STATUT DES LETTRES ET NOTION DE VARIABLE

Pierre-Emmanuel GERMI
PLC2, IUFM de Grenoble[1]
Avec la collaboration d'Annie BESSOT

Introduction

En début d'année, dès que j'ai su que j'avais en charge une classe de troisième je me suis penché sur le programme officiel du collège et plus particulièrement sur celui de la classe de troisième. En ce qui concerne les fonctions au collège une constante des programmes est qu'il faut au travers de "certains travaux familiariser les élèves avec des situations qui mettent en jeu des fonctions. Toute définition de la notion de fonction sera évitée, mais des expressions telles que "en fonction de", "est fonction de" seront utilisées".

En quatrième les fonctions linéaires, puis en troisième les fonctions affines sont étudiées en détail, mais le souci de ne pas donner de définition de la notion de fonction reste présent. C'est seulement en classe de troisième que les programmes suggèrent d'introduire prudemment la notation f(x). À partir de la seconde, la notion de fonction devient officiellement (dans les programmes) un objet d'enseignement.

Par ailleurs, on trouve très peu de directives dans le programme sur l'utilisation des lettres en mathématiques. La notation f(x) nécessite pourtant d'avoir un minimum de connaissances sur la notion de variable : or cette notion n'est jamais mentionnée dans le programme de troisième. Curieusement cette notion devient fondamentale dans le programme de seconde : "un objectif important est d'amener les élèves à une meilleure maîtrise de l'emploi de variables, à travers l'étude d'exemples où elles expriment des quantités dont la signification est clairement perçue ; les travaux se développeront dans les directions suivantes : substitution de nombres à des variables (utilisation d'expressions littérales pour des calculs numériques, tableaux de valeurs de fonctions...), mise en équation de problèmes et description de phénomènes continus à l'aide de fonctions".

[1] Cet article a pour base le mémoire professionnel P-E. Germi (année 1996-97)

Une de mes préoccupations fut alors d'interpréter ce que j'avais lu et d'amorcer une réflexion sur des situations dans lesquelles la notation f(x) pourrait prendre une signification fonctionnelle sans en faire un objet d'enseignement.

II. Problématique

II.1. La notion de fonction comme variation

Comme on peut le lire dans l'article de René de Cotret (1988), la notion de fonction était à l'origine intimement liée à la notion de variation, mais au fil des années cette notion s'est transformée tant dans sa forme (différentes définitions) que dans son fond (concepts et éléments auxquels elle est reliée). L'évolution constante des définitions vers des définitions de plus en plus abstraites, épurées et formelles, a conduit avec l'avènement des mathématiques ensemblistes aux définitions suivantes :

- Une fonction f d'un ensemble A dans un ensemble B est une règle de correspondance qui associe à chacun des éléments de A un et un seul élément de B.
- Une fonction f de A dans B est un sous-ensemble du produit cartésien $A \times B$ tel que pour chaque $a \in A$ il y a exactement un $b \in B$, tel que $(a, b) \in f$.

Ces définitions faisaient disparaître la notion de variable, ainsi que les aspects variation et dépendance qui étaient originellement les éléments de base de la notion de fonction.

Il suffit pourtant de revenir quelques années en arrière pour retrouver l'idée de variation et la notion de variable dans les définitions des fonctions. En voici deux exemples :

- " Une quantité est dite fonction d'une variable indépendante lorsque sa valeur dépend de celle que l'on attribue à cette variable." (Cours d'algèbre élémentaire, FEC, Mtl, 1961, p.159)
- " Considérons l'égalité : $y = 2x + 3$. Le nombre variable x peut prendre diverses valeurs et, quelle que soit la valeur donnée à x, nous saurons calculer la valeur correspondante de y. Nous dirons encore que y est fonction de la variable x." (Mathématiques, Hachette, 1939, p.315)

La notion de variation des quantités est primordiale dans ces deux définitions, on y retrouve aussi celles de dépendance et de correspondance. Plus on regarde les définitions anciennes, plus les notions de variable ou de variation des quantités sont au centre de la notion de fonction.

Selon René de Cotret, la seule notion de correspondance ne permet pas aux élèves d'accéder intuitivement à un premier concept de fonction ; l'enseignement de la notion de fonction gagnerait beaucoup de l'adjonction des notions de variation et de dépendance.

Aujourd'hui l'élève doit passer de l'acception triviale de la notion de fonction à la définition mathématique de la fonction (classe de seconde). Dans tous les manuels [2] consultés, la notation f(x) est couramment utilisée, de nombreux exercices font appel aux concepts de fonction, de variable et à la notation f(x) : ce sont principalement des exercices

2. Nous avons examiné les manuels suivants : IREM de Strasbourg 3ème (Istra), Mathématiques 3ème Delord, Terracher, Vinrich (Hachette), Pythagore 3ème (Hatier).

dans lesquels on demande aux élèves d'exprimer certaines grandeurs relatives à une figure géométrique, en fonction d'une autre grandeur inconnue et notée x. Jusqu'en troisième, l'élève travaille donc sur des grandeurs dépendantes : les changements de l'une induisent les changements de l'autre, ce qui exclut pratiquement des problèmes où la fonction est constante : sans variation peut-on caractériser la dépendance ? À cette question je répondrai comme René de Cotret : "le seul moyen de s'apercevoir qu'une chose dépend d'une autre c'est de les faire varier chacune à leur tour afin de constater quel effet a la variation, mais tant et aussi longtemps qu'il n'y aura pas de variation, il sera presque impossible de savoir s'il y a dépendance."

II.2. À propos de vocabulaire

Le vocabulaire relatif à la notion de fonction au collège est sous-tendu par des problématiques différentes auxquelles on peut associer différents statuts de la lettre.

- Exprimer $\mathcal{A}$ [3] "à l'aide de" x : ce type de formulation est rarement utilisé. Il peut être réservé aux situations où l'élément x est un nombre fixé inconnu, c'est à dire quand l'idée de variation n'est pas présente dans la situation qui est proposée (Capponi, B. et Clarou, P., 1984).

- Exprime $\mathcal{A}$ "en fonction de" x : en opposition à "à l'aide de ", cette formulation respecte une constatation de variation et peut n'être utilisée que dans les situations où l'élément x prend successivement plusieurs valeurs. Les lettres $\mathcal{A}$ et x ont déjà à ce stade le statut de variable.

- $\mathcal{A}$ "est fonction de" x : en succédant à "en fonction de", cette nouvelle formulation n'est en fait qu'une étape pour amener progressivement les élèves à utiliser " est une fonction de" x. Le statut des lettres $\mathcal{A}$ et x reste inchangé.

- $\mathcal{A}$ " est une fonction de" x : Si l'utilisation des expressions précédentes est conseillée dans les programmes du collège, l'expression "une fonction de" prend son sens à partir du moment où la fonction a été définie en tant qu'objet mathématique, c'est à dire conformément aux programmes, à partir de la seconde. Cette expression n'a plus pour but de traduire une dépendance entre deux grandeurs $\mathcal{A}$ et x, mais bien de définir un objet mathématique, la fonction, par la mise en relation de deux variables appartenant pour chacune d'elles à un ensemble défini de nombres. Avec la définition de la fonction, il n'y a plus deux objets (les deux variables), mais trois, associés à des notations distinctes : la fonction notée $\mathcal{A}$, l'image notée $\mathcal{A}(x)$ et l'antécédent x. Le statut de la lettre $\mathcal{A}$ a par conséquent changé : $\mathcal{A}$ est une fonction et non plus une variable. $\mathcal{A}(x)$ prend le statut d'une variable, dépendante d'une autre variable x.

II.3. Différents statuts possibles pour des lettres dans la classe de mathématiques

a - Pour désigner

Les élèves qui entrent au collège ont déjà eu, pour la plupart, l'occasion à l'école primaire d'utiliser les lettres dans l'enseignement des mathématiques. En sixième les

---

3 Nous utilisons dans cet article la lettre $\mathcal{A}$ plutôt que f

élèves vont continuer à employer les lettres pour désigner une dimension (longueur, largeur, hauteur, etc.) dans les formules de calcul de périmètres, d'aires, ou bien pour désigner des objets géométriques simples (points, droites, cercles, angles). La lettre dans ce type de situations est un outil de désignation.

b - Dans le calcul algébrique

À partir de la sixième, les opérations à trou sont progressivement remplacées pour aboutir en classe de cinquième à des équations où le nombre manquant est désigné par une lettre. La lettre est alors considérée comme un nombre inconnu. "A ce stade réside une réelle difficulté didactique : en désignant le nombre inconnu par une lettre, on le manipule, de fait, comme s'il était connu. Les nombres manquants sont pensés comme des nombres précis, désignés provisoirement par des lettres de façon à ce que notre ignorance initiale ne nous empêche pas de les faire participer au calcul." (Boujaddi M., 1996).

Avec l'apparition de résolution d'équations plus complexes en quatrième, nécessitant d'enchaîner des opérations élémentaires sur des expressions littérales, les lettres prennent un nouveau statut : "elles prennent alors un statut d'indéterminées au sens où elles n'ont plus besoin pour ces manipulations de représenter un nombre." (Boujaddi M., 1996).

c - Dans le cadre fonctionnel

Jusqu'à la classe de quatrième la lettre est rarement vue en référence à un ensemble de nombres. A partir de cette classe, avec l'étude des fonctions linéaires, la notion de variable est touchée du bout des doigts par les élèves. L'utilisation de tableaux et de graphiques, obligent à considérer les lettres comme des nombres inconnus qui ne sont pas fixes. Un enjeu de la classe de troisième est alors d'amener les élèves à ne plus considérer une lettre comme définie par la valeur d'un nombre inconnu, mais *comme définie par son appartenance à un ensemble connu de nombres*, c'est à dire en tant que variable.

II.4. Questionnement

Le statut de la lettre et par conséquent la notion de variable sont absents comme objet d'enseignement des programmes comme des manuels. L'enseignement des différents statuts de la lettre n'est donc, en général, pris en charge par personne puisque le professeur, déjà contraint par la lourdeur des programmes, ne prend pas de sa propre initiative la charge de cet enseignement. L'élève ne peut pas alors se retourner vers les manuels, car eux non plus, ne traitent pas du sujet. Les élèves ont donc la responsabilité de cet apprentissage. On peut ainsi douter que dans ces conditions ils réussissent à concevoir facilement différents statuts pour les lettres, qui pourtant sont indissociables des calculs algébriques et de la notion de fonction.

Il m'a donc paru important d'essayer de répondre aux questions suivantes :

- Quelles sont les difficultés des élèves relativement au statut des lettres et en particulier en ce qui concerne le statut de variable ?

- Peut-on construire des situations qui puissent prendre en charge l'enseignement de la notion de variable et simultanément donner une signification fonctionnelle à la notation f(x) ?

Nous avons tenté de faire des choix de situations en relation avec ces deux questions pour une ingénierie d'enseignement relative à la deuxième question.

III. Description de l'expérimentation

L'expérimentation s'est effectuée au collège Les Saules, dans ma classe la troisième A[4], sur deux jours (07/03/97 et le 08/03/97).

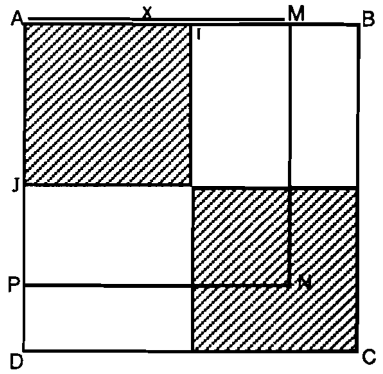
Elle a comporté trois parties.

III.1. Première partie : exercice initial

Le problème suivant [5] est posé aux élèves :

ABCD est un carré de côté 10 cm dont une partie est hachurée comme indiqué par le dessin. On construit un carré AMNP, M étant un point du segment [AB], tel que AM = x. I est le milieu de [AB], et J celui de [AD].

Exprimer l'aire $\mathcal{A}$ de la partie hachurée située à l'intérieur du carré AMNP quand M varie sur le segment [AB].



Les élèves doivent répondre directement sur la feuille d'énoncé.

Commentaire :

Ce premier exercice devait me permettre d'analyser les modes de raisonnement des élèves : étaient-ils capables, sans avoir eu aucun enseignement sur la notion de variable, de concevoir une lettre comme une variable, c'est à dire comme désignant un nombre indéterminé appartenant à un ensemble déterminé de nombres - un intervalle ?

Des réponses attendues (justes) sont :

si $0 \leq x \leq 5$ alors $\mathcal{A} = x^2$; si $5 \leq x \leq 10$ $\mathcal{A} = x^2 - 5(x - 5) - 5(x - 5)$

si $0 \leq x \leq 5$ alors $\mathcal{A} = x^2$; si $5 \leq x \leq 10$ $\mathcal{A} = 25 + (x - 5)^2$

si $0 \leq x \leq 5$ alors $\mathcal{A} = x^2$; si $5 \leq x \leq 10$ $\mathcal{A} = x^2 - 10x + 50$

Si on fait l'hypothèse que les élèves ne perçoivent pas le caractère particulier du dessin et encore moins le caractère de variable de $\mathcal{A}$ et de x, des réponses possibles sont :

$\mathcal{A} = 25 + (x - 5)^2$; $\mathcal{A} = x^2 - 5(x - 5) - 5(x - 5)$; $\mathcal{A} = x^2 - 10x + 50$.

L'information "M varie sur le segment [AB]" ne suffit pas alors pour induire chez eux l'idée d'exprimer $\mathcal{A}$ de façon différente suivant que $0 \leq x \leq 5$ ou que $5 \leq x \leq 10$.

4. Cette classe est considérée comme "difficile" dans l'établissement : elle est composée de 20 élèves.

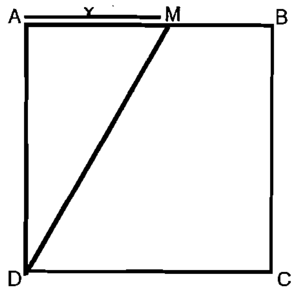
5. D'après "Activité ... Carré" par Clapponi (1995)

III.2. Deuxième partie

Cette deuxième partie a été conçue comme une première séquence d'enseignement des notions de variable, variables indépendantes et dépendantes, et de la notation f(x). Elle comporte cinq étapes.

a - Première étape (feuille 1)

Le problème suivant [6] est posé individuellement aux élèves sur une première feuille :



ABCD est un carré de côté 8 cm et M un point du segment [AB], tel que AM = x.

Exprimer l'aire $\mathcal{A}$ du quadrilatère MBCD quand M varie sur le segment [AB].

Les élèves doivent répondre directement sur la feuille d'énoncé.

Commentaire

Pour l'expression de $\mathcal{A}$ les réponses escomptées sont :

1 - $\mathcal{A} = \dfrac{(MB + CD)\times AD}{2}$; $\mathcal{A} = \dfrac{[(8 - x) + 8]\times 8}{2}$; $\mathcal{A} = 4[(8 - x) + 8]$

2 - $\mathcal{A} = MB\times AD + \dfrac{MA\times AD}{2}$; $\mathcal{A} = (x - 8)\times 8 + \dfrac{x\times 8}{2}$; $\mathcal{A} = 8(x-8) + 4x$

3 - $\mathcal{A} = AB^2 - \dfrac{AM\times AD}{2}$; $\mathcal{A} = 8^2 - \dfrac{x\times 8}{2}$;

4 - $\mathcal{A} = 64 - 4x$

Les quatre types de réponses ci-dessus sont équivalents algébriquement ; par contre ils sont non équivalents sémantiquement. En effet, pour obtenir les réponses 1, on utilise la formule de l'aire d'un trapèze, et pour obtenir les réponses 2 et 3, on utilise respectivement la somme ou la différence de deux aires. Quant à la quatrième réponse elle peut être obtenue uniquement après un travail algébrique sur les réponses précédentes.

b - Deuxième étape (feuille 2)

Chaque élève de la classe choisit une valeur de $\mathcal{A}$ et l'écrit sur la feuille 2 fournie par le professeur (voir annexe 1). Après avoir ramassé ces feuilles, le professeur recopie les valeurs de $\mathcal{A}$ choisies par les élèves dans un tableau à deux colonnes qu'il affiche (voir ci-après), puis redistribue les feuilles 2 aléatoirement (en évitant de redonner à un élève la feuille qu'il vient de rendre).

6. Pour le problème, je me suis inspiré de l'exercice 3 (p. 85) issu du chapitre sur les fonctions affines (Chap.5), du manuel : Mathématiques $3^{\text{ème}}$ (Hachette).

Par exemple :

A	x
24	
32	
40	
44	
68	
76	

Tableau affiché

S'il n'y a pas de valeur aberrante de $\mathcal{A}$; le professeur impose deux valeurs de $\mathcal{A}$ aberrantes. Par exemple $\mathcal{A}$= 28 et $\mathcal{A}$ = 80.

Chaque élève doit alors déterminer la valeur de x correspondant à la valeur de $\mathcal{A}$ mentionnée sur la feuille. Puis il doit placer le point M correspondant à la valeur de x déterminée, sur le carré ABCD de côté 8 cm qui lui est proposé sur la feuille.

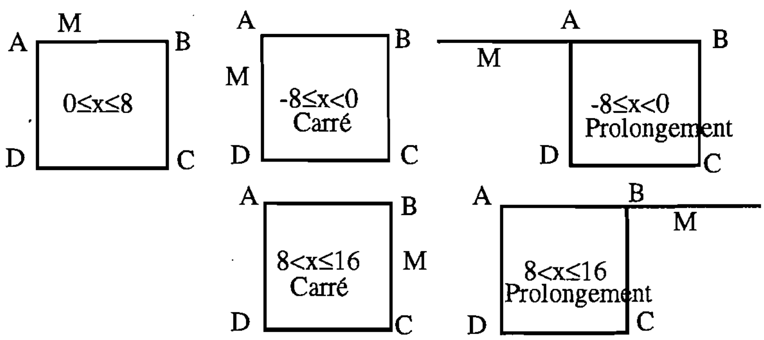
Commentaire

La recherche de x revient à résoudre l'équation $64 - 4x = \mathcal{A}$, où $\mathcal{A}$ est un nombre connu. Suivant les réponses obtenues par les élèves on peut s'attendre à ce que certains d'entre eux soient capables d'affirmer que telle solution est possible ou impossible.

Dans les deux cas où x est négatif ou supérieur à 8, la question du placement de M peut permettre une telle rétroaction. On distinguera alors les types de réponses suivantes :

- M est impossible à placer (avec justification)
- M est impossible à placer (sans justification)
- M est possible à placer (réponse fausse)

Pour ces réponses, nous avons schématisé ci-dessous les différents placements de M : par exemple si x a une valeur comprise entre 8 et 16, M peut être placé entre B et C (réponse codée "Carré") ou sur le prolongement de AB du côté de B (réponse codée "Prolongement")



c - Troisième étape

Le professeur ramasse les feuilles et recopie dans le tableau affiché les valeurs de x en face des valeurs de A correspondantes.

Par exemple :

A	x
24	10
32	8
40	6
44	5
68	-1
76	-3

d - Quatrième étape (feuille 3)

Le professeur distribue la feuille 3 (voir annexe 2), sur laquelle figure un tableau vide. Les élèves doivent recopier individuellement dans ce tableau les valeurs de $\mathcal{A}$ et de x du tableau affiché. Puis ils doivent répondre aux questions suivantes :

- Y-a-t-il des valeurs qui ne conviennent pas ?
- Donner la plus petite, et la plus grande valeur que peut prendre x.
- Que peut-on dire de la valeur de x ?
- Faites le plus de remarques possibles sur la valeur de $\mathcal{A}$.

Commentaire

A la question "Y-a-t-il des valeurs qui ne conviennent pas ?" on espère obtenir une majorité de réponses positives, et obtenir différents types de justification :

- M est un point du segment [AB]
- $A \leq M \leq B$
- $0 \leq x \leq 8$.

Les réponses attendues à la question "Donner la plus petite, et la plus grande valeur que peut prendre x" sont :

- la plus petite valeur possible de x est 0 ; la plus grande valeur possible de x est 8,
- la plus petite valeur de x est la plus petite valeur du tableau pour x et la plus grande valeur de x la plus grande valeur du tableau pour x ;
- la plus petite valeur de x est la plus petite valeur positive du tableau pour x ; la plus grande valeur de x est la plus grande valeur positive du tableau pour x.

A la question "Que peut-on dire de la valeur de x" on attend les réponses :

- x est compris entre 0 et 8
- x est positive car une longueur est toujours positive

La question "Faites le plus de remarques possibles sur la valeur de $\mathcal{A}$." a été volontairement posée de façon très ouverte de manière à obtenir le maximum d'informations sur le rapport des élèves à la "variable" $\mathcal{A}$. Les élèves seront-ils à même d'effectuer un retour sur les valeurs du tableau qui ne conviennent pas ? Prendront-ils l'initiative de barrer les valeurs de $\mathcal{A}$ non comprises entre 32 et 64 dans le tableau ?

e - Cinquième étape : synthèse

Suite à cette seconde partie, le professeur fait la synthèse suivante :
"x varie et prend des valeurs quelconques entre 0 et 8 puisque M varie sur [AB] ;

$\mathcal{A}$ varie également et prend des valeurs quelconques entre 32 et 64, on dit alors que x et $\mathcal{A}$ sont deux variables."

Le professeur insiste à ce niveau sur le fait que "x et $\mathcal{A}$ désignent des nombres inconnus appartenant à un ensemble déterminé de nombres : x désigne un nombre inconnu qui appartient à l'ensemble des nombres compris entre 0 et 8 ; $\mathcal{A}$ désigne un nombre inconnu qui appartient à l'ensemble des nombres compris entre 32 et 64".

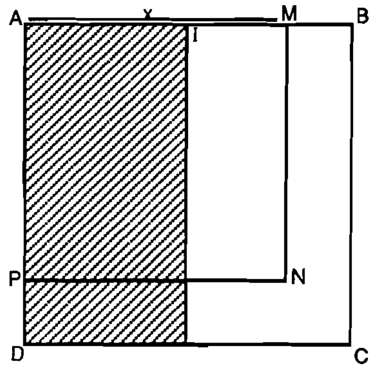
Ensuite, il met en évidence la relation entre $\mathcal{A}$ et x, et explique que "$\mathcal{A}$ est une variable dépendante de la variable indépendante x". Puis il conclut, que l'on exprime, en mathématique, cette relation de dépendance en disant que "$\mathcal{A}$ varie en fonction de x, ce qui est noté $\mathcal{A}(x)$."

III.3. Troisième partie

Le problème suivant[7] est posé individuellement aux élèves sur une feuille :

ABCD est un carré de côté 10 cm dont une partie est hachurée comme indiqué par le dessin. On construit un carré AMNP, M étant un point du segment [AB], tel que AM = x. I est le milieu de [AB].

Exprimer l'aire $\mathcal{A}$ de la partie hachurée située à l'intérieur du carré AMNP quand M varie sur le segment [AB].



Les élèves doivent répondre directement sur la feuille d'énoncé.

Commentaire

Cet exercice devait me permettre d'évaluer, après une première tentative d'enseignement des notions de variables, d'intervalles et de la notation $\mathcal{A}(x)$, l'évolution du rapport à ces objets.

Les élèves ont trois façons de calculer $\mathcal{A}$ lorsque M est un point du segment [IB] :

- en utilisant la formule de l'aire d'un rectangle $\mathcal{A} = AI \times AP = 5x$,
- à l'aide de la différence de deux aires :

$\mathcal{A} = AM^2 - IM \times MN = x^2 - x(x - 5)$,

$\mathcal{A} = AI \times AD - AI \times PD = 50 - 5(10 - x)$.

Lorsque M est un point du segment [AI], il est prévisible que les élèves utiliseront uniquement la formule de l'aire d'un carré et écriront que $\mathcal{A} = AM \times AP = x^2$.

Deux cas extrêmes sont envisageables :

- x a le statut de variable. Dès lors les réponses espérées sont les suivantes :

Avec intervalle numérique

si $0 \leq x \leq 5$ alors $\mathcal{A} = x^2$, si $5 \leq x \leq 10$ alors $\mathcal{A} = 5x$

si $0 \leq x \leq 5$ alors $\mathcal{A} = x^2$, si $5 \leq x \leq 10$ alors $\mathcal{A} = x^2 - x(x - 5)$

7 .D'après "Activité ... Carré" par Clapponi (1995)

Avec intervalle de position

si $M \in [AI]$ alors $\mathcal{A} = AP^2$, $\mathcal{A} = AM^2$, $\mathcal{A} = AM \times AP$

si $M \in [IB]$ alors $\mathcal{A} = 5 \times AP$, $\mathcal{A} = AM^2 - AP \times (AM - 5)$,

$\mathcal{A} = AP^2 - AP \times (AM - 5)$.

- le caractère particulier du dessin n'est pas perçu et encore moins le caractère de variable de A et de x. Des réponses possibles sont alors :

$\mathcal{A} = 5x$, $A = x^2 - x(x - 5)$,

$\mathcal{A} = 5 \times AP$, $A = AM^2 - AP \times (AM - 5)$,

$\mathcal{A} = AP^2 - AP \times (AM - 5)$.

III.4. Le problème des intervalles

Dans l'analyse des réponses que peuvent fournir les élèves dans cette expérimentation intervient la notion d'intervalle. Comment les élèves vont-ils traduire l'appartenance de la variable x à un intervalle quand ils auront à le faire ? Deux types de réponses semblent envisageables, ils peuvent fournir la réponse sous la forme d'un intervalle de positionnement : M est un point de [AI], ou $A \leq M \leq I$, ou utiliser un intervalle numérique : $x \in [0 ; 5]$, ou $0 \leq x \leq 5$. Mais alors quelle structure numérique a cet intervalle ?

IV. Quelques résultats de l'expérimention

IV.1. Travail sur les formules

Les problèmes proposés dans la séquence relèvent d'une classe de problèmes usuels au collège, où l'on demande : "Exprimer une grandeur géométrique à l'aide d'une autre".

Dans cette tâche, la majorité des élèves commence comme suit :

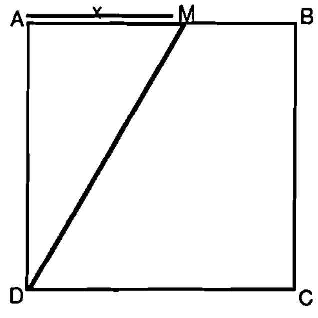
- ils affectent d'abord à tous les points de la figure une lettre.
- puis, ils utilisent prioritairement une formule connue.

À la suite de ce travail, ils rencontrent une première difficulté qui est le remplacement des lettres de la formule apprise par leur désignation à l'aide des lettres de la figure.

Prenons comme exemple le problème de la séquence d'enseignement (deuxième partie de l'expérimentation).

ABCD est un carré de côté 8 cm et M un point du segment [AB], tel que AM = x.

Exprimer l'aire $\mathcal{A}$ du quadrilatère BMCD quand M varie sur le segment [AB].



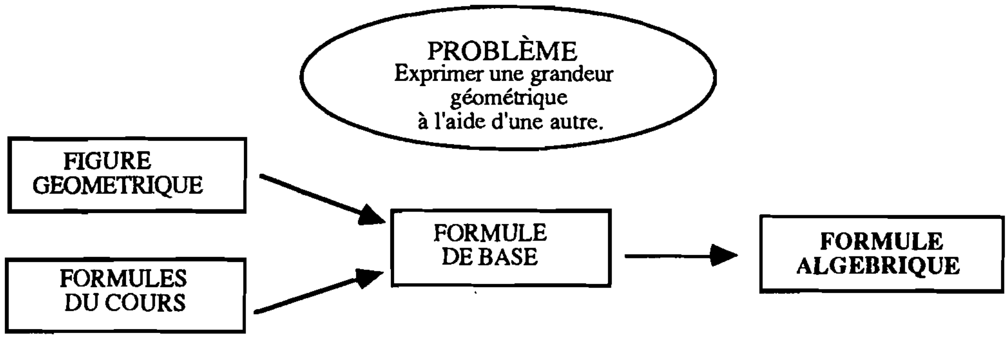
Dans ce problème la figure proposée est un carré de côté 8 cm. M étant un point du segment [AB], supposons que pour exprimer l'aire cherchée on utilise la formule du trapèze justement au programme de troisième. La première difficulté réside dans le fait de passer de la formule Aire du trapèze $= \frac{(B+b)\times h}{2}$ à la formule $\mathcal{A}_{MBCD} = \frac{(CD + MB)\times BC}{2}$. Nous appellerons cette formule *"formule de base"*.

Dans une deuxième étape, les élèves doivent remplacer tous les termes de la formule de base soit par des nombres "entiers", soit par x selon les règles du contrat didactique sur les formules. C'est dans cette activité que les élèves rencontrent le plus de difficultés comme nous allons le montrer par la suite.

Si l'on se réfère à notre exemple, la difficulté réside dans le passage de la formule $\mathcal{A}_{MBCD} = \frac{(CD + MB)\times BC}{2}$ à la formule $\mathcal{A}_{MBCD} = \frac{(8 + (8-x))\times 8}{2}$ que nous appellerons *"formule algébrique"*.

S'il est facile pour les élèves d'obtenir DC = 8 et BC = 8, il est plus difficile pour eux d'écrire MB = 8 - x.

Nous résumons notre propos par le schéma suivant :



Il est à noter que même si l'on est capable d'établir un classement dans le degré des difficultés, certaines nous échappent encore et mériteraient de plus amples investigations.

L'intérêt de cette formule algébrique serait de permettre un calcul rapide et économique de $\mathcal{A}$ pour plusieurs valeurs de x : la relation existant entre ces deux grandeurs est inscrite dans une relation fonctionnelle pour laquelle le statut de x et de A est celui de variable.

Dans un premier temps analysons comment s'est effectué le passage d'une formule de base à une formule algébrique dans les trois parties de l'expérimentation.

IV.2. Passage d'une formule de base à une formule algébrique

IV.2.1. Première partie : exercice initial

Tableau 1. Passage à la formule algébrique (3 copies sont inclassables)

		Formule algébrique	A = 25	Σ
AI = 5 et mesure(IM)		0	7	7
AI = 5 et	"simplification" algébrique	5	0	5
IM = x - 5	Sans transformation algébrique	1	0	1
Notation "géométrique"		4	0	4
Σ		10	7	17

A partir d'une formule de base, dix élèves ont tenté de transformer une formule de base pour A en une formule algébrique : parmi ces élèves, six ont été capables de trouver que AI = 5, et six ont réussi à exprimer IM en fonction de x (IM = x - 5).

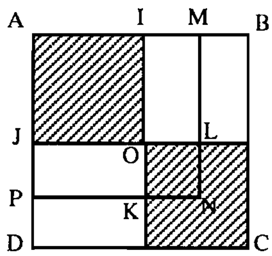
Aucun de ces élèves n'est parvenu à l'expression algébrique de $\mathcal{A}$ sous la forme $\mathcal{A} = x^2 - 10x + 50$, non pas parce qu'ils n'ont pas eu le souci de simplifier l'expression qu'ils détenaient, mais parce qu'ils n'ont pas su utiliser correctement le calcul algébrique. Les erreurs rencontrées pour ce calcul sont classiques : erreur de signe et/ou $(x - 5)^2 = x^2 - 25$

Quatre élèves n'ont pas ressenti la nécessité de calculer AI, ils ont donc fourni des expressions de $\mathcal{A}$ où ils ont limité la transformation de leur formule de base au seul remplacement de AM par x. Par exemple, Grégory donné pour réponse : $\mathcal{A} = AJ^2 + (x-AI) \times LN$.

Chez ces élèves l'une des règles du contrat didactique sur les formules, "traduire une longueur par un nombre dès que cela est possible" n'est pas respectée. Ils font exception puisque treize élèves sur dix-sept répondent dans le respect de cette règle.

Sept élèves sur dix-sept se sont contentés de calculer AI, puis l'aire du carré C_1. On peut donner plusieurs justifications à ce comportement, mais une hypothèse est que cette réponse résulte de la difficulté pour eux d'exprimer IM en fonction de x.

C_1 représente l'aire du carré AIOJ, C_2 l'aire du carré OLNK



Aucun des élèves n'accorde d'importance au fait que M varie sur [AB] : conformément à notre hypothèse les élèves ne perçoivent pas le caractère particulier de la position de M sur le dessin. Ce résultat n'est pas surprenant, la lettre x étant introduite au collège en tant qu'inconnue, elle joue donc à leurs yeux le rôle de nombre inconnu fixé et le statut du dessin renforce cette idée puisque pour eux faire varier M revient à changer de dessin.

IV.2.2. Deuxième partie : la séquence d'enseignement

Tableau 2. Formules de base et passage à la formule algébrique (1 copie blanche)

	Formule de base utilisée	Trapèze	Carré - Triangle	Σ
mesure(MB)		4	0	4
MB = 8 - x	"simplification" algébrique	9	1	10
	sans transformation algébrique	2	0	2
MB	"simplification" algébrique	2	0	2
	sans transformation algébrique	1	0	1
	Σ	18	1	19

Un fait remarquable est que dix-huit élèves sur dix-neuf ont utilisé la formule de l'aire du trapèze. Inversement seule Pauline a utilisé la différence de l'aire du carré ABCD et de l'aire du triangle AMD, pour exprimer $\mathcal{A}$ en fonction de x, cette solution facilitant par la suite le passage à la formule algébrique. Les élèves utilisent plutôt une formule de base (de leur répertoire) applicable directement, plutôt que de construire une formule de base correspondant à des opérations additives sur des sous-figures (triangle + rectangle) ou des sur-figures (carré -triangle) élémentaires. Les élèves le font d'autant plus que la formule du trapèze est un savoir nouveau pour eux.

Douze élèves sur dix-neuf ont été capables d'écrire que MB = 8 - x, il semble donc qu'il soit plus facile pour les élèves d'exprimer MB en fonction de x dans ce problème que d'écrire AM = x - 5 dans le problème précédent. On retrouvera ce résultat surprenant dans l'analyse des résultats de la troisième partie de la séquence expérimentée.

Il faut noter également que onze élèves sur dix-neuf cherchent à simplifier la formule algébrique initiale, sans que cela leur soit demandé et sans que ce travail ait de raison d'être. On observe ici l'effet d'une règle du contrat didactique du travail algébrique, celle de "simplification".

Parmi les élèves qui ne cherchent pas à simplifier, on retrouve deux des quatre élèves qui dans le premier problème n'avaient pas "respecté" la règle "traduire une longueur par un nombre dès que cela est possible".

IV.1.3. Troisième partie

Tableau 7. Formules de base et passage à la formule algébrique (3 copies blanches)

	Formule de base utilisée	AI × AP	AI × AD- AI × PD	AI × AP **et** AM²-IM × MN	Σ
mesure(AM)		1	0	0	1
x	"simplification" algébrique	0	2	0	2
	sans transformation algébrique	12	0	2	14
	Σ	13	2	2	17

Il reste encore une élève qui a cédé à la tentation de remplacer AP par sa mesure 8 dans le dessin proposé : elle donne $\mathcal{A}$ = 40.

La majorité des élèves ($1^{ère}$ et $3^{ème}$ colonnes) ont utilisé la formule de base AI × AP donnant l'aire d'un rectangle en fonction de sa longueur et de sa largeur. Tous ces élèves ont remplacé dans cette formule de base AI par 5 et AP par x pour obtenir une formule algébrique.

Deux élèves ont exprimé l'aire $\mathcal{A}$ en fonction de x en calculant l'aire de la partie hachurée et en lui soustrayant l'aire de la partie hachurée non incluse dans le carré AMNP (2ème colonne), la difficulté du passage de la formule de base à la formule algébrique est alors d'écrire AP=10-x. Ils ont ensuite effectué une "simplification" pour obtenir, comme leurs camarades, $\mathcal{A}(x) = 5x$.

Deux autres élèves ont écrit deux formules de base (3ème colonne) : la première est la formule de base $AI \times AP$ majoritaire, la seconde consiste à ôter à l'aire du carré AMNP, l'aire comprise dans le carré AMNP qui n'est pas hachurée. Le passage à la formule algébrique s'est avéré impossible pour ces élèves : aucun d'eux n'a réussi à exprimer IM en fonction de x. Il semble donc qu'il soit beaucoup plus difficile pour les élèves d'écrire IM = x-5, que PD = 10-x. Ce résultat confirme notre observation précédente sur la difficulté des élèves à écrire IM = x-5 dans le premier problème, par rapport à écrire MB = 8-x dans le deuxième problème. Nous pouvons avancer l'explication suivante : quand on ne connaît pas une grandeur mathématique, il est difficile de l'introduire dans un ensemble d'opérations ; par contre si celle ci est connue et bien définie par un nombre, il n'y a aucun problème pour lui enlever ou lui ajouter une grandeur inconnue.

IV.3. Intervalle et statut de variable

IV.3.1. Quel statut pour les lettres dans un tableau de valeurs ?

Lorsque l'on fournit un tableau de valeurs aux élèves, il va de soi pour les enseignants que les lettres, comme ici $\mathcal{A}$ et x, ont le statut de variables. Qu'en est-il pour les élèves ? C'est ce que l'on va essayer de voir au travers des réponses obtenues lors des étapes 2, 3 et 4 de la séquence.

Les élèves ont écrit une valeur pour $\mathcal{A}$ (voir le tableau 3 ci-après) : ce sont des nombres scolairement les plus familiers, en majorité (18 élèves) un entier naturel. Les élèves avaient alors à calculer x pour la valeur de $\mathcal{A}$ qui leur était attribuée, ce qui revenait à résoudre une équation du premier degré (par exemple un élève recevant $\mathcal{A}$ = 15 avait à résoudre l'équation 15 = 64-4x). Tous les élèves, quelque soit la valeur attribuée à $\mathcal{A}$, ont calculé une valeur pour x mais seulement dix d'entre eux donnent la solution exacte, les sources principale d'erreurs pour la résolution de cette équation provenant du signe moins précédant 4x et du coefficient 4 devant x.

Tableau 3. Valeur choisie pour $\mathcal{A}$ et valeur calculée pour x : tableau affiché [8]

A	**15**	10	15	**13,2**	**32**	**56**	**2**	**21564**	25	**24**	22	**12π**	**16**	**42**	29	16	81	**27**	8	75
x	**12,25**	-50	-49	**12,7**	**8**	**4**	**31/2**	**-5375**	22,25	**10**	0,105	**6,7**	**12**	**5,5**	-0,114	3	-0,235	**9,25**	0,07	2,75

(En caractères gras, les 10 couples de valeurs exacts)

Après avoir calculé x, les élèves devaient placé M sur le dessin.

[8] Pour une question de mise en page le tableau est représenté "horizontalement".

Tableau 4. Placement de M selon la valeur de x calculée (2 copies blanches)

		$0 \leq x \leq 8$	$x<0$ impossible	$8<x$ impossible	$8<x$ prolongement	Σ
Juste	avec justification	0	1	2	0	3
	sans justification	6	3	3	0	12
Faux	avec justification	1			0	1
	sans justification	0			2	2
Σ		7	4	5	2	18

Pour les élèves qui ont trouvé une valeur de x comprise entre 0 et 8 (1ère colonne), la question "Où placer le point M ?", n'a posé aucune difficulté. Seule Ismahen aprés avoir trouvé x = 8 décrète qu'elle ne peut pas placer le point M sur [AB] : elle justifie sa réponse en écrivant que M doit appartenir à [AB]. On retrouvera par la suite ce raisonnement qui consiste à exclure le point B du segment [AB].

Tous les élèves qui ont obtenu une valeur strictement négative pour x (2ème colonne) sont convaincus que la longueur d'un segment ne peut être négative, c'est d'ailleurs la justification qu'apporte Grégory qui est le seul à avoir justifié sa réponse.

Parmi les sept élèves qui ont obtenu des valeurs de x strictement supérieures à 8 , cinq élèves ont répondu qu'il était impossible de placer le point M sur [AB] (3ème colonne). Deux élèves ont justifié leur réponse, l'un par "Mon point M est impossible à placer car M n'appartiendrait pas à [AB]", l'autre par "Je ne peux pas placer le point M, peut être parce que l'aire $\mathcal{A}$ est supérieure à x" ($\mathcal{A}$ était égale à 16 cm^2 et x à 12 cm). Deux élèves ont prolongé la demi-droite [AB) pour placer M sur [AB) privé de [AB] (4ème colonne).

Dans la quatrième étape de la séquence les élèves devaient recopier individuellement le tableau affiché des valeurs de $\mathcal{A}$ et de x (voir tableau 3.) et barrer les valeurs qui ne convenaient pas. Ci-après les réponses des élèves.

Tableau 5. Valeurs barrées (3 copies sont inclassables dans le tableau ci-dessus)

Réponses	$x<0$ et $8<x$ barrées	$x<0$ et $8 \leq x$ barrées	$x<0$ barrées	$x<0$ et valeurs de A correspondantes	Σ
Avec justification	1	1	0	1	3
Sans justification	7	2	5	0	14
Σ	8	3	5	1	17

Les résultats obtenus à cette question confirment ceux de la précédente et nous éclairent un peu plus sur le statut des lettres x et $\mathcal{A}$ donnés par les élèves.

Pour ces élèves x désigne bien la longueur d'un segment et ne peut donc être négatif même si, pour la plupart, ils ne sont pas capables de le justifier. Ils n'ont pas pour autant barré les valeurs de $\mathcal{A}$ correspondant aux valeurs négatives de x. Seul un élève a établit un tel lien entre x et $\mathcal{A}$ (4ème colonne) sans que la lettre $\mathcal{A}$ soit associé pour lui à l'intervalle [32,64], puisqu'à la question "Que peut on dire de $\mathcal{A}$" il répond : "$\mathcal{A}$ peut prendre n'importe quelle valeur".

Pour onze élèves, le point M appartenant à [AB], x ne peut être strictement supérieur à 8, ainsi que le justifient deux élèves. Trois élèves ont barré non seulement les valeurs de x strictement inférieures à 0 et celles supérieures à 8, mais aussi la valeur 8 (2ème colonne), parmi ces élèves ne figure pas Ismahen qui décrétait qu'il était impossible de placer M sur [AB] lorsque x était égal à 8. Les réponses aux questions suivantes vont nous apporter une explication de ces réponses.

Nous avons regroupé dans un même tableau les effectifs des réponses aux deux questions : "Donner la plus petite valeur que peut prendre x" et "Donner la plus grande valeur que peut prendre x ".

Tableau 6. Plus petite valeur et plus grande valeur de x (3 copies blanches)

		Non présents*				Présents**					
	plus grande ↓ plus petite →	0	0,1	0,05	-8	0,105	0,07	3	-50	NR	Σ
Non présents*	8	4	1		1	1	1			1	9
	7,9		1	1							2
Présents**	22,25					1			2		3
	12							1			1
	NR	2									2
	Σ	6	2	1	1	2	1	1	2	1	17

* Non présents dans le tableau affiché (voir Tableau 3)

** Présents dans le tableau affiché (voir Tableau 3)

Quatorze élèves ont donné un nombre positif, ce qui est cohérent avec le fait que pour la totalité des élèves x ne pouvait être strictement négatif (voir question précédente).

Trois élèves ont tout de même donné un nombre négatif, -50 en prenant le plus petit nombre présent dans le tableau affiché, -8 peut-être pour satisfaire à un critère de symétrie de l'intervalle.

Onze élèves donnent comme plus petite et plus grande valeurs pour x des nombres non présents dans le tableau.

Examinons les réponses 0,1 (ou 0,05) pour le plus petit nombre associés à la réponse 7,9 pour le plus grand nombre : pour les trois élèves ayant répondu ainsi on peut faire l'hypothèse qu'ils envisagent x en référence à un intervalle *discret* de nombres contenant les nombres du tableau et contenu dans l'intervalle]0, 8[; cet ensemble discret (constitué de décimaux de D_1 ou D_2[9]) possède un plus petit élément (0,1 ou 0,05) et un plus grand élément (7,9).

Dans le cadre de cette hypothèse, la lettre x prend un statut de variable : x est bien associée à un ensemble de nombres plus vaste que les nombres présents, mais la structure de ces nombres n'est pas celle d'un intervalle réel.

En revanche, pour les quatre réponses correctes (0 et 8), on ne connait pas la conception qu'ont ces élèves de la structure des nombres compris entre 0 et 8 !

Trois élèves ne semblent pas envisager des valeurs pour x indépendamment des nombres présents dans le tableau : pour eux x désigne l'un des nombres positifs (non barrés) du tableau. Pour ces élèves les valeurs du tableau représentent plusieurs cas

9 selon la terminologie maintenant classique de Izorche (1977) : D_n désigne l'ensemble des décimaux ayant n chiffres après la virgule. Cet ensemble est isomorphe à l'ensemble des entiers.

particuliers où x et $\mathcal{A}$ ont le statut de nombre inconnu. Ils sont donc en décalage par rapport aux conceptions de l'enseignant sur le problème.

En conclusion, ce n'est pas parce que l'on donne dans un tableau plusieurs valeurs à une même lettre que les élèves vont nous suivre dans notre démarche qui consiste à donner le statut de variable à cette lettre : certains vont considérer la lettre comme un nombre inconnu et chaque cas comme une nouvelle situation.

IV.3.2. Prise en compte de la variation de M : écriture d'un intervalle

Nous donnons dans le tableau 8 les effectifs des réponses des élèves au problème de la troisième partie de l'expérimentation.

Tableau 8. Écriture d'un intervalle

Formule(s) algébrique(s)	$\mathcal{A}(x)=5x$ et $\mathcal{A}(x)=x^2$	$\mathcal{A}=5x$ et $\mathcal{A}=x^2$	$\mathcal{A}(x)=$	$\mathcal{A}=$	$\mathcal{A}(x)=$	$\mathcal{A}=$	Σ
Intervalle numérique	0	0	7	1			8
Intervalle de position	1	0	0	2			3
Sans intervalle		2			1	5	8
Σ	1	2	7	3	1	5	19

Un élève a fourni une réponse numérique en prenant sur le dessin la mesure de AM (contre sept dans la première partie) : il n'est pas comptabilisé dans le tableau. Tous les autres élèves ont écrit une formule algébrique à partir d'une formule de base qui est celle de l'aire du rectangle.

Parmi ces élèves, trois élèves seulement (1ère et 2ème colonnes) ont écrit deux formules différentes selon la position de M sur le segment [AB]. Les autres élèves écrivent une formule algébrique pour la position particulière de M sur le dessin. Onze de ces élèves adjoignent à la donnée d'une formule algébrique un intervalle précisant soit la position de M (trois élèves), soit la valeur possible de x (huit élèves) :

Loïc se distingue des trois élèves ayant écrit un intervalle de position en effectuant un passage à une forme hybride entre l'intervalle de position et l'intervalle numérique. Il écrit pour traduire que M appartient au segment [AI], que $0{,}1 < M < 4{,}9$.

Parmi les huit élèves qui ont écrit un intervalle numérique, deux donnent $0 < x < 10$ et quatre $0 \leq \mathcal{A}(x) \geq 5$, associé à la réponse $\mathcal{A}(x) = 5x$. Cette dernière réponse demande un retour sur le problème : le texte annonce clairement que "M varie sur [AB]" mais une première difficulté est de concevoir que le point P varie simultanément sur [AD] sous la contrainte "AMNP est un carré". Une fois cette difficulté surmontée, une seconde apparaît quand il s'agit d'étudier l'aire de la partie hachurée à l'intérieur du carré AMNP dans la position donnée par le dessin. Lorsque M varie sur [IB], la partie hachurée "dans" AMNP est un rectangle dont la mesure de l'un des cotés est constamment égale à 5 cm, et la mesure de l'autre côté AP est variable. Dans ce problème la lecture horizontale du dessin, privilégiée par la donnée "M varie sur [AB]", rend difficile la coordination de la variation de M sur [AB] (horizontal) et de la variation de P sur [AD] (vertical). Ceci pourrait expliquer la réponse surprenante de ces élèves : ils écrivent un intervalle qui concerne l'aire hachurée $\mathcal{A}(x)$ pour la valeur de x pour le côté horizontal du rectangle concerné, c'est à dire les valeurs possible pour AI.

Dans cette dernière partie de l'expérimentation, on constate donc que les élèves continuent à avoir des difficultés à se détacher de la position particulière de M sur le dessin, mais contrairement au cas du problème de la première partie, ici plus de la moitié des élèves envisagent la variation de M soit en fournissant deux formules algébriques soit par la donnée d'un intervalle.

Conclusion

Il est indéniable que dans les situations proposées, la majorité des élèves répond sous l'effet d'un contrat didactique sur les formules pour exprimer une grandeur $\mathcal{A}$ (dans cet article une aire).

Cette formule doit contenir :

- la lettre x indiqué dans l'énoncé (à l'exclusion de toute autre lettre),
- de nombres entiers,
- les signes algébriques des opérations.

De plus, elle doit être donnée sous une forme "simple" par le travail algébrique de simplification ayant cours au collège.

Or, une formule "algébrique" (c'est à dire utilisant des désignations par des lettres) peut être sous-tendue par trois problématiques différentes associées à trois statuts différents pour les lettres ceux *d'inconnue, d'indéterminée et de variable* : dans ce dernier cas, on ne considère plus une lettre comme définie par la valeur d'un nombre inconnue, mais comme définie par son appartenance à un ensemble connu de nombres.

La responsabilité de la formulation de l'ensemble de nombres est rarement laissée aux élèves de collège. Les choix faits dans les trois situations que nous avons construites contraignent *a priori* les élèves à expliciter une formule "algébrique" relativement à un *intervalle*, c'est à dire à donner à x et à $\mathcal{A}$ un statut de variables dont l'une dépend de l'autre. C'est une problème difficile mais qui nous paraît être une des conditions de l'évolution du statut des lettres x et $\mathcal{A}$ pour les élèves.

Lors de l'expérimentation peu d'élèves ont perçu *le caractère de variable de* $\mathcal{A}$, alors que, pour beaucoup, le statut de la lettre x a évolué pour passer du statut de nombre inconnu fixé, au statut de nombre inconnu qui prend ses valeurs dans un ensemble de nombre. La différence entre ces deux résultats peut s'expliquer par le fait que les variations de M sur le segment [AB] sont plus perceptibles que celles de $\mathcal{A}$. En fait, les élèves de troisième ont peu de moyens mathématiques pour traduire une variation. En effet, l'abandon de l'étude des nombres en tant qu'ensemble, les consignes des programmes vis à vis des notations (seuls les symboles d'appartenance et de non appartenance d'un point M à une droite $\mathcal{D}$ sont au programme) et une maîtrise approximative des relations d'ordre ne leur permettent pas d'avoir une aisance suffisante pour exprimer de façon juste et précise l'appartenance d'une lettre a un ensemble de nombre, c'est à dire de traduire mathématiquement une variation.

De plus la formulation d'un intervalle numérique par les élèves soulève lui-même le problème fondamental de la nature et de la structure des nombres compris entre deux nombres bornes de l'intervalle : nous n'avons fait que l'entrevoir lors de la phase du travail des élèves sur le tableau de valeurs de x et de $\mathcal{A}$.

A la question : peut on prendre en charge l'enseignement de la notion de variable en troisième ?, je répondrais que l'on peut tout au moins y contribuer et amener l'élève à se familiariser avec cette notion. En ce qui concerne la notation f(x), je ferai référence au programme : "le vocabulaire utilisé et les notations ne sont pas imposés à priori, ils s'introduisent en cours d'étude selon un critère d'utilité". On ne peut attendre l'enseignement de seconde pour donner une signification aux notions sous-jacentes à cette notation - f(x) est une variable, x est une variable et f(x) dépend de x.

Bibliographie

BESSOT, A., (1997) *Notion de formule : analyse d'une situation*, Document ME1 - Didactique des mathématiques, Université Joseph Fourier.

BESSOT, A. , CARRA, M.T., CECCONI, S., (1997) Les problèmes proposés et ..., pp. 31 à 36 ; Quelques réflexions à propos de ..., pp. 39 à 40, Document du stage, "Didactique des Mathématiques de la 4° à la 2nde", Groupe didactique de l'I.R.E.M. de Grenoble.

BOUJADDI, M., (1996) *Algèbre et généralisation en classe de seconde : "à chacun sa vérité"*, mémoire professionnel, I.U.F.M. de Grenoble

RENÉ DE COTRET, S., (1988). Une étude sur les représentations graphiques du mouvement comme moyen d'accéder au concepts de fonction ou de variable dépendante ? *Petit x*, n°17, pp. 5-27.

CLAPPONI (1995) Activité... Carré Hachuré, *Petit x*, n° 38, p. 72, et *Petit x*, n° 39, pp. 78 à 79

CAPPONI, B., CLAROU, P., (1984) Éléments pour l'élaboration d'activités de calcul algébrique en 1er cycle, *Petit x*, n° 5, pp. 19-50

IZORCHE M.L. (1977) *Les réels en classe de seconde*, Mémoire de D.E.A. Université de Bordeaux 1

ANNEXE 1

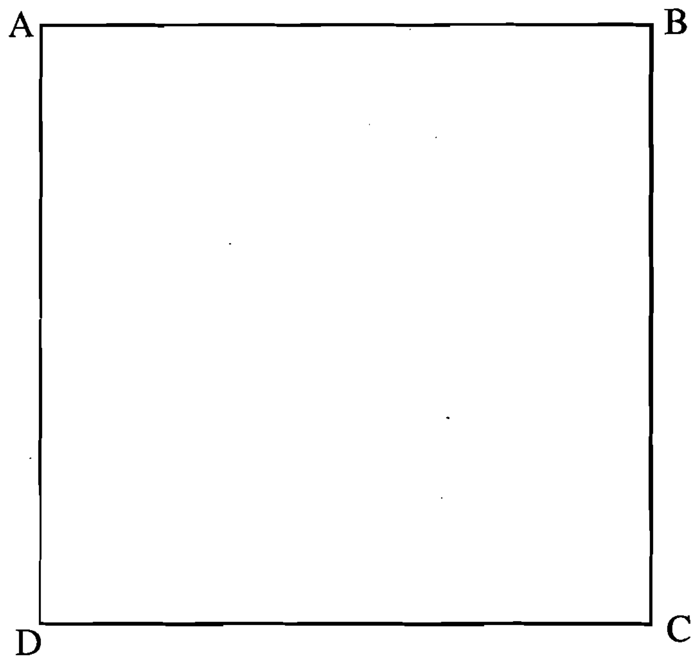
NOM :

Déterminer x pour que $\mathcal{A}$ soit égale à .... cm^2

NOM :

Écris comment tu fais pour trouver x.

Place le point M sur la figure.



ANNEXE 2

NOM :

$\mathcal{A}$	x

1) Y-a-t-il des valeurs qui ne conviennent pas ?
Justifier votre réponse.
Si votre réponse est oui barrer les valeurs qui ne conviennent pas.

2) Donner la plus petite valeur que peut prendre x.
Donner la plus grande valeur que peut prendre x.
Que peut-on dire de la valeur de x ?

3) Faites le plus de remarques possibles sur la valeur de $\mathcal{A}$.

Réponses aux questions :