PROGRESSIONS ET PROBLÉMATIQUES EN GÉOMÉTRIE À PARTIR D'UN EXEMPLE. L'INÉGALITÉ TRIANGULAIRE

Annie BERTÉ
IUFM d'Aquitaine, LADIST
Université de Bordeaux 1

I. Introduction

Pour l'enseignement de la géométrie de 11 à 15 ans, le choix d'une progression conditionne le répertoire que le professeur utilisera avec ses élèves, le contenu et la forme des énoncés, les conjectures et les preuves qu'ils pourront produire. La progression résulte d'une double décision:

a - le découpage selon les années: il est géré par les programmes officiels et sans cesse remanié au gré des réformes successives.

b - la progression sur une année: actuellement l'institution donne une certaine liberté au professeur de collège pour en décider suivant chaque classe. Une phrase précède les contenus du dernier programme de 6ème (B.O./ 1995) "Il est rappelé que le professeur a toute liberté dans l'organisation de son enseignement à condition que soient atteints les objectifs visés par le programme".

Les choix du professeur sont soumis à des contraintes de deux ordres:

a - Les programmes sont écrits de façon linéaire et les manuels adoptent un ordre induit par cette écriture. Programmes et manuels actuels ont été précédés dans le temps par beaucoup d'autres et leurs transformations successives résultent du développement des mathématiques et des théories pédagogiques et psychologiques peu à peu connues.

b - la gestion de la classe

Des exigences de déduction logique légitimaient les progressions anciennes. Il y a aujourd'hui un affaiblissement de ces exigences dont l'alibi plus ou moins inconscient est la prise en compte de l'élève. Les énoncés mathématiques d'un même champ entretiennent des liens résultant des déductions logiques et aussi des reformulations et changement de point de vue explicites ou non dans le texte institué du savoir, mais indispensables pour faire des mathématiques. Ces diverses formulations apparaissent moins qu'autrefois dans les manuels d'autant plus que les liens logiques étant affaiblis, ils sont moins nécessaires. Ceci conduit à une atomisation du savoir au point que les maîtres pourraient en enseigner les objets de façon indépendante les uns des autres. Les professeurs sont amenés à organiser en classe des pseudo-activités et des pseudo-débats, les élèves n'ayant pas les moyens ni d'être actifs au sens d'une activité mathématique, ni de mener des débats mathématiques car :

- les conditions d'une articulation entre connaissances des élèves et savoir visé ne sont pas remplies.
- les élèves ne disposent ni des possibilités de formulations ni des éléments de preuve.

Jusqu'où le professeur peut-il négocier la construction d'un environnement pour chaque notion à l'encontre de la parcellisation des savoirs et permettant aux élèves d'entrer dans une problématique ?

Je prends à titre d'exemple le problème d'enseignement que pose l'inégalité triangulaire qui se trouve aujourd'hui en 4ème mais qui va se placer dans les nouveaux programmes de collège en 5ème. Pour déterminer le savoir mathématique visé en fin de secondaire, j'examine les énoncés mathématiques connus sous ce nom et une première question de problème de CAPES interne où l'inégalité triangulaire est l'outil de démonstration. Ensuite je vérifie que l'inégalité triangulaire fonctionne comme une connaissance dès la 6ème. Se pose alors la question d'articuler connaissances et savoir dans la construction de problématiques pour la géométrie dans le secondaire.

II. Contenu et forme des énoncés en mathématique et dans les manuels scolaires

II.1. Trois formulations en mathématiques

Dans les ouvrages et manuels de mathématique, l'expression *"inégalité triangulaire", qui sera remplacée par IT dans la suite de ce texte,* désigne deux théorèmes à différencier selon le contexte :

Théorème : Pour tout triplet (A,B,C) de points du plan, $d(A,C) \leq d(A,B) = d(B,C)$ $d(A,C) = d(A,B) + d(B,C) \Leftrightarrow B \in [AC]$

Relation entre deux nombres x et y utilisée même hors du contexte de la géométrie (en analyse) $\lvert \lvert x \rvert - \lvert y \rvert \rvert \leq \lvert x + y \rvert \leq \lvert x \rvert + \lvert y \rvert$

Il y a un autre théorème qui donne les positions relatives de deux cercles (qui sera désigné par PRC). C'est une conséquence de IT qui lui donne en même temps une formulation et réécriture différente.

> Étant donné deux cercles de rayons R et R' et dont la distance des centres est d on a :
>
> $d > R + R' \Leftrightarrow$ cercles extérieurs
>
> $|R - R'| < d < R + R' \Leftrightarrow$ cercles sécants
>
> $d = R - R' \Leftrightarrow$ cercles tangents intérieurement. et $d = R + R' \Leftrightarrow$ cercles tangents extérieurement
>
> $d < R + R' \Leftrightarrow$ cercles intérieurs

II.2. Indépendance des approches dans les manuels scolaires

a. Manuels de collège actuels (4ème) : deux théorèmes en jeu

> Théorème 1 : Dans un triangle dont les côtés ont pour mesure avec la même unité les trois nombres a, b, c, alors
>
> $a< b+c$ et $b< a+c$ et $c< a+b$ (i)
>
> ou bien $|b - c| < a < b + c$ (ii)

> Théorème 2 : "Si trois nombres a, b ,c vérifient soit (i) soit (ii) alors il existe un triangle dont les côtés ont pour mesure ces trois nombres"

Ce théorème 2 est une réciproque du 1. Il est implicite dans le bilan de l'"activité" demandée aux élèves par plusieurs manuels et professeurs. Dans les ouvrages de géométrie, il est énoncé dans le contexte des cercles (voir ci-dessus) et non des triangles. L'existence d'un triangle est assurée si les cercles sont sécants parce que la condition sur les rayons et la distance des centres est vérifiée, sans qu'il soit nécessaire de le dire. Un énoncé en termes de triangles dans les manuels scolaires serait une création didactique. Un énoncé en termes de cercles sécants n'y figure pas non plus puisque PRC n'est pas explicite dans les programmes de secondaire, et la valeur absolue n'est pas apprise en collège. Pour ces raisons il est confondu avec le théorème 1 dans les manuels de collège actuels à savoir que le bilan de "l'activité" des élèves est ainsi écrit :

> Dans un triangle ABC : $AC < AB + BC$ et $AB < AC + BC$ et $BC < AB + AC$
> Si $AC = AB + BC$ alors B appartient au segment [AC]

b. Manuels de seconde

IT et PRC ne figurent plus dans les programmes de lycée. Dans les manuels de seconde, à propos des valeurs absolues, IT est donnée hors du cadre de la géométrie, le mot cadre étant pris ici au sens de Douady (1984)

La démonstration en est ainsi faite : étant donnés deux réels x et y on a

$x \leq |x|$ et $-x \leq |x|$ Mêmes inégalités pour y

On en déduit que $x + y \leq |x| + |y|$ et $-x - y \leq |x| + |y|$

donc $|x + y| \leq |x| + |y|$

L'autre inégalité avec la différence est généralement omise, les élèves de seconde n'en ayant pas l'usage. On n'y reviendra plus et donc si l'élève en a besoin dans la suite de ses études, c'est à sa charge. Les raisons de l'emploi du mot "triangulaire" restent implicites.

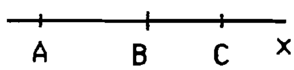
En fait ce sont tous les liens entre les énoncés par reformulation ou démonstrations qui sont implicites. En voici quelques uns.

Exemples de reformulation, soit trois formulation pour le même énoncé:

(1) $d(A,C) = d(A,B) + d(B,C) \Leftrightarrow B \in [AC]$

(2) $AC = AB + BC \Leftrightarrow A,B,C$ alignés dans cet ordre

(3) $AC - BC = AB \Leftrightarrow C \in [Bx)$



Exemple d'une démonstration qui est très proche d'une reformulation : équivalence de (i) et de (ii)

$$\begin{array}{l} a < b + c \\ b < a + c \\ c < a + b \end{array} \Leftrightarrow \begin{array}{l} a < b + c \\ a > b - c \\ a > c - b \end{array} \Leftrightarrow |b - c| < a < b + c$$

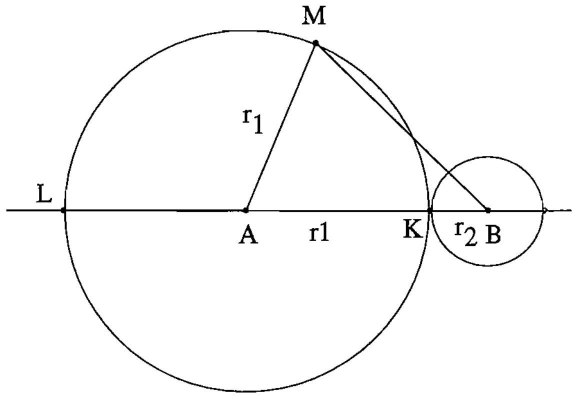
III. Nécessité des reformulations des énoncés et des changements de points de vue

III.1. Nécessité apparente dans le début d'un problème de CAPES

Il s'agit des deux premières questions du problème 2 de CAPES interne 1993 annonçant le thème: cercles tangents.

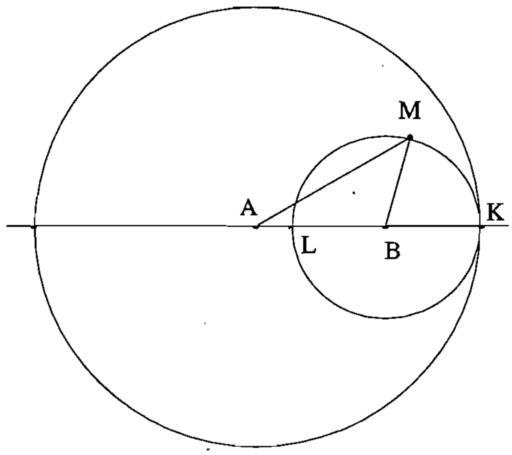
1- Deux cercles $\mathcal{C}_A$ (A, r_1) et $\mathcal{C}_B$ (B, r_2) avec $AB = r_1 + r_2$ Démontrer que ces cercles ont un seul point commun K sur [AB] et que, hormis K, tout point de l'un est extérieur au disque déterminé par l'autre

On a $AB = r_1 + r_2$ On prend $AK = r_1$
$KB = r_2$ $K \in [AB]$ $M \in C_A$ $M \neq K$
L'inégalité triangulaire donne: $MA + MB > AB$ stricte pour tous les sommets M des vrais triangles MAB mais aussi tout point hors du segment [AB] donc en particulier pour L
$r_1 + MB > r_1 + r_2$
d'où $MB > r_2$ donc M extérieur à C_B
De même: si $M \in C_B$ il est extérieur à C_A



2- Deux cercles $\mathcal{C}_A$ (A, r_1) et $\mathcal{C}_B$ (B, r_2) avec $AB = |r_1 - r_2|$.
Démontrer qu'ils ont un seul point commun K sur (AB) et que tout point du cercle de rayon plus petit est intérieur au disque déterminé par l'autre

On a $AB= |r_1 - r_2|$ On prend: $r_1 > r_2$,
$BK = r_2$ $K \in [Bx)$, $M \in C_B$ $M \neq K$
L'inégalité triangulaire donne $MA < MB + AB$
qui est valable pour les vrais triangles MAB et pour tout point M hors de [Bx) donc aussi pour L de [AB] donc $MA < r_2 + r_1 - r_2$ donc $MA < r_1$



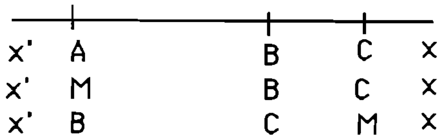
Le corrigé ci-dessous (Bories-Longuet / Lévy-Bruhl / Jarraud- Editions Masson) bute sur une difficulté en 2 ce qui attire l'attention.

"1 - Soit M un point de $\mathcal{C}_A$ distinct de K, l'inégalité triangulaire donne
$MA + MB > AB$ soit $r_1 + MB > r_1 + r_2$ ou $MB > r_2$
Donc tout point de $\mathcal{C}_A$ distinct de K est extérieur à $\mathcal{C}_B$ et de même [...]

2 - Soit M un point de $\mathcal{C}_B$, l'inégalité triangulaire s'écrit $MA \leq MB + AB = r_2 + r_1 - r_2 = r_1$ avec égalité si et seulement siu M, B et A sont alignés (et dans cet ordre), si et seulement si M est en K.
Les points de $\mathcal{C}_B$, autres que K sont donc intérieurs à $\mathcal{C}_A$;"

En 2 ce corrigé écrit l'inégalité large, puis par une rédaction laborieuse arrive à l'inégalité stricte. En 1 il n'y avait pas eu ce problème en apparence. En fait la rédaction de la question 1 n'a pas traité la difficulté parce qu'il s'agissait d'éliminer un point d'un segment, alors qu'on a eu plus de scrupules en 2 pour écarter un point d'une demi-droite.

Il s'agit d'un problème de reformulation par substitution de lettres



Reprenons notre formulation précédente notée (2)
(2) AC = AB + BC $\Leftrightarrow$ A,B,C alignés dans cet ordre
On remplace A par M :

(i) MC -MB = BC $\Leftrightarrow$ M $\in$ [Bx')
On échange A en B, B en C et C en M
(ii) BM = BC + CM $\Leftrightarrow$ MB - MC = BC $\Leftrightarrow$ B, C , M alignés dans et ordre $\Leftrightarrow$ M $\in$ [Cx)
d'où $|MC - MB| = BC$ $\Leftrightarrow$ M $\in$ [Bx') ou M $\in$ [Cx) résulte de (i) et (ii)

Tout ceci consiste en une simple substitution si on s'en tient à l'expression "alignés dans cet ordre". Et pourtant :

- une substitution de lettres en géométrie est plus difficile qu'une substitution dans le cadre algébrique parce que la figure est sous-jacente.
- M est une variable, B et C des paramètres. Changer une somme en différence fait passer de la caractérisation d'un segment à celle d'une demi-droite moins "transparente" que le segment.
- Le complémentaire d'un segment est constitué de deux demi-droites dont la caractérisation introduit une valeur absolue. Ceci peut se reformuler en disant qu'un segment peut être considéré comme une ellipse dégénérée alors que les deux demi-droites seraient une hyperbole dégénérée.

Nous sommes loin de la naïveté de l'évidence spatiale du "chemin le plus court", connaissance qui peut être celle des élèves, à l'expertise nécessaire pour utiliser IT comme un savoir mathématique.

Le début des problèmes récents de CAPES externe et a fortiori interne porte souvent sur des connaissances vues presque au début du secondaire: 4ème / 3ème /2de Pourquoi ?

Réponse de M (maître de conférence qui enseigne en PLC1 pour le CAPES externe à Bordeaux) : "Poser au CAPES une première question de niveau élémentaire permet de vérifier la capacité du candidat à mettre en forme la démonstration d'un résultat bien connu."

Une autre réponse a priori : Pour enseigner les mathématiques du secondaire il faut les connaître de façon à pouvoir en faire certaines choses (poser des problèmes, anticiper des erreurs, des stratégies...) autres que ce qu'un étudiant peut en faire (résoudre des exercices). (Aline Robert, Exposé sur la formation des PLC2 en IUFM, Rouen, 1995). On pourrait donc envisager une reprise au CAPES qui pourrait être différente.

Nous avons demandé à cet ami qui enseigne en PLC1 à Bordeaux (noté M) ainsi qu'à six professeurs du secondaire (PES) de tenter de résoudre ces deux premières questions du problème de CAPES

Réactions des sept "cobayes":

Ils n'ont pas aperçu le problème de rédaction précédent, mais il est vrai qu'ils ont eu peu de temps. En revanche la première question qu'ils ont posée est plus embarrassante.

- Tous ont dit : Qu'est-ce qu'on peut supposer connu ? C'est difficile car on ne sait pas.
- Puis tous supposent connue IT avec plus ou moins d'assurance

Trois PES écrivent sans s'exprimer

Les trois autres PES

- veulent démontrer d'abord que les cercles ont un seul point commun[1].
- se demandent si on peut admettre l'unicité de K sur le segment (sachant que AK= r_1 et que $K \in AB$)
- puis utilisent IT pour montrer que tout point de l'un est extérieur ou intérieur à l'autre

M dit alors que IT suffit pour tout démontrer

Hypothèse sur la réaction des PES : Mon outil d'analyse est le rapport institutionnel au savoir

1 - Les enseignants travaillent avec le rapport qu'ils ont construit à PRC dans la position d'enseignants. Ils traitent en premier lieu de façon indépendante la question sur le nombre de points communs aux deux cercles car dans le contexte de la classe ils savent que le problème se pose. En revanche le problème des positions relatives extérieur ou intérieur ne se pose pas et ils le traiteront formellement avec l'IT sans y trouver un grand intérêt.

2 - Les enseignants se mettent en position d'étudiants vis à vis de l'institution universitaire qui leur pose ce problème et donc se tiennent près du texte qui, par les deux questions séparées, induit cette séparation en deux parties.

III.2. Modalités d'utilisation de l'IT dans ce problème

Le corrigé et le test avec les enseignants permettent de dégager un certain contexte dans lequel a fonctionné l'IT dans ce problème

1- Ambiguïté entre ce qui est connu et ce qu'il faut prouver

- Nous avons noté une différence entre le corrigé des deux questions
- Les enseignants ont manifesté une incertitude

Notre outil d'analyse de ce phénomène est la transposition didactique sur trois objets :

distance : notion paramathématique devenue mathématique de 70 à 78 d'où la question des enseignants sur l'unicité d'un point K déterminé par AK sur le segment [AB]

IT est vérifiée dans un triangle (i ou ii) - Théorème mathématique démontré jusqu'en 1978

En 1978 il disparait des programmes de collège et lycée. Il devient pré-construit

1 Par exemple en supposant un autre point commun hors de la ligne des centres, ce qui implique un troisième point commun symétrique de ce dernier par rapport à la ligne des centres. or deux cercles différents ne peuvent avoir trois points communs car un cercle est déterminé par trois points.

de 78 à 87 .

En 1987 c'est à nouveau un théorème mathématique en collège, énoncé et admis sous sa forme (i). Peu de manuels donnent la forme (ii)

PRC : Théorème mathématique et démontré jusqu'en 70. Il a disparu des programmes de collège et lycée depuis 1970 bien qu'il soit censé être connu quand il est nécessaire au lycée. Il reste dans un pré-construit depuis 70 mais il revient explicitement dans certains manuels de collège sous forme d'exercice depuis 90

Ceci explique les hésitations des enseignants. Il faut démontrer PRC avec IT, mais ces théorèmes ont tous les deux été considérés à une époque dans le secondaire comme si évidents qu'on ne les énonçait même pas. Pourquoi faudrait-il en démontrer un en supposant l'autre connu et par l'inverse?

2-Complexité dans l'usage de l'inégalité triangulaire

Il faut savoir

-manipuler des inégalités complexes,

-anticiper la forme utile selon la question,

-caractériser un segment [AB] par MA+MB=AB

-caractériser deux demi-droites par $|MA - MB| = AB$, et, sans valeur absolue, une demi-droite seule

IV. Organisation du savoir dans l'environnement de IT

IV.1. IT savoir mathématique dès le collège

Ce problème permet de revoir comment IT (théorème direct) sert à démontrer PRC (autre façon de formuler la réciproque de IT). Est-ce sous cette forme que l'enseignant de collège a besoin de pratiquer les différents liens possibles entre ces deux objets? Mon outil d'analyse est ici la théorie des situations d'enseignement.

La situation d'enseignement de IT que l'on trouve dans de nombreux manuels de 4ème édités depuis 1992 se présente ainsi. On veut établir quelle(s) propriété(s) nécessaire(s) sur les longueurs des côtés possèdent tous les triangles (théorème 1, i et ii). Pour que les élèves trouvent l'existence de cette relation, le professeur les met en situation d'action: construire un triangle dont ils connaissent les mesures des côtés. Pour certaines mesures qui satisfont une condition à trouver un triangle existe (condition suffisante) pour d'autres qui ne la satisfont pas le triangle n'existe pas (contraposée de la condition nécessaire). L'élève a besoin des deux pour induire l'existence d'une relation. La situation provoque ainsi l'arrivée simultanée du théorème direct et du théorème réciproque.

Ceci est un phénomène général dans ce type de situation d'enseignement. Il se produit de la même façon par exemple pour le théorème de Pythagore, le but de l'action étant alors de construire non seulement un triangle, mais un triangle rectangle avec trois mesures données.

Le premier objectif du maître est la formulation par les élèves de l'existence d'une relation, puis la formulation de la relation elle-même et sa validation. Les formulations des élèves sont hésitantes et diverses, avec la somme ou la différence des mesures, avec une condition sur les trois côtés ou seulement sur le plus grand ou le plus petit. Nous avons vu en III l'importance de savoir passer en mathématique d'une formulation à l'autre. Pour le cas limite il y a doute.

Différencier deux théorèmes direct et réciproque, identifier celui dont on vient de se convaincre et chercher éventuellement à démontrer l'autre, est un travail qui vient quand on n'a plus de doute sur la validité de la condition trouvée car il s'agit d'un problème d'organisation des savoirs qui est de second niveau. Etablir un lien logique entre théorème direct et réciproque ne sera donc qu'une partie du travail du professeur qui aura utilisé cette situation d'action.

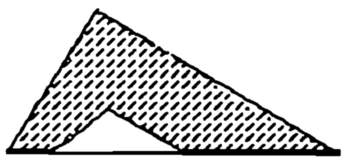
Avant cela, construire une situation de validation est un problème d'enseignement important car les possibilités de preuve dépendent de l'organisation du savoir antérieur, de sorte que le problème de la progression se pose au maître.

Nous avons montré dans un autre article de cette revue (n° 40) que la possibilité pour les élèves de se convaincre que certains triangles qu'ils ont tracés sont nécessairement des triangles plats dépend de leur savoir antérieur sur la médiatrice, sur la reconnaissance d'un triangle isocèle tracé à partir du sommet (et non de la base), sur la détermination d'un cercle par trois points, éventuellement sur la distance d'un point à une droite. Un professeur attentif remarquera même qu'un doute sur le troisième cas d'isométrie des triangles se présente en même temps, les élèves n'étant pas persuadés qu'ils obtiennent le "même" triangle avec les trois mêmes longueurs s'ils changent l'ordre des côtés lors de la construction. Une situation d'action puis une situation de formulation permettent de problématiser la question pour l'élève, puis une organisation minimale des savoirs est indispensable au professeur pour gérer la relation didactique et institutionnaliser un discours organisé qui servira de référence ensuite.

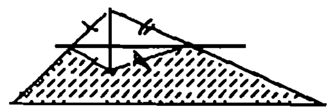
Distinguer non pas deux énoncés mais trois énoncés: théorème 1, théorème 2 et PRC est laissé à la charge du professeur. Il y a peu de chances qu'il puisse le faire seul. Il a échappé à l'énoncé d'axiomes déconseillé par les instructions actuelles même en seconde (B.O.n°20), mais ce qu'il a gagné sur le plan sémantique il l'a perdu sur le plan de l'organisation puisque les propriétés arrivent inorganisées

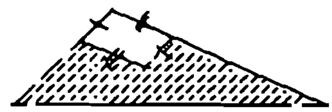
Le défaut d'organisation du savoir dans les débuts de la géométrie est une des causes de l'effondrement des possibilités de validation par les élèves. Pratiquer la démonstration localement en géométrie comme moyen de se convaincre est un prérequis avant de pouvoir prendre en charge l'organisation globale, mais aucune pratique de validation locale au moment de l'étude d'une notion nouvelle n'est possible s'il n'y a pas une organisation partielle des connaissances antérieures, avec travail sur les formulations diverses des résultats et possibilités de changer de points de vue.

IV.2. IT connaissance des élèves



1 - Une figure étant donnée (par exemple un triangle ou un rectangle), les élèves de 6ème doivent dessiner une figure d'aire plus petite et de périmètre plus grand. L'inégalité triangulaire arrive sans problème, loin du cas limite, comme solution de cette question:



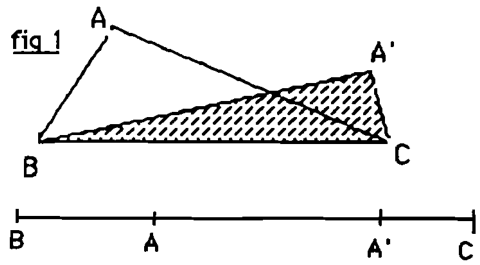


2 - Un triangle étant donné (côtés 6, 5, 3 par exemple), la question en 5ème est maintenant de construire (règle et compas) une figure de même périmètre (14) et d'aire plus petite. Selon les élèves, il y a deux catégories de solutions. Dans une catégorie la forme "triangle" disparaît comme ci-contre:

La forme hachurée a le même périmètre que le triangle initial (symétrie ou parallélogramme)

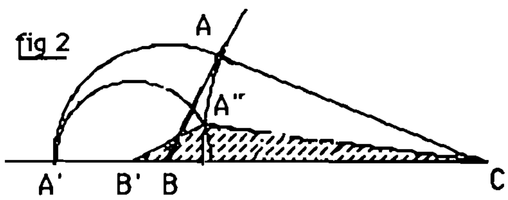
Dans l'autre catégorie, l'élève s'impose de dessiner un autre triangle, et il y a alors deux cas:

Dans le premier dessin une base est conservée et l'élève diminue la hauteur relative à cette base en conservant constante la somme des deux autres côtés; dans le second dessin, une base augmente un peu en empruntant à un des côtés et la hauteur relative à cette base diminue beaucoup.



Dans la fig 1 ci-contre BA + AC = BA'+A'C qui peut se réaliser avec le compas en reportant la somme des longueurs sur un segment auxiliaire de 8 cm (5+3)

Dans la fig 2 ci-contre: CA = CA" et BA = BA' et B'A" =B'A' de sorte que CB + BA = CA' constante



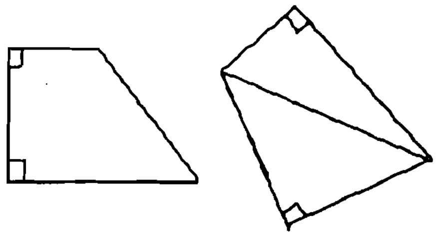
Dans les deux cas on arrive au triangle plat en demandant aux élèves le triangle d'aire la plus petite possible. Cette situation doit être davantage étudiée. Elle présente l'inconvénient sur une situation voisine (estimer l'aire d'un triangle dont on donne les mesure des trois côtés en comptant le carreaux d'un quadrillage- Arsac-1994) de supposer une certaine familiarité avec l'aire du triangle puisqu'ici c'est l'élève qui choisit les côtés du triangle et a la responsabilité de la diminution de l'aire. Elle présente l'avantage de faire réaliser par les élèves eux-mêmes l'aplatissement "dynamique" du triangle des deux façons: soit le sommet vient sur le segment constituant le troisième côté, soit le sommet vient sur une des demi-droites prolongeant le segment. Nous avons noté en III que ces deux points de vue, correspondant à des formulations différentes doivent être disponibles. Une situation analogue de passage à la limite avec des rectangles de périmètre constant existe. Pour un périmètre donné (18 par exemple) les élèves doivent tracer plusieurs rectangles. La question du rectangle d'aire minimale posée à des élèves de 6ème les oblige à passer aux décimaux et à leur produit alors que la question du rectangle d'aire maximale peut être réservée à de plus grandes classes.

V. Deux types de situations dans les débuts de la géométrie

V.1. Réaliser une figure et montrer qu'elle est "impossible"

Le problème est de faire entrer certains élèves dans une remise en cause de l'existence d'une figure qu'ils ont faite, par exemple un triangle 2, 5, 7. C'est une situation fondamentale de la géométrie, déjà donnée par Guy Brousseau dans le contexte de l'agrandissement du "petit triangle" formé par les trois médiatrices d'un grand triangle. Pour que le débat sur le triangle plat aboutisse, il faut que certains élèves s'engagent dans la problématique suivante: il y a des difficultés à faire cette figure, peut-être puis-je prouver en raisonnant avec cette figure qu'elle n'existe pas. Dès la 6ème, les élèves peuvent être mis dans une situation de ce genre dans laquelle le débat aboutit sans difficultés. Cela se fait en trois temps[2]:

- tracer un quadrilatère ayant un angle droit et un seulement
- tracer un quadrilatère ayant deux angles droits et deux seulement. Ils trouvent facilement deux sortes de dessins (ci-contre)



- tracer un quadrilatère ayant trois angles droits et trois seulement. Certains essaient de tricher jusqu'à ce que l'unanimité se fasse sur l'impossibilité de réaliser une telle figure grâce aux théorèmes sur les parallèles et perpendiculaires institutionnalisés avant.

De telles situations contribuent à construire le statut des objets géométriques qui ne sont pas des dessins matériels mais des concepts. Notre hypothèse est que la situation de débat sur le triangle plat ne peut aboutir sans être précédée d'une double préparation de la classe:

- rencontre avec d'autres situations de figures "impossibles" où la preuve est plus simple
- disponibilité d'un savoir antérieur organisé (voir IV-1)

V.2. Nombre minimum d'énoncés pour obtenir une figure

Une figure est accompagnée d'une liste d'affirmations vraies sur cette figure, trouvées par l'ensemble de la classe ou données par le professeur. Les élèves en choisissent quelques-unes en anticipant sur la possibilité de réaliser la figure uniquement avec ces énoncés. Si c'est possible, ils doivent pouvoir ensuite prouver les autres

2 Réalisé au collège du Grand Parc- Bordeaux- 1995 - Enseignant: Jean Lafourcade

énoncés à partir de ceux qui ont servi à construire la figure[3]. Ont gagné les élèves qui ont pris un nombre d'hypothèses minimum et réalisé le plus de combinaisons possibles: hypothèses-conclusions. L'arrivée simultanée des théorèmes directs et réciproques est ainsi prise en compte.

Par exemple un triangle ABC étant donné, il s'agit de tracer à la règle et au compas un triangle dont les côtés ont pour mesure la moitié de ceux de ABC. Cette question est posée avant toute leçon sur la droite des milieux du triangle ou le théorème de Thalès. Plusieurs stratégies sont utilisées[4] :

- tracé des trois médiatrices pour avoir les trois milieux M, N, P et soit construction du triangle demandé à côté de ABC en utilisant les demi-longueurs de côtés, soit tracé du triangle MNP répondant à la question
- tracé de deux médiatrices pour avoir deux milieux M et N de [AB] et [AC] par exemple et le triangle AMN et désigné comme solution
- tracé d'une seule médiatrice pour avoir le milieu M de [AB] par exemple et par M tracé de la parallèle à (BC) qui coupe [AC] en N, le triangle solution est AMN

En se limitant aux deux dernières stratégies qui sont reconnues comme les deux plus économiques, aucune ne prévalant sur l'autre, l'ensemble de la classe se trouve ainsi avec une figure et quatre affirmations sur cette figure:

1- M milieu de [AB] - 2- N milieu de [AC] - 3- (MN) // (BC) - 4- MN = BC/2

Le jeu indiqué plus haut, permet de penser à adjoindre dans les affirmations 3 et 4 une indication sur la place de M ou N soit $M \in [AB]$ ou $N \in [AC]$. Certains par exemple cherchent à démontrer que les affirmations 1 et 4 ainsi complétée suffisent.

V.3. Deux problématiques différentes

Dans les deux types de situations ci-dessus, la validation se fait à l'intérieur de la théorie de la géométrie, nous sommes dans une problématique théorique. D'autres situations dans lesquelles la validation est empirique sont des situations de maîtrise de l'espace. Par exemple les situations de reproduction de figures (triangles ou quadrilatères) où la validation se fait en superposant les deux figures. Le résultat est déclaré valable avec une certaine marge d'erreur permise (1mm près). Pour réussir l'élève doit entrer dans une modélisation géométrique, mais la validation finale n'est pas théorique. Les objets sur lesquels l'élève travaille sont matériels. La difficulté dans les débuts de la géométrie vient de ce que le professeur est contraint de mener de front les deux problématiques, celle de la maîtrise de l'espace et celle de la géométrie, et ceci pendant plusieurs années C'est justement là que se fait l'articulation des connaissances et des savoirs.

---

3 Après avoir fait une première expérimentation nous avons vu que l'idée avait été suggérée avec d'autres figures dans "Suivi scientifique 4ème"- 1987-88- par l'équipe de l'IREM de Strasbourg

4 Réalisée dans deux classes de 4ème de collège (Collège Grand- Parc- Bordeaux- et Collège de Lesparre-Gironde et également avec des étudiants IUFM d'Aquitaine en première année de PE)

Bibliographie

ARTIGUE M. et ROBINET J. (1982) Conceptions du cercle chez les enfants de l'école élémentaire, *Recherches en didactique des mathématiques*- n° 3-1, La Pensée Sauvage-Grenoble

ARSAC G. CHAPIRON G. COLONNA A. GERMAIN G. GUICHARD Y. MANTE M. (1992) *Initiation au raisonnement déductif au collège*, Presses universitaires de Lyon

ARSAC G (1994) Vérité des axiomes et des théorèmes en géométrie Vérification et démonstration- *Petit x* n° 37 pp 5 à 33

BERTE A.(1989) Rôle et conception des programmes de mathématiques - Enchaînement dynamique de quelques situations didactiques, *Actes de la C.I.E.A.E.M. 41 ème Rencontre* Bruxelles

BERTE A.(1993) *Mathématiques dynamiques*, et BERTE A. (1996) *Mathématiques du collège au lycée*, Collection Perspectives didactiques, Nathan Pédagogie

BERTE A (1995) Réflexions sur inégalité triangulaire et distance d'un point à une droite à partir d'observations de classe, *Petit x* n° 40 pp 41 à 63

BERTE A (1995) Différents ordres de présentation des premières notions de géométrie métrique dans l'enseignement secondaire- *RDM* Vol 15 n°3 pp 83 à 130

BERTHELOT R. et SALIN M.H. (1992)*L'enseignement de l'espace et de la géométrie dans la scolarité obligatoire*, Thèse de Didactique des mathématiques, Université de Bordeaux 1

BROUSSEAU G.(1983) Étude de questions d'enseignement. Un exemple: la géométrie, *Séminaire de didactique des mathématiques et de l'informatique*, LDS-IMAG- Grenoble

BROUSSEAU G. (1986) *Théorisation des phénomènes d'enseignement des mathématiques*, Thèse de Doctorat d'Etat- Université de Bordeaux 1

CHEVALLARD Y (1989) *Le concept de rapport au savoir*, Publication de l'IREM de Marseille

CHEVALLARD Y.(1991) *La transposition didactique du savoir savant au savoir enseigné* , La Pensée sauvage, Grenoble

CHEVALLARD Y. et JULLIEN M.(1991) Autour de l'enseignement de la géométrie au collège , *Petit x* N° 27

DOUADY R (1984) *Jeux de cadre et dialectique outil objet*, thèse de doctorat, Université de Paris 7

FELIX L.(1964) *Initiation à la géométrie en classe de cinquième-* Dunod

IREM DE BORDEAUX (1987 réédition revue et augmentée en 1992- Berté et coll.: *Enseignement des mathématiques utilisant la "réalité"*, Bordeaux 1

IREM DES PAYS DE LOIRE (Barbin, Charlot, Delgoulet, 1986) *L'enseignement des mathématiques par les situations problèmes au collège,* Le Mans

PLUVINAGE F, RAUSCHER J.C, MAURETTE D, HINDELANG C, (1988) *Vers l'apprentissage du raisonnement en géométrie*, Suivi scientifique 4ème, Inter-IREM

REYNES F. (1991) Géométrie ou trahison des dessins, *Petit x* , n° 26, pp. 73 à 75