LES CONNAISSANCES MATHÉMATIQUES
- DE L'ENSEIGNANT
- POUR L'ENSEIGNEMENT

Isabelle BLOCH
IUFM d'Aquitaine et LADIST,
Université de Bordeaux 1

Introduction

Cet article s'inscrit dans le cadre plus général d'un travail sur les *connaissances et les savoirs,* réflexion commencée dans mon travail de DEA (Bloch, 1995) et poursuivie dans une thèse de didactique des mathématiques dont le sujet est la validation en analyse, thèse non achevée à ce jour. Dans ce cadre mon travail en formation des professeurs, à l'IUFM d'Aquitaine, m'a poussée à m'interroger sur le versant « caché » des connaissances mathématiques, celles que l'enseignant met en oeuvre dans sa classe, pour contrôler la situation au niveau cognitif.

La question de l'existence de connaissances mathématiques pour l'enseignement, c'est-à-dire spécifiques de l'enseignement, peut sembler peu pertinente : les professeurs de mathématiques de lycée et collège ne sont-ils pas formés à l'Université et préparés au CAPES ? Cette formation n'assure-t-elle pas *de facto* les connaissances nécessaires ? L'aphorisme « Qui peut le plus peut le moins » est largement partagé chez les mathématiciens et dans les salles de professeurs, sans parler de la noosphère ; de plus pour nombre d'enseignants, chevronnés ou débutants, l'enseignement des mathématiques au collège et au lycée s'obtient par addition de connaissances universitaires et d'expérience pédagogique, le quota des unes et de l'autre variant tout au long de la carrière, les unes décroissant tandis que la dernière croit. Cette addition suffirait à assurer le fonctionnement correct de la transposition didactique.

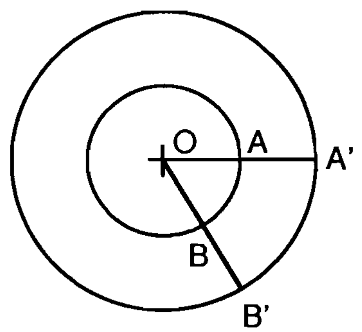
Un lieu où peuvent peut-être s'éprouver ces certitudes est l'IUFM, en formation de professeurs lycée - collège. A l'origine de cette réflexion il y a donc des remarques de formateurs préparant les étudiants inscrits au CAPES : « Pour les candidats au CAPES, les connaissances élémentaires ne sont pas mobilisables » ; et des questions de formation des professeurs stagiaires PLC2 (professeurs de lycée et collège 2ième année). Notre ambition est de transformer en *question de la didactique* ces questions de formation.

En formation, le formateur est amené à tenter d'expliciter la logique du fonctionnement d'une situation de classe. Les stagiaires travaillent d'habitude avec des manuels, et les conseils de leur tuteur ; si une situation ne fonctionne pas, dans le cours habituel de l'enseignement le problème reste non posé, c'est juste une leçon qui ne s'est pas très bien passée. Par contre en IUFM le formateur est tenu de justifier ses choix didactiques. Suivant sa formation personnelle, il le fera en donnant en exemple une situation « qui marche » ; ou bien il lui faudra analyser la transposition didactique et les variables de la situation.

L'anecdote suivante est assez représentative de ce qui est vécu en formation:

Une stagiaire propose, en groupe de formation de mathématiques, d'introduire le radian en classe de seconde de la façon suivante :

On donne deux cercles concentriques C et C' de centre O, de rayons respectifs R et R', deux points A et B sur C, deux points A' et B' sur C' (O, A, A' alignés; O, B, B' alignés, voir figure ci-contre). L'angle (OA,OB) a pour mesure α en degrés, $0< \alpha < 90$.



On sait alors que OA'/OA = R'/R et OB'/OB = R'/R, donc que (AB) et (A'B') sont parallèles et que A'B'/AB = R'/R; on admet que c'est aussi vrai pour arcA'B'/ arcAB . On demande ensuite aux élèves d'en déduire une relation entre la longueur d'un arc de cercle et le rayon du cercle.

Les autres stagiaires n'approuvent pas cette introduction, et la raison qu'ils en donnent est qu'on ne peut pas admettre, avec les élèves, le passage de A'B'/AB= R'/R à : arcA'B'/arcAB = R'/R.

A la question: « que faire alors ? » ils déclarent majoritairement qu'il faut *démontrer* cette assertion. Et au formateur qui s'étonne: « comment? » ils répondent: « En prouvant qu'une homothétie de rapport k>0 multiplie les longueurs par k. »

« En seconde ?! Comment ? » réitère le formateur !

« Et bien, pour une telle homothétie, comme $\overrightarrow{A'B'} = k\,\overrightarrow{AB}$, les longueurs sont multipliées par k ».

Un stagiaire du groupe fait enfin remarquer qu'il ne suffit pas que les *vecteurs* soient multipliés par k pour que toutes espèces de *longueurs* le soient, mais l'ensemble des stagiaires parait peu convaincu, faute sans doute de pouvoir convoquer et contrôler les méthodes qui permettent effectivement de passer de l'affirmation sur les vecteurs à celle sur les longueurs.

Ces méthodes comprennent forcément un recours à l'analyse ; en effet pour passer de l'affirmation sur les segments à celle sur les courbes quelconques continues, il est nécessaire de franchir quelques étapes :

- l'espace $\mathbf{R}^2$ (ou $\mathbf{R}^3$) étant muni de la topologie de la norme associée à la distance usuelle, toute homothétie, étant une application linéaire, est continue (en fait toute norme munit $\mathbf{R}^2$ d'une topologie qui en fait un espace vectoriel topologique, où toutes les applications linéaires et multilinéaires sont continues) ;
- la longueur d'une courbe continue AB (c'est-à-dire une courbe paramétrable par des fonctions x(t), y(t) continues) est alors définie comme étant la limite quand n tend vers $+\infty$, si elle existe et ne dépend pas du découpage, de la longueur de la « ligne brisée », $\sum_{i=1}^{n} A_iB_i$; soit, si les fonctions sont dérivables, par une intégrale c'est-à-dire aussi un passage à la limite ; l'homothétie étant, comme nous l'avons dit, continue, la relation A'B'= kAB étant vraie pour tout segment, elle est bien vraie pour les courbes par passage à la limite, sous réserve que cette limite existe, c'est-à-dire que $\sum_{i=1}^{n} A_iB_i$ admette une borne supérieure.

Remarquons que si le paramétrage de la courbe est dérivable, on connaît une formule simple pour calculer la longueur s de celle-ci[1] car $ds = \sqrt{dx^2 + dy^2}$; il n'en est pas de même si les fonctions x, y sont seulement continues, et cette longueur peut même être infinie dans certains cas (courbe fractale par exemple).

Que se passe-t-il si l'enseignant n'accepte pas d'admettre ce résultat de la mesure des courbes, et choisit un autre mode d'introduction ? Après tout on pourrait se dire qu'il n'y a rien de grave à introduire le radian autrement... C'est d'ailleurs ce qui est fait dans certains manuels. Prenons par exemple le Terracher de Seconde : après quelques rappels sur les angles et le cercle trigonométrique, on trouve des définitions du radian comme : « La mesure d'un angle en radians est proportionnelle à sa mesure en degrés. L'angle plat (180°) mesure π radians. ». (Terracher, Seconde, Hachette). Suit un tableau de proportionnalité. De même dans Déclic (Hachette). Le manuel de Seconde Pythagore (Hatier) définit 1 radian comme la mesure d'un angle au centre qui intercepte un arc de longueur égale au rayon du cercle, mais sans transition on en revient au tableau de proportionnalité.

Or ces définitions, sauf peut-être dans le Pythagore (mais là aussi on en revient tout de suite au tableau de proportionnalité), mettent le radian sur le même niveau de savoir que le degré, puisque c'est seulement une autre mesure proportionnelle. Alors pourquoi en introduire une autre ? quelle est sa spécificité? quelle est son utilité ? le savoir mathématique qui fait du radian une mesure des angles *pas comme les autres* est ici perdu pour les élèves.

Ce que nous pointons ici, c'est la nécessité pour l'enseignant de faire appel à des

1 Toutes ces notions sont exposées de façon un peu désuète peut-être mais avec exemples et explications abondants, dans Piskounov, « Calcul différentiel et intégral », éditions Mir, Moscou, 1966.

connaissances mathématiques, et ceci afin d'introduire et de contrôler *l'activité mathématique des élèves*. De ce fait nous considérons que ces connaissances sont une partie des connaissances didactiques, c'est *la part mathématique* de ces connaissances.

En effet si l'enseignant ne dispose pas des connaissances nécessaires pour aller chercher, là où il est, c'est-à-dire pas toujours tout près (ni tout prêt) le savoir mathématique utile à la situation, il nous parait illusoire d'espérer qu'il puisse installer dans sa classe une situation pertinente pour le savoir visé.

De même l'enseignant possédant des connaissances mathématiques non didactiques est tout aussi démuni, nous l'avons dit : l'exemple typique est le jeune agrégé en début de deuxième année d'IUFM, impuissant à faire vivre le savoir mathématique dans une classe de Quatrième, c'est-à-dire à récupérer les connaissances mathématiques des élèves, à aider les élèves à structurer leur champ de connaissances.

Ici « connaissances » est entendu au sens large, c'est-à-dire aussi bien connaissances privées que savoirs socialement reconnus, tel que l'emploie Margolinas par exemple dans l'analyse du milieu (Margolinas, 1994). Nous nous réservons de distinguer connaissances et savoirs lorsque notre propos le nécessitera.

Dans cet article, nous nous intéressons à ces connaissances mathématiques spécifiques à l'enseignement, et interrogeons quelques unes de leurs caractéristiques. En particulier la question de la possibilité de leur *transmission* est essentielle pour la formation en IUFM. Dans toute la suite, nous désignerons par KME les connaissances mathématiques de l'enseignant ou pour l'enseignement, et par KMU les connaissances mathématiques universitaires.

1. Différents modèles d'interactions entre KME et KMU

A priori les connaissances préexistantes chez l'enseignant débutant sont les connaissances universitaires. Il parait raisonnable de penser que ce sont ces connaissances universitaires que l'enseignant va adapter pour son enseignement, avec de plus ou moins grandes difficultés (voir infra).

Cependant une rapide analyse des contenus des programmes de collège et lycée fait apparaître des domaines qui peuvent être absents dans la formation universitaire et même secondaire à l'heure actuelle, comme le domaine arithmétique. L'enseignant dans ce cas ne pourra suivre la procédure d'adaptation ci-dessus mentionnée. Il nous faut donc envisager plusieurs types d'articulations possibles entre KMU et KME.

1.1 Adaptation et réorganisation de KMU

Le passage du niveau universitaire au niveau élémentaire pourrait n'être qu'une « application » de connaissances, au sens où on l'entend lorsqu'on applique un cours pour faire un exercice par exemple. Il nous semble qu'il n'en est rien. Plusieurs phénomènes apparaissent, qui différencient nettement la transformation des KMU en

KME d'une adaptation interne aux savoirs « universitaires scolaires » et s'opposent à cette application :

1.1.1 La non-visibilité des savoirs

Les savoirs nécessaires ne sont pas *visibles* dans le contexte ; or le savoir universitaire « scolaire » (celui des étudiants en formation) fonctionne sur un modèle de visibilité et de lisibilité : le texte du savoir est toujours présent, c'est le cours, il s'agit de l'appliquer en travaux dirigés. Dans l'exemple détaillé ci-dessus, ni la notion de limite ni celle d'intégrale ne sont à aucun moment visibles dans la question initiale.

1.1.2 L'hétérogénéité du champ

La théorie qui permet d'appliquer ces savoirs se situe dans le champ de l'analyse et non dans celui de la géométrie comme le texte et la figure pourraient le laisser penser. Or les étudiants, à l'université, étudient dans des unités de savoir relativement étanches et sont probablement peu habitués à faire des passerelles entre les différents champs théoriques. Il est encore plus difficile de le faire lorsque la théorie n'est plus perceptible.

1.1.3 L'illusion de l'évidence

Comme très souvent dans cette réorganisation, des résultats « élémentaires », qui fonctionnent pour l'enseignant comme pour les élèves sur le mode de l'évidence (une homothétie de rapport $k>0$ multiplie les longueurs par k) sont contrôlés par des outils mathématiques relativement complexes. Or rien n'est plus difficile que de mettre en cause l'évidence, et surtout d'imaginer qu'elle ne peut être justifiée que par des outils mathématiques élaborés. D'ailleurs jusqu'à la licence on apprend le texte du savoir, ce n'est qu'en formation à la recherche (ou peut-être dans la préparation à l'agrégation) qu'on peut apprendre à questionner l'évidence. Ceci rejoint le phénomène suivant :

1.1.4 La contagion de l'élémentaire

Une lecture hâtive des programmes pourrait laisser croire que toutes les affirmations qu'ils contiennent au niveau n sont démontrables par des moyens du même niveau n, sauf théorèmes « admis » (par exemple en analyse le théorème des valeurs intermédiaires, le théorème sur dérivabilité et continuité ; en géométrie le théorème de Thalès, la relation entre inégalité triangulaire et intersection d'une droite et d'un cercle...) ; cependant il existe dans les programmes de nombreux résultats admis tout en n'étant pas pointés comme tels.

Mais pour un professeur, faute d'avoir durant ses études interrogé les fondements des mathématiques, certains énoncés se sont « naturalisés » au sens où l'entend Chevallard ; il en est probablement ainsi de l'énoncé sur les homothéties. Un autre exemple serait donné par le périmètre d'un cercle et l'aire du disque correspondant : peut-on expliquer par des moyens élémentaires qu'il s'agit dans les deux cas du même nombre π ?

1.1.5 L'incompatibilité des savoirs savants et des programmes

Ce peut être le cas lorsque la transposition didactique d'un objet de savoir, présent dans l'institution scolaire, prévoit un enseignement de pratiques incompatibles avec celles du savoir universitaire : c'est le cas de la proportionnalité, par rapport aux applications linéaires[2] ; un autre exemple est donné par Assude à propos des fonctions puissances d'exposants rationnels en Grande-Bretagne : l'enseignement au lycée prévoit deux fonctions réciproques à la fonction carré : $\sqrt{x}$ et $-\sqrt{x}$; le professeur se trouve ensuite dans l'impossibilité de justifier les fonctions puissances d'exposants rationnels (voir § 2).

En conclusion de ce paragraphe nous pouvons donner deux exemples (non exhaustifs) de cette adaptation difficile :

• Exemple 1. L'introduction des vecteurs du plan.

La distance transpositionnelle entre le savoir universitaire (algèbre linéaire) et l'enseignement au collège et au lycée est encore plus sensible du fait de l'abandon de l'introduction des espaces vectoriels dans le secondaire : les jeunes professeurs n'ont jamais eu l'occasion de rencontrer les applications géométriques élémentaires de la théorie dans leur cursus scolaire. Ils les découvrent lors de la préparation au CAPES ; encore y a-t-il loin d'une leçon de CAPES à l'enseignement dans une classe.

Il s'ensuit une extrême difficulté à construire une organisation des connaissances qui soit fonctionnelle pour cet enseignement. On observe alors une incapacité à justifier les raisons des procédures introduites ; le savoir tourne en rond dans une auto-justification dérisoire : on « fait » la multiplication des vecteurs par un réel pour justifier la forme vectorielle du théorème de Thalès... que les élèves maîtrisent mieux sous sa forme « collège » et persistent à utiliser ainsi...

Au contraire, une transposition didactique du professeur réussie amènerait celui-ci à pouvoir spécifier les raisons internes, en géométrie élémentaire, de l'efficacité du calcul vectoriel : possibilité d'opérer sur le plan affine, clarification et simplification de l'expression et de la résolution de problèmes...

• Exemple 2. L'analyse

L'introduction de l'analyse à l'université avec son système formel de preuve n'a aucun préalable au lycée, puisque les définitions et outils de validation de l'analyse ont presque complètement disparu des programmes du secondaire (cf. Artigue, 1993; Bloch, 1995). La thèse d'El Bouazzaoui (1988[3] est éclairante sur la distance entre les connaissances déclarées, en particulier par les enseignants, sur la définition de la continuité, et les connaissances réellement manifestées par ces enseignants dans des situations problématiques quelque peu inhabituelles (courbe et un point isolé par exemple).

Ce qui est visible, c'est que l'incapacité à envisager des cas non classiques dans la

2 cf Mariana Bosch y Casabo, La dimension ostensiva en la actividad de matematica: el caso de la proporcionalidad, thèse, Université autonome de Barcelone, 1994.

3 « Conceptions des élèves et des professeurs à propos de la notion de continuité d'une fonction », Université Laval, Québec, 1988

continuité prive aussi du recours à des exemples et contre-exemples qui seraient autant d'outils précieux pour le contrôle du savoir et de la transposition didactique. A l'opposé, la maîtrise d'exemples ou contre-exemples inhabituels est révélatrice d'une possibilité d'identification des fonctions et des limites du savoir dans les cas classiques. C'est une composante de ce que Di Martino (1992) appelle le *contrôle épistémologique* du professeur sur la situation. [4]

Comme pour les vecteurs, le professeur ne dispose alors pas de « passerelle » entre le savoir savant (définition de la limite par les voisinages ou les ouverts dans un espace topologique) et le savoir du programme (introduction de la limite sur des bases intuitives et algèbre des limites). Cette absence de passerelle rend d'autant plus difficile la gestion par l'enseignant d'une situation qui puisse donner du sens à l'introduction de la limite en classe de Première.

On peut penser que cette difficulté de ce que nous avons appelé la « transposition intermédiaire » ne contribue pas à créer un environnement favorable à la vie de l'analyse dans l'enseignement secondaire.

1.2 Connaissances non disponibles dans les programmes

Il s'agit de connaissances universitaires que les étudiants possèdent théoriquement, mais les programmes indiquent explicitement de ne pas y recourir.

• Exemple. Le PPCM pour l'addition des fractions

Le programme de la classe de Quatrième[5] indique dans les « compétences exigibles » : « Calculer la somme de nombres relatifs en écriture fractionnaire ». La colonne des « commentaires » précise :

« L'addition de deux nombres fractionnaires peut demander un travail sur la recherche de multiples communs à deux ou plusieurs entiers. La recherche du plus petit commun multiple pour l'obtention d'un dénominateur commun et celle du plus grand diviseur commun pour l'obtention de la forme irréductible ne sont pas exigibles ».

Les programmes renvoient ainsi à des savoirs dits non exigibles pour l'élève ; mais qu'en est-il de l'enseignant ? si ces savoirs sont mentionnés, est-ce qu'il doit les maîtriser ? En principe la réponse est oui : il y a au CAPES des leçons sur PGCD et PPCM. Certaines universités ont également remis au programme de première année des cours d'algèbre et d'arithmétique ; cependant tous les étudiants qui se destinent à l'enseignement ne les suivent pas, par le jeu des options. Certains candidats au CAPES n'ont par conséquent que la préparation à l'oral comme contact avec ce domaine mathématique.

De plus la lecture de l'avertissement des programmes produit un effet stérilisant sur les possibilités d'action avec les élèves. Tout se passe comme s'il n'y avait pas de milieu entre deux alternatives :

- a) faire la théorie du PGCD et du PPCM ;

---

4 Di Martino, 1992 : « Analyse du contrôle épistémologique d'une situation didactique: la situation du pétrolier », DEA, Université Joseph Fourier, Grenoble. Cf. aussi Bloch, 1995.

5 Bulletin Officiel de l'Education nationale, 13/02/97

- b) ne rien faire du tout, autrement dit faire un enseignement totalement par ostension.

Il nous semble qu'il peut se produire ici le même effet que pour le calcul vectoriel, à savoir un divorce entre le niveau universitaire et le niveau secondaire, le premier n'étant d'aucune utilité pour le contrôle du second.

L'enseignement de l'arithmétique au lycée, jusque dans les années 70, assurait un premier stade de transposition didactique ; autrement dit il réduisait la distance entre le savoir universitaire et les connaissances utiles pour l'enseignement au niveau secondaire.

> Le manuel de 1963 de Mathématiques élémentaires (Terminale scientifique actuelle), collection Cagnac et Thiberge, auteur Y.Crozes, chez Masson et Cie, comprend plusieurs chapitres sur la divisibilité des nombres naturels : Théorie des restes, Caractères de divisibilité, Plus grand commun diviseur, Plus petit commun multiple, Nombres premiers. Le tout figure dans une section dont le titre est exemplaire : « Théories arithmétiques », au pluriel (?).
>
> Quant au programme de 1971, il comprend : propriétés de **N** ; anneau **Z** des entiers relatifs ; multiples d'un entier relatif; notation n**Z** ; congruences modulo n ; l'anneau **Z/nZ** ; division euclidienne dans **N** ; dans **Z** ; systèmes de numération ; nombres premiers dans **Z** ; si n est premier, **Z/nZ** est un corps ; décomposition d'un entier en facteurs premiers ; PGCD; PPCM ; nombres premiers entre eux ; identité de Bezout.

Cette théorie n'étant plus enseignée au niveau secondaire, le risque est donc de voir considéré ce savoir sur les nombres entiers comme relevant du sens commun (il suffit de feuilleter « Arithmétique pour amateurs » de Guinot[6], pour voir qu'il n'en est rien !). Auquel cas le professeur va fonctionner sur les mêmes modèles implicites d'action, ou presque, que les élèves ; disons qu'il a plus de ressources algorithmiques et des repères de démonstration, mais le recours à la théorie comme contrôle est difficile dans la classe. Le recours au « bricolage » semble fatal, et les apprentissages proposés dans les manuels sont de type procédural.

Les manuels abondent d'ailleurs en consignes du type : « Observe et reproduis... » ; une éventuelle structuration est laissée à l'initiative du professeur.

Le rapport effectif au savoir attendu par l'enseignant (et par le système, qui va identifier comme un dysfonctionnement l'ignorance de l'élève sur le sens de la procédure enseignée, par exemple l'addition des fractions) ne pourra éventuellement être mis en place que dans des situations ultérieures (exercices ou autres).

1.3 Connaissances non disponibles dans la formation du professeur

Certains domaines des mathématiques sont présents dans les programmes, nous l'avons dit, alors que la théorie correspondante, tout en étant construite et même importante en mathématiques, n'est plus ou pas enseignée au niveau secondaire et au niveau des premières années de l'université. C'est le cas de la construction des nombres

6 « Arithmétique pour amateurs » Marc Guinot, éd. Aléas, Lyon 1992

rationnels ou réels, et ce peut être aussi le cas, de façon plus différenciée, des statistiques (certaines universités faisant une large place aux statistiques dans la formation initiale des étudiants, d'autres non) ; c'est encore le cas, étudié par Grenier, de la combinatoire[7]. C'est aussi le cas de l'arithmétique (voir ci-dessus) pour les étudiants qui ont « échappé » à son enseignement.

Quel peut être le fonctionnement du professeur dans cette situation ?

• Exemple 1. Les probabilités et les statistiques

Pour cet exemple nous renvoyons aux brochures de l'IREM de Poitiers, « A propos de l'enseignement du calcul des probabilités » (1993) et « Thèmes pour l'enseignement de la statistique et des probabilités » (1994) [8]. Ces brochures pointent les mêmes phénomènes que nous signalons pour l'arithmétique, à savoir la confusion entre le niveau de « l'observation » et celui du savoir mathématique, ceci aggravé du fait de l'ambiguïté, présente dans nombre de manuels, entre statistique et probabilités, entre fréquence et probabilité par exemple. Le niveau de la modélisation n'est pas présent dans nombre de manuels. Nous faisons l'hypothèse qu'il ne pourra pas être construit par le professeur faute d'outils théoriques appropriés dans sa culture mathématique.

• Exemple 2. La représentation dans l'espace de dimension 3

Le programme signale qu'aucun cours n'est à faire sur les règles de la perspective cavalière. Il pourrait le signaler aussi pour la géométrie descriptive : pour quels étudiants ces domaines de savoir sont-ils encore d'actualité ? L'allusion à la perspective cavalière semble tout aussi folklorique aux jeunes professeurs, mais si l'on peut oublier la géométrie descriptive tant que l'on ne fait pas de dessin industriel, on a bel et bien *besoin* dans l'enseignement de la géométrie dans l'espace de représenter des objets de cet espace.

La question est ici celle du champ des problèmes reliés à un savoir mathématique, et de la survie indépendante du savoir, ou du champ de problèmes. Dans le cas de la perspective cavalière, c'est le champ de problèmes (représenter l'espace) qui existe encore dans les programmes, et dans les pratiques, alors que le savoir correspondant, qui faisait autrefois l'objet de longs développements, a disparu de l'enseignement et même de la formation des professeurs.

Sur la nécessité d'un apprentissage explicite d'un système de représentation plane de l'espace, on peut consulter Parzysz, « Espace, géométrie et dessin » (1991)[9].

Nous ferons alors l'hypothèse suivante:

Thèse 1. Lorsque la théorie, c'est-à-dire le savoir mathématique, n'apparaît plus explicitement dans les programmes, les professeurs, à cause des difficultés mentionnées ci-dessus, sont impuissants à le restaurer seuls dans leur classe.

C'est dire que l'institution doit assumer une part de la charge de la transposition

7 in « Différents types de savoirs et leur articulation » ,1995, éd. La Pensée Sauvage, Grenoble
8 IREM de Poitiers , 40, avenue du Recteur Pineau, 86022 Poitiers Cedex
9 in Recherches en didactique des Mathématiques, vol.11/2.3 , éd. La Pensée Sauvage, Grenoble.

didactique, en termes de prise de position par rapport au savoir, et ne pas la laisser toute entière aux enseignants. L'institution réaliserait ainsi un premier niveau de transposition, sur lequel les enseignants pourraient s'appuyer.

1.4 Connaissances exogènes au champ universitaire des mathématiques

Nous entendons par là les connaissances non « purement mathématiques », comme l'épistémologie, l'histoire des sciences, la linguistique, la sociologie, la psychologie...

Un certain nombre de recommandations sont faites par la noosphère concernant l'utilité de l'histoire des mathématiques par exemple pour la formation des professeurs. Les connaissances sur la formation des concepts peuvent certes aider à en préciser les fonctionnalités et à comprendre le champ de problèmes associé, soit que ces problèmes se trouvent à l'origine du concept soit qu'ils en fournissent des applications. C'est d'autant plus intéressant lorsque ces problèmes ont disparu de l'enseignement, comme par exemple les problèmes de volumes de solides autrefois associés à l'enseignement de l'intégrale.

Il ne faudrait cependant pas surestimer l'importance de l'histoire des mathématiques dans les KME ; il est possible qu'une partie de la noosphère imagine faire ainsi l'économie d'une véritable analyse de la cohérence des programmes et des connaissances nécessaires à l'enseignement, en proposant une formation historico-épistémologique comme une espèce de « méta » censé pallier à l'inadéquation de la formation universitaire.

Ce palliatif aurait pour effet d'exclure le champ didactique et surtout *la didactique*, comme savoir pertinent sur les phénomènes d'enseignement. Or nous pensons apporter dans cet article quelques éléments pour montrer que seule l'étude de la transposition didactique permet d'expliquer de façon pertinente les phénomènes rencontrés.

1.5 Conclusion

L'examen des connaissances évoquées dans les exemples ci-dessus amène à poser quelques questions :

- s'agit-il de connaissances universitaires *telles qu'elles sont enseignées* en DEUG ou en maîtrise ? ou bien l'environnement a-t-il changé ?
- s'agit-il de connaissances vraiment élémentaires ? ou bien plutôt d'interprétation ou d'utilisation de connaissances universitaires, d'ailleurs non triviales, les développements ci-dessus le prouvent, dans un contexte élémentaire ?

Autrement dit, existe-t-il une *double transposition didactique* ?

- la transposition didactique « classique » du savoir savant au savoir de la classe ;
- une transposition didactique « intermédiaire » ?

Nous posons alors la thèse suivante :

Thèse 2. La transposition didactique intermédiaire est celle de l'enseignant, adaptant ses connaissances universitaires de façon à les reconnaître et à les utiliser comme *instruments de contrôle, dans des contextes où la théorie qui les inspire est absente.*

Cette transposition didactique pourrait alors créer des pratiques, des habitus, qui deviendraient la marque de l'enseignant et qu'il utiliserait en particulier en préparant ses cours, ou en régulant les échanges dans la classe.

Ces habitus seraient sous-tendus par les KME, KME construites dans la pratique professionnelle puisqu'en général elles n'ont pas été transmises par une institution. Les KME sont donc construites par et dans la transposition didactique de l'enseignant.

Ce qu'il nous semble ressortir de cette première approche des KME, est que le problème, pointé dans la formation en IUFM, n'est pas fondamentalement différent dans le cas d'un professeur chevronné, puisqu'il s'agit d'un problème de transposition. Nous faisons l'hypothèse que le professeur expérimenté rencontre les mêmes difficultés dans le cours de son travail d'enseignement, et qu'en général il les résout par ostension. Il ne possède pas d'ailleurs d'outils pour les résoudre d'autre façon, et de plus nous pensons avoir montré qu'il s'agissait souvent de problèmes complexes.

Cependant les savoirs nécessaires à l'analyse des situations ci-dessus sont accessibles, sinon disponibles pour tous à tout moment : un professeur ayant 4 ans minimum de formation mathématique après le baccalauréat serait capable d'y « aller voir »... S'il ne le fait pas c'est que la transposition didactique intermédiaire se heurte à des difficultés du « milieu du professeur » qui ne le lui permettent pas. Certaines de ces difficultés ont été signalées (cf. § 1).

Les outils qui aideraient l'enseignant à réaliser sa transposition didactique pourraient aussi être fournis par la littérature professionnelle : or si l'on consulte par exemple le bulletin de l'APMEP, on y trouve de nombreux articles de culture mathématique, des problèmes à chercher, de la documentation mathématique et méthodologique... mais rien sur le problème qui nous occupe. La logique de l'APMEP est celle de la cohérence du discours mathématique du professeur, qui ne coïncide pas avec celle de la cohérence des savoirs de l'élève.

Nous énonçons alors une troisième thèse :

Thèse 3. Une transposition didactique « naïve » du professeur ne permet pas une organisation convenable du savoir pour l'élève; celui-ci ne peut alors structurer ses connaissances de façon à accéder à un savoir autonome.

Dans la deuxième partie de cet article, nous allons essayer d'illustrer cette thèse.

2. Organisation des KME : la transposition didactique du professeur

2.1 Exemples d'études de KME

Certains travaux réalisés en didactique des mathématiques contiennent, à notre sens, une analyse de la transposition du professeur et des KME. Pour que nous considérions que cette analyse est effectivement réalisée, il nous a semblé devoir pointer quatre conditions :

a) le travail porte sur un objet précis des programmes, à un ou plusieurs niveaux ;

b) il étudie, au moins pour une partie, les pratiques effectives d'enseignement ; en tous cas elles ne sont pas absentes ;

c) il y a une étude des conditions d'existence de cet objet dans l'enseignement ;

d) il y a également l'étude de la mise en relation avec le savoir savant (universitaire) ;

Sans prétendre aucunement être exhaustif, nous donnons ci-après trois exemples de ce type d'étude. Ces trois exemples mettent chacun en évidence une difficulté ou un problème important qui mettent chaque fois l'enseignant dans l'impossibilité de constituer la transposition didactique intermédiaire.

2.2.1 Teresa ASSUDE : l'écologie de l'objet « racine carrée »

Dans sa thèse (Assude 1992), Assude étudie l'enseignement actuel de l'objet « racine carrée » au collège[10] et met en évidence les problèmes de la pratique de l'introduction des racines carrées et des connaissances mathématiques qui permettent de proposer une situation pertinente pour cette introduction. Ainsi Assude (p. 19) analyse-t-elle un échange entre lecteurs d'une revue britannique de mathématiques (parmi lesquels des élèves de niveau Terminale scientifique, et un professeur ayant rencontré en classe des difficultés avec $x^{\sqrt{2}}$), au sujet des fonctions puissances d'exposants rationnels, du passage aux exposants irrationnels, des fonctions exponentielles et des paradoxes qu'on obtient si on admet **R** tout entier, au lieu de **R+**, comme ensemble de définition pour les fonctions puissances d'exposants rationnels. Dans cet échange il semble que le savoir universitaire ne puisse jouer un rôle d'aide par rapport aux problèmes de l'enseignement des concepts de fonctions puissance et exponentielle, en raison d'habitudes culturelles de transposition propres à l'institution d'enseignement où le problème se pose.

Ce qui apparaît clairement, c'est la nécessité de l'existence de KME de l'enseignant sur les fonctions exponentielles, afin que le milieu qu'il propose à l'élève contienne bien une possibilité de rencontre avec le savoir mathématique. Ce qui devrait se produire, c'est une transposition du savoir par le professeur pour expliquer comment on peut passer de $x^{\frac{1}{2}}$ à $x^{\sqrt{2}}$.

Or ici l'enseignant *n'arrive pas à effectuer cette transposition didactique intermédiaire*, car le système anglais prévoit deux fonctions réciproques à la fonction carré : soit $\sqrt{x}$ soit $-\sqrt{x}$; le professeur est pris entre des savoirs incompatibles, et il écrit à la revue de mathématiques pour décrire la perte de ses repères mathématiques

10 cf aussi Petit x n° 35, T.Assude, Ecologie de l'objet « racine carrée » et analyse du curriculum.

propres, et finalement l'ébranlement de savoir produit par ce conflit : il ne sait plus si ce qu'il a appris sur les exponentielles complexes est vrai ou non, ni si les fonctions puissances d'exposants rationnels sont bien des fonctions !

2.2.2 Annie BERTE : l'inégalité triangulaire au collège

Dans les deux articles de Berté[11] sur ce sujet, il s'agit de réfléchir sur « l'enseignement d'un réseau de concepts: inégalité triangulaire, détermination d'un triangle par les mesures de ses trois côtés, positions relatives de deux cercles et nombre de points communs à deux cercles, distance d'un point à une droite, positions relatives d'une droite et d'un cercle. » Berté propose une réflexion sur *l'environnement mathématique* des concepts ci-dessus dans l'enseignement secondaire, et sur « *les conditions à respecter* pour que l'inégalité triangulaire et le théorème de Pythagore soient introduits dans un environnement qu'on peut estimer significatif. »

Ces conditions sont d'ordre aussi bien mathématique que didactique, en effet :

« ...Une des conditions à la construction du sens, réside dans la réalisation par le maître d'un enchaînement de situations, donc dans le choix d'un ordre pour aborder les concepts géométriques, de manière que tel obstacle soit franchi avant tel autre, que tel débat puisse être engagé avant tel autre. *Plusieurs ordres sont mathématiquement possibles,* et ils sont d'autant plus nombreux qu'on décide de choisir une axiomatique surabondante. Avec une très forte axiomatique, l'ordre peut même être quelconque pour les concepts de base. Or des observations de classe, et la théorie didactique, les deux fonctionnant de manière dialectique, (...) nous ont conduits à des nécessités d'enchaînements qui semblent exclure une juxtaposition dans un ordre quelconque. »[12] (1995-96, p. 60)

Ce qui apparaît ici, c'est que les progressions actuellement proposées ne sont pas pertinentes pour la construction du savoir de l'élève, en raison de la surabondance de l'axiomatique qui autorise la présentation des notions dans un ordre quelconque. Si le professeur s'appuie uniquement sur l'ostension pour son enseignement, peu importe, à la limite, l'ordre des notions. Mais s'il souhaite organiser une progression par rapport au savoir de l'élève, alors les programmes ne permettent pas un appui convenable des concepts les uns par rapport aux autres.

Berté pointe de plus que certaines études nécessaires à cette construction ont disparu du programme, comme l'intersection de deux cercles : dans ce cas le professeur, pour réaliser la transposition intermédiaire, devrait les réintroduire, ce que tout enseignant hésite de façon bien compréhensible à faire, en butte qu'il est aux recommandations de la noosphère (ne pas surcharger l'élève de notions inutiles, s'en tenir strictement à la lettre des « compétences exigibles »...).

---

11 cf « Réflexions sur inégalité triangulaire et distance d'un point à une droite à partir d'observations de classes », in Petit x n°40, et « Différents ordres de représentation des premières notions de géométrie métrique dans l'enseignement secondaire », in Recherches en Didactique des Mathématiques, n° 15/3, Grenoble.

12 C'est nous qui soulignons

Il nous semble qu'il y a là un témoignage de l'utilité de l'étude des KME : le travail de production des programmes devrait pouvoir bénéficier de ces analyses.

2.2.3 Alain MERCIER : la simplification des fractions

Là encore[13] il s'agit d'étudier comment la présence ou l'absence d'un savoir mathématique changent le sens de la situation proposée à l'élève. Le problème rencontré est la simplification de la fraction $\frac{65}{91}$; or deux méthodes sont proposées aux élèves, suivant qu'ils sont dans une classe « normale » ou dans l'enseignement spécialisé :

$$\frac{65}{91}=\frac{5\times 13}{7\times 13} \text{ ou } \frac{65}{91}=\frac{65:13}{91:13}$$

Dans le premier cas, « c'est à la factorisation que se réfère l'action qui se montre dans la correction pour donner les moyens de sa vérification. Il a donc fallu que la factorisation ait été enseignée, qu'un rapport institutionnel à cet objet existe pour qu'il soit ici convoqué comme un rapport naturel. » (1995 a, p. 162)

Dans le deuxième cas, « la division entière détermine l'action de simplification et elle en donne le contrôle : c'est à l'objet « division » que se réfère l'action qui se montre dans la correction pour donner les moyens de sa vérification. Mais ici, une fraction irréductible n'a pas de définition intrinsèque : c'est une fraction qui ne peut pas être réduite. L'élève de la leçon B ne peut qu'éprouver dans l'action dont les outils se montrent les questions qu'un élève de la leçon A traitait nécessairement par le moyen de *savoirs mathématiques* qui produisaient avec la réussite une démonstration de la réussite. »[14] (idem, p. 163)

Et plus loin: « L'action proposée se voudrait experte, mais elle perd de ce fait l'objet de savoir qu'il s'agissait d'enseigner avec la simplification des fractions ». On se trouve alors, dit Mercier, devant des élèves qui « ont construit des instruments stables (...) qui ne correspondent pas à des rapports à des *objets mathématiques* identifiables. »[15] Dans ce cas les élèves « ne connaissent que des outils pour une action : la construction d'un milieu pouvant rendre ces outils nécessaires sous la forme d'objets de savoirs devient une gageure. On peut alors observer que l'enseignant repart toujours de zéro, ce qu'on pourrait lui reprocher s'il ne se plaignait pas de devoir agir ainsi pour s'adapter à ses élèves ! » (idem, p. 165).

Ce qui apparaît là, c'est que la transposition didactique du professeur, une nouvelle fois, ne lui permet pas de distinguer une situation où un savoir mathématique (la factorisation) figure bien, d'une situation où il est absent. Rappelons que nous sommes dans le cas où le programme exclut le savoir sur la factorisation des entiers, et donc le professeur fait au mieux de sa classe, de ses possibilités, avec ou plutôt *sans* un savoir « inutilisable ». De plus la simplification par division est proposée dans une classe faible, voire même dans l'enseignement spécialisé : les savoirs didactiques, qui permettraient à

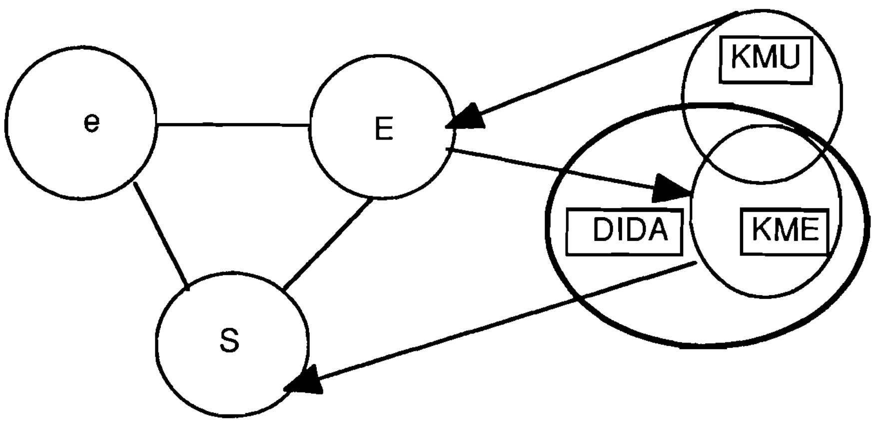
13 Mercier 1995a, 1995b.
14 C'est nous qui soulignons.
15 C'est nous qui soulignons

l'enseignant de réfléchir à la façon de faire vivre *l'activité mathématique* dans ce type de classe, ne sont pas à la disposition de l'enseignant.

Des connaissances de l'enseignant il semble qu'on soit passé aux connaissances de l'élève : en fait, c'est par la détermination du savoir qu'on veut faire rencontrer à l'élève, et surtout des conditions dans lesquelles peut se faire cette rencontre, qu'on peut remonter aux connaissances *nécessaires* de l'enseignant ; la façon dont les connaissances doivent vivre dans la situation permet d'analyser celles que l'enseignant doit y injecter pour pouvoir l'organiser et la contrôler. C'est aussi ce qui ressort, nous semble-t-il, de ces trois exemples. Autrement dit, les KME servent à l'enseignant de *moyen de contrôle* sur les connaissances *avec lesquelles le milieu qu'il installe permet d'organiser une rencontre personnelle des élèves.* Des travaux de didactique ont étudié les connaissances dans le milieu proposé à l'élève; en particulier tout ce qui concerne l'analyse du milieu (Brousseau 1990, Brousseau et Centeno 1991, Margolinas 1993).

2.2 Fonction de contrôle relatif au savoir dans la classe

Une des principales fonctions des KME nous semble être d'éclairer les conditions qui rendent possible la présence du savoir mathématique dans la situation d'enseignement. Nous avons représenté sur le schéma ci-dessus les interactions qui nous semblaient illustrer notre propos.



Légende : e l'élève - E le professeur - S le savoir.
DIDA les connaissances du professeur en didactique des mathématiques.

En fait E interagit avec le *milieu* proposé à l'élève pour sa rencontre avec le savoir (cf. Brousseau 1990).

Par « éclairer les conditions qui rendent possible la présence du savoir mathématique » nous entendons que, grâce à ses KME, l'enseignant est en mesure de savoir si, pour l'apprentissage d'un concept donné, il pourra organiser dans sa classe une rencontre avec le savoir mathématique ou s'il devra se contenter d'un enseignement par ostension. Les raisons qui fondent le choix d'un enseignement par ostension peuvent être de diverses origines, comme nous l'avons vu : pour justifier que, dans la leçon sur la mesure des angles, arcA'B'/arcAB = R'/R, le professeur ne peut invoquer le savoir savant trop complexe ; il pourra faire observer que c'est vrai pour le cercle entier, un demicercle, un quart de cercle... et admettre que cela continue d'être vrai pour un arc quelconque.

Nous avons vu que le savoir pourrait être aussi à la portée des élèves mais ne pas faire partie du programme, ni parfois des connaissances du professeur : c'est le cas de l'arithmétique pour l'addition des fractions. Les exemples de cours sur les fractions proposés dans certains manuels sont assez éclairants : sans le savoir arithmétique, le but ne peut être que de proposer des modèles d'action à reproduire, des « observations » de réduction des fractions au même dénominateur afin d'obtenir qu'au plus vite l'élève soit capable d'imiter le comportement « montré », autrement dit il s'agit d'une forme typique de l'ostension. L'exemple proposé par Mercier ci-dessus nous montre que ce peut être l'ostension d'un savoir mathématique, ou même l'ostension d'une « technique sans savoir », en tout cas sans savoir nouveau.

Remarquons que pour un enseignant E_i donné, KME n'est pas inclus dans KMU ; de plus pour l'observateur du système tout entier, (KME global) n'est pas non plus inclus dans (KMU global), ce que nous noterons : **KME $\not\subset$ KMU.** En effet on ne peut considérer un ensemble de connaissances comme une simple collection d'objets : cet ensemble est structuré par une organisation interne, des relations entre connaissances ; or l'organisation des KME est différente de celle des KMU ; ceci ressort clairement des mêmes raisons que nous avons données au §1 à propos des difficultés dans la transformation et l'adaptation de KMU pour la construction de KME.

Les KME, n'ayant pas été construites comme un sous-produit des KMU, mais étant le fruit d'une production didactique, ont une organisation liée à l'enseignement de différents concepts et non pas à l'apprentissage d'une théorie suivie de son application.

2.3 Transposition didactique du professeur à l'école élémentaire

Les considérations et exemples donnés dans cet article se réfèrent au collège et au lycée ; nous souhaitons évoquer le problème des KME à l'école élémentaire, parce qu'à notre sens il se pose à peu près dans les mêmes termes pour le contrôle de l'activité mathématique des élèves, si ce n'est que les professeurs d'école n'ont pas tous une formation universitaire en mathématiques, loin de là.

Certains travaux récents ont étudié les KME pour un concept donné : citons Favre (1993). A l'origine des préoccupations de certains chercheurs sur les KME, on trouve de nouveau l'enseignement spécialisé, comme chez Mercier (1995 a) ; ces préoccupations rejoignent celles dont nous faisons état pour l'enseignement secondaire. Ainsi Conne (1996) :

« Les pratiques d'enseignement des mathématiques recouvrent un certain mode de pratiques mathématiciennes et requièrent par conséquent une activité mathématique propre (de la part des enseignants) » et plus loin : « Il incombe au sujet et à lui seul de constituer sa réalité mathématique, et pour cela il ne peut que commencer par agir. Le premier enjeu de l'enseignement des mathématiques est là, c'est ce que l'école doit obtenir de la part de ses sujets. Il incombe alors aux enseignants de faire faire des mathématiques aux élèves en les enrôlant dans des pratiques mathématiciennes ».

Plus loin encore, Conne écrit : « On pourra aussi considérer le processus d'enseignement comme un processus dans lequel le savoir du sujet enseignant sera amené à se transformer en savoir du sujet « enseignant-enseigné », et que l'enseigné apprendra alors un dérivé de cette transformation. (...) Je dirais que la pratique s'organise autour des savoirs, c'est bien au regard de la pratique et dans l'activité que le savoir établit économie et distinction. »

Il nous semble avoir montré, à travers ces exemples, les difficultés qui naissent, dans l'enseignement, des avatars de la transposition didactique du professeur, et des problèmes qu'il rencontre dans la construction de ses KME. Ces difficultés s'expriment en termes de réussite ou d'échec des élèves, c'est pourquoi en conclusion de ce paragraphe, nous poserons la thèse suivante :

Thèse 4. Une partie des difficultés des élèves proviendrait, non de leur inaptitude aux mathématiques, mais du défaut d'organisation des mathématiques enseignées. Cette organisation ne permet pas à la transposition didactique du professeur de se constituer de façon satisfaisante.

Il nous reste à dire quelques mots du statut des KME actuellement dans l'enseignement, et des difficultés de leur transmission dans les institutions qui forment les professeurs de mathématiques.

3. Statut des KME

3.1 Statut privé

Nous soutenons la thèse qu'actuellement les KME ont un statut de *connaissances locales et privées*, aussi bien pour le professeur en lycée ou collège que pour le formateur en IUFM. En effet :

- à l'IUFM il n'y a pas de « cours de KME », mais au cas par cas on analyse des « leçons » de mathématiques ; il n'est pas facile d'ailleurs, dans l'urgence des besoins pédagogiques, didactiques, mathématiques des stagiaires, de toujours trouver le temps de pointer tout ce qui devrait l'être, ni de toujours légitimer le point de vue didactique alors qu'il n'apparaît pas dans les manuels scolaires du secondaire ;

- les KME n'apparaissent nulle part sous forme explicite (cours, manuels, intitulés de stages de formation, de groupes IREM...) ; il existe (depuis peu) des manuels pour préparer le concours de professeur d'école, il n'existe pas de manuel des mathématiques du professeur de collège ou de lycée ; il y a des manuels de didactique, mais leur pénétration dans la formation est encore faible, et ils font souvent une large place aux approches psychocognitives, épistémologiques... plus qu'aux mathématiques de la didactique ;

- les professeurs en fonction sont supposées « adapter » leurs KMU pour enseigner les mathématiques ; cette adaptation relève d'un effort personnel, il n'y a pas

« d'aide à l'adaptation » prévue une fois la formation en IUFM passée ; d'ailleurs nous avons montré que cette adaptation n'allait pas de soi. Quant à la formation continue, elle est d'une part très réduite (peu d'enseignants en bénéficient régulièrement) et pour une part centrée sur de la pédagogie (études dirigées en Sixième, enseignement par cycles, modules...) ou sur les moyens informatiques ; d'ailleurs s'il n'existe pas de corpus de KME, il est difficile que la formation continue les prenne en compte.

3.2 Légitimité des KME

Une conséquence du statut privé des KME est leur **coût** :

- du point de vue de leur construction pour l'enseignant comme pour le formateur d'enseignants (investissement personnel, travail, temps...). Or si un travail est trop coûteux, il y a des risques qu'il ne soit pas réalisé par tous, par manque de temps, accaparement par d'autres tâches (pédagogiques par exemple), découragement... De plus nous avons vu les nombreuses difficultés théoriques auxquelles se heurterait un professeur qui souhaiterait réaliser ce travail ;

- du point de vue de leur *légitimité*. En effet un savoir qui demeure sous des formes implicites souffre d'une absence de légitimité vis-à-vis des institutions:

a) par rapport à l'institution « second degré » : remise en cause périodique de la formation continue des enseignants (-60% de crédits en quelques années) ;

b) par rapport aux institutions de formation : à l'université, ces connaissances sont purement et simplement niées. A l'IUFM, il est très difficile de les légitimer auprès des stagiaires, d'autant que l'université les a ignorées voire condamnées ; souvent c'est par des biais que les formateurs tentent de les faire exister (ateliers sur le traitement des erreurs, les modules, etc....).

3.3 Savoirs et connaissances

Dans la perspective de la transmission des KME, il nous faut distinguer connaissances et savoirs ; en effet si les KME ont autant de mal à exister, malgré les enjeux importants que nous avons pointés, c'est bien parce qu'elles n'existent actuellement que sous la forme de connaissances locales et privées, développées essentiellement comme sous-produit de recherches en didactique, c'est-à-dire pas sous forme de *savoirs institués pour la formation des enseignants*.

Rappelons la définition qu'en donne Conne (1992) : « Un savoir est une connaissance utile. Utile est à prendre dans le sens le plus large possible : utilisable, à utiliser, etc. » (p. 250). « ...certains de ces savoirs sont socialement institués et jouent un rôle privilégié de référence. » (p. 257).

Dès lors que nous reconnaissons la difficulté d'existence des KME, nous sommes obligés de conclure que les KME ne peuvent, pour l'instant, être érigées en savoirs, en tous cas pas en savoirs institués jouant un rôle privilégié de référence. Il leur manque pour cela d'être soutenues par une institution forte : les institutions relatives à la didactique des mathématiques, bien qu'étant internes aux mathématiques (constituées de mathématiciens, et non par exemple de chercheurs en sciences de l'éducation), n'ont pas l'appui de l'ensemble des mathématiciens universitaires, ni de la noosphère. Les KME peuvent peut-être vivre dans les IUFM en particulier comme des savoirs à utiliser : ce serait une première étape.

Se retrouve donc enfin posée la question de la *diffusion* de ces connaissances : les IUFM ont créé un besoin de reconnaissance et de diffusion des savoirs professionnels. Il nous semble que les connaissances mathématiques de l'enseignant, pour l'enseignement, sont au centre de ces savoirs professionnels. Or l'étude des KME relève d'applications de savoirs de didactique, actuels (notamment les études du milieu), ou à développer. Mais le recours à ces savoirs nécessite une transposition spécifique, afin de les rendre disponibles aux professeurs et à leurs formateurs.

Bibliographie

ARTIGUE M. (1993) *Enseignement de l'analyse et fonctions de référence*, in Repères, IREM, n°13.

ASSUDE T. (1992) *Un phénomène d'arrêt de la transposition didactique: écologie de l'objet « racine carrée » et analyse du curriculum*, Thèse, Université Joseph Fourier, Grenoble.

BERTE A. (1995) *Différents ordres de représentation des premières notions de géométrie métriques dans l'enseignement secondaire*, in Recherches en Didactique des Mathématiques, vol.15/3, éd. La Pensée Sauvage, Grenoble.

BERTE A. (1995-1996) *Réflexions sur inégalité triangulaire et distance d'un point à une droite à partir d'observations de classes*, in Petit x n° 40, IREM, Grenoble.

BLOCH I. (1995) *Approche didactique de l'enseignement des premiers concepts de l'analyse*, mémoire de DEA, Université Bordeaux 1, LADIST, 40 rue Lamartine, 33400 Talence.

BROUSSEAU G. (1989) *Utilité et intérêt de la didactique pour un professeur de collège*, in Petit x n° 21, IREM, Grenoble.

BROUSSEAU G. (1990) *Le contrat didactique: le milieu*, in Recherches en Didactique des Mathématiques, vol.9/3, éd. La Pensée Sauvage, Grenoble.

BROUSSEAU G. et CENTENO J. (1991) *Rôle de la mémoire didactique de l'enseignant*, in Recherches en Didactique des Mathématiques, vol.11/2.3, éd. La Pensée Sauvage, Grenoble.

CONNE F. (1992) *Savoir et connaissance dans la perspective de la transposition didactique*, in Recherches en Didactique des Mathématiques, vol.12/2.3, éd. La Pensée Sauvage, Grenoble.

CONNE F. (1996) *Faire des maths, faire faire des maths, regarder ce que cela donne.* Communication au Symposium de Montréal, à paraître.

FAVRE J-M. (1993), *Elaborer une démarche d'enseignement par l'observation de la formation et de l'évolution d'un concept: la multiplication*, Grand N, n° 53.

MARGOLINAS C. (1993): *Jeux de l'élève et du professeur dans une situation complexe*, Séminaire DidaTech, LSD-IMAG, U. Joseph Fourier, Grenoble.

MERCIER A. (1995 a) *Le traitement public d'éléments privés du rapport des élèves aux objets de savoir mathématique* , in Différents types de savoir et leur articulation, éd. La Pensée Sauvage, Grenoble.

MERCIER A. (1995 b) *Les effets de l'intervention enseignante dans le milieu des situations adidactiques*, in Les débats de didactique des mathématiques, éd. La Pensée Sauvage, Grenoble.