reçue ; l'autre groupe doit passer commande ; le premier groupe valide par calcul ou par recouvrement effectif. Les rôles sont ensuite inversés. Dans cette partie, on utilise les bons de commande du premier type qui permettent ensuite de vérifier l'adéquation de la commande.

### Phase 4 : Commandes groupées

Il s'agit, ici, d'un prolongement de l'activité vers l'addition et la mise en évidence, « en actes »..., de la retenue.

Les enfants sont de nouveau en groupes de deux. Chaque élève reçoit une pièce à carreler et doit rédiger son bon de commande ; un troisième bon est alors remis aux deux élèves qui doivent se mettre d'accord pour ne passer qu'une commande pour eux deux.

La réalisation du bon de commande amène parfois les enfants à commander un paquet de dix « en plus » et moins de petits carrés (c'est le cas de l'addition à retenue...) : si le premier commande 5 paquets et 8 carrés isolés, alors que le second désire 2 paquets et 7 isolés, la commande groupée se décrit d'abord comme : 7 paquets et 15 isolés, mais la contrainte du maximum de neuf carrés isolés amène à modifier la commande initiale qui devient 8 paquets et 5 carrés isolés.

A l'inverse, lorsque les enfants reçoivent les paquets et les carrés isolés, ils rencontrent une difficulté dans le partage : un paquet doit être découpé (ou échangé) pour pouvoir être réparti sur les deux pièces à carreler : si on reprend l'exemple précédent, on voit que les enfants peuvent prendre chacun le nombre de dizaines nécessaires (5 pour l'un et 2 pour l'autre) mais qu'ils doivent « défaire » (par découpage ou par échange) la dizaine restante.

### Commentaires

• Comme nous l'avons souligné plusieurs fois, l'aspect géométrique de la situation ne doit pas devenir omniprésent. Dans certains groupes, cependant il devient la source principale de la prise d'information ; dans ce cas on peut suggérer aux enfants de commencer par compter le nombre de carreaux nécessaires, puis de travailler uniquement sur ce nombre, sans utiliser davantage le rectangle initial, jusqu'à réception de la commande et validation ; la suppression du matériel au moment de la rédaction du bon de commande ne peut se faire qu'après une bonne appropriation de la situation

(garantie du sens) et à condition de disposer de la capacité de comptage de dix en dix. En effet, lorsque les enfants ne disposent que du nombre total de carreaux, 58 par exemple, ils ne peuvent plus se représenter l'apport d'une dizaine et ne peuvent donc que « comptabiliser » ces dizaines jusqu'à approcher le nombre en question : « 10, 20, 30, 40, 50, et après 51, 52, ...58 ». Ceci demande en fait, un double comptage des dizaines, suivi d'un double comptage des unités... C'est bien sûr en l'absence du rectangle de référence, que l'on verra le mieux le moment où l'enfant « voit » qu'il faut 5 dizaines et 8 unités, sans comptage de dix en dix, par lecture directe sur le nombre.

• L'utilisation du bon de commande est un bon déclencheur pour beaucoup d'enfants à condition de n'intervenir qu'après une parfaite compréhension de la situation.

• Nous n'avons pas indiqué, dans le déroulement proposé, les moments d'évaluations parce qu'ils ne peuvent être programmés abstraitement. Une partie de l'évaluation peut se faire dans l'action : c'est celle que nous avons indiquée comme venant de l'observation directe du maître. L'autre nécessite un travail plus individualisé :

— ce peut être, par exemple, le contrôle d'une tâche identique : chaque enfant reçoit un rectangle (différent de ses voisins) à carreler tout seul ;

— ou bien l'analyse d'une commande fictive :

« Michel a 53 carreaux sur sa cuisine, il a commandé 5 paquets de dix et 3 carrés ; peut-il recouvrir sa cuisine ? »

« Carole a 42 carreaux sur sa cuisine, elle a commandé 3 paquets de dix et 12 carrés ; peut-elle recouvrir sa cuisine ? a-t-elle bien commandé ? »

« Benjamin a 68 carreaux dans sa cuisine ; il a commandé 6 paquets de dix et 5 carrés ; peut-il recouvrir sa cuisine ? »

A l'inverse, on peut proposer la tâche suivante : « Je commande 4 paquets de dix et 5 carrés ; combien de carreaux y a-t-il dans ma cuisine ? » (avec variante sur les nombres).

Dans une classe de 20 enfants, nous avons proposé, à la sixième séance et avant la phase 4, le contrôle suivant :

— Marie a commandé 3 paquets de dix et 6 carrés ; combien y a-t-il de carreaux dans sa cuisine ?

— Nathalie a commandé 7 paquets de dix et 2 carrés ; combien y a-t-il de carreaux dans sa cuisine ?

— Eric a commandé 8 carrés ; combien y a-t-il de carreaux dans sa cuisine ?

— Isabelle a commandé 6 paquets de dix ; combien y a-t-il de carreaux dans sa cuisine ?

Pratiquement, chacune des phrases précédentes étaient présentées comme les bons de commande utilisés par les enfants :

<p>Isabelle a commandé :</p> <p><input type="checkbox"/> paquets de dix</p> <p>et</p> <p><input type="checkbox"/> carrés</p> <p>Il y a .... carreaux dans sa cuisine.</p>
---

Sur vingt enfants présents

— treize n'ont fait aucune erreur ;

— cinq ont fait une erreur :

deux ont écrit 80 au lieu de 8,

deux ont écrit 6 au lieu de 60,

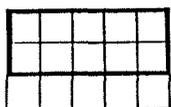
un a écrit 78 au lieu de 72 ;

— deux enfants ont fait trois erreurs.

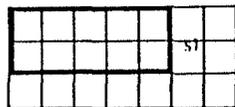
### Annexe : Aspect géométrique de la situation « Carrelages... »

Les objectifs de l'activité « Carrelages... », étant nettement centrés sur une prise de conscience de l'information qu'apporte l'écriture chiffrée des nombres (numération), il nous a vite paru indispensable de ne proposer aux enfants que des rectangles pour lesquels l'usage des « paquets de dix » correspond à un découpage effectif du nombre total de carreaux en dizaines et unités, ce qui n'est pas le cas de tous les rectangles. Ainsi, alors que convient le rectangle  $5 \times 3$  pour lequel

il faut utiliser un « paquet de dix » (proposé sous la forme d'un rectangle  $5 \times 2$ ) et cinq carrés isolés de manière à recouvrir ses 15 carrés (1 dizaine et 5 unités), il n'en est pas de même pour un rectangle tel que  $7 \times 3$  : les 21 carrés de ce rectangle sont facilement recouverts par un « paquet de dix » ( $2 \times 5$  mais les carrés restant (onze) ne présentent pas une forme géométrique permettant la formation aisée d'un nouveau « paquet de dix ». Autrement dit, devant un rectangle  $7 \times 3$ , les enfants auront tendance, s'ils observent le rectangle, à commander (avec raison), 1 « paquet de dix » et 11 carrés, alors que nous souhaitons voir qu'ils puissent voir que l'écriture du nombre total de carré — ici, 21 — les amènent à commander 2 « paquets de dix » et un carré isolé.



$$5 \times 3 = 15 \\ = 1 \times 10 + 5$$



$$7 \times 3 = 21 \\ = 1 \times 10 + 11$$

Pour éviter de placer imprudemment les enfants devant des rectangles impossibles à carreler avec les contraintes imposées, ou simplement non adéquats à nos objectifs, nous proposons la classification suivante (pour des rectangles dont les dimensions restent inférieures ou égales à dix, ce qui n'est pas une nécessité de la situation) :

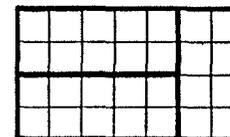
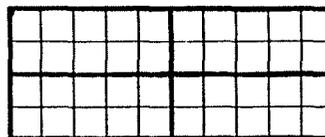
### 1 - Rectangles adéquats

Ce sont les rectangles pour lesquels l'utilisation d'un maximum de 9 carrés isolés est non seulement possible pratiquement mais encore induite ;

- certains ne peuvent être recouverts que d'une seule façon ; ce sont :

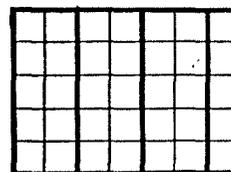
- tous les rectangles dont la mesure d'un des côtés est 2 ;

—  $(3 \times 5)$   $(3 \times 6)$   $(4 \times 5)$   $(4 \times 6)$   $(4 \times 7)$   $(4 \times 10)$

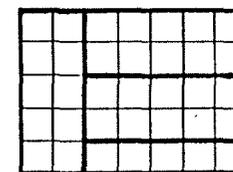


- d'autres peuvent l'être de plusieurs manières (mais qui restent en lien avec la numération) :

$(5 \times 5)$   $(5 \times 7)$   $(5 \times 9)$   $(6 \times 6)$   $(6 \times 8)$   $(7 \times 7)$



$$5 \times 7 = 35 \\ = 3 \times 10 + 5$$

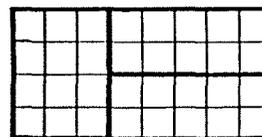


Ces rectangles pourraient n'être proposés que dans une deuxième phase.

### 3 - Rectangles à éviter

Ce sont les rectangles pour lesquels toute forme de « paquets de dix » ( $2 \times 5$  ou  $1 \times 10$ ) est inadéquate :

$(3 \times 4)$   $(3 \times 7)$   $(3 \times 8)$   $(3 \times 9)$   $(3 \times 10)$   $(4 \times 4)$   
 $(4 \times 8)$   $(4 \times 9)$   $(8 \times 8)$   $(8 \times 9)$   $(9 \times 9)$

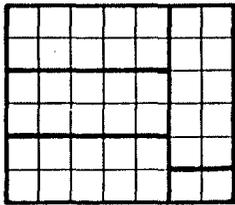


$$4 \times 8 = 32 \\ = 2 \times 10 + 12$$

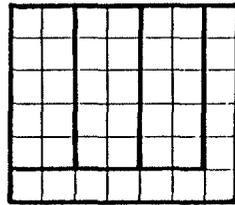
## 2 - Rectangles-pièges

Ce sont des rectangles qui peuvent être carrelés de plusieurs manières, l'une au moins n'ayant pas de lien avec la numération :

(5 × 6) (5 × 8) (5 × 10) (6 × 7) (6 × 9) (6 × 10)  
(7 × 8) (7 × 9) (7 × 10) (8 × 10) (9 × 10)



$$\begin{aligned} 6 \times 7 &= 42 \\ &= 4 \times 10 + 2 \end{aligned}$$



$$\begin{aligned} 6 \times 7 &= 42 \\ &= 3 \times 10 + 12 \end{aligned}$$