

LES ENSEIGNANTS DE MATHÉMATIQUES ET LES ERREURS DE LEURS ÉLÈVES

Roland CHARNAY
Equipe de Didactique des Mathématiques
INRP – PARIS

Le texte qui suit reprend l'essentiel d'une intervention faite dans le cadre du dernier Congrès International sur l'enseignement des mathématiques, réuni à BUDAPEST du 27 Juillet au 3 août 1988. Il constitue en fait une brève synthèse des travaux réalisés par une équipe de l'INRP sur le thème de l'articulation école-collège, étudiée ici au travers de la façon dont les enseignants de mathématiques de CM2 et de Sixième interprètent et utilisent les erreurs de leurs élèves. L'ensemble des travaux conduits sur ce thème de l'articulation école-collège (dans cinq disciplines) a donné lieu à plusieurs publications disponibles à l'INRP (voir bibliographie).

INTRODUCTION

Les études en didactique des mathématiques ont permis de renouveler l'approche des erreurs des élèves. Deux directions paraissent particulièrement intéressantes :

– d'une part, les erreurs ne traduisent pas toujours une absence de connaissances ou un manque de travail : certaines erreurs, au contraire, sont un élément d'information pour l'enseignant sur les conceptions qu'a l'élève d'une notion, une information sur "sa manière de connaître" ; il s'agit alors d'aider les enseignants à bien lire ces erreurs;

– d'autre part, les erreurs de l'élève peuvent et doivent être prises en compte positivement dans le processus d'apprentissage : pour qu'il progresse, il faut permettre à l'élève de prendre conscience du fait que sa réponse est erronée; la réponse correcte ne doit pas simplement remplacer la réponse erronée, elle doit être construite en s'opposant à celle-ci; il s'agit alors d'aider les enseignants à choisir et organiser des situations d'enseignement qui favoriseront la remise en cause par l'élève de ses conceptions erronées.

Nous avons voulu savoir quel était le comportement effectif des enseignants, dans leurs classes, face aux erreurs de leurs élèves, comment ils interprètent ces erreurs au moment où elles apparaissent et quels usages ils en font. Nous pensons ainsi pouvoir éclairer les rapports enseignant-élèves-savoir dans la mesure où la manière dont l'enseignant interprète, puis gère les erreurs de ses élèves, met en jeu tout à la fois le regard qu'il porte sur l'élève, ses positions sur le savoir enseigné et ses options sur l'apprentissage.

Nous avons donc construit un outil qui permet d'observer enseignant et élèves, dans la classe, au moment où des erreurs sont repérées, et d'interpréter leurs comportements.

Les résultats présentés ici concernent des enseignants de CM2 (5ème année d'école élémentaire, élèves de 10-11 ans) et de 6ème (1ère année de collège, élèves de 11-12 ans). Nous avons ainsi observé 25 enseignants de CM2, soit au total 70 séquences et 17 enseignants de 6ème, soit au total 40 séquences. Le passage du CM2 à la 6ème, de l'enseignant unique à un enseignant pour chaque discipline, constitue un moment critique pour beaucoup d'élèves.

Deux pistes d'analyse seulement sont ici résumées :

– 1ère piste : comment les enseignants interprètent-ils les erreurs de leurs élèves, au moment où celles-ci apparaissent ?

– 2ème piste : quelle est la stratégie de traitement des erreurs adoptée par l'enseignant ? qui est sollicité ? et pour quoi faire ? qu'est-ce qui est de la responsabilité respective de l'enseignant et des élèves ?

I – L'OUTIL D'OBSERVATION DES PRATIQUES DES ENSEIGNANTS FACE AUX ERREURS DE LEURS ELEVES

L'instrument élaboré (nommé par la suite grille "statut de l'erreur") a été conçu pour être utilisé dans le cadre de plusieurs disciplines, il ne reflète donc que partiellement les élucidations préalables que nous avons été amené à conduire sur les perspectives d'analyse des erreurs (définition de ce qu'est une erreur, origines possibles des erreurs, interprétation de celles-ci ...) dans des disciplines aussi différentes que les mathématiques ou les arts plastiques.

Il s'agissait pour nous d'observer la façon dont les enseignants prennent en compte et exploitent les erreurs des élèves directement dans la classe. Seules sont en fait retenues les erreurs qui sont ensuite reprises par l'enseignant, qui font l'objet d'une intervention de sa part.

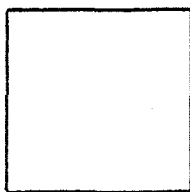
Quels sont les indices pertinents pour une telle observation ? Comment prendre en compte l'analyse que l'enseignant fait "à chaud" de l'erreur, la façon dont il gère alors la correction, les rôles respectifs qu'il attribue à chacun (élèves-enseignant) dans cette phase ? Deux ensembles d'indicateurs ont finalement été principalement retenus :

– Le "niveau" auquel l'enseignant choisit de traiter l'erreur, très fortement lié à l'interprétation qu'il fait de celle-ci; (cadre en haut et à droite de la grille).

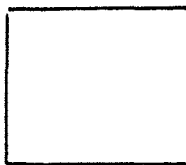
– La "stratégie" de traitement qu'il adopte : qui intervient (ou qui est sollicité pour intervenir) ? et pour quel type d'interventions ? (tableau de la partie inférieure de la grille).

La grille a été remplie à partir de séquences de classe enregistrées au magnétophone, les parties correspondant à un travail sur l'erreur ayant ensuite fait l'objet d'une transcription écrite.

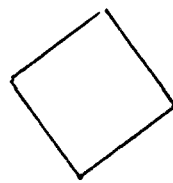
L'exemple donné sur la grille fournie dans cet article correspond à la correction de l'erreur faite par un élève qui a répondu que la seconde figure ci-dessous était un carré :



oui



oui



NON

- *Le maître intervient tout d'abord pour s'étonner : "Ah ! vous croyez ?" (A4)*
- *Un élève : "Non ... il n'a pas ses 4 côtés de même longueur" (C6)*
- *Le maître demande à l'élève de corriger ... celui-ci mesure les côtés et ajoute : "C'est pas un carré ... j'avais oublié de mesurer" (B2)*
- *Le maître : "Pour avoir un carré, il faut 4 côtés de même longueur en plus des 4 angles droits... on a vu ça l'autre jour" (A5)*
- *Un autre élève intervient : "Ce qui l'a fait tromper, c'est que les côtés sont presque égaux ... c'est un rectangle qui est presque un carré" (C6)*
- *Le maître : "Oui. Mais presque un carré, ce n'est pas un carré ... Il faut que toutes les conditions soient bien réunies : alors, on ne se laisse plus avoir".*

a) Les "niveaux de traitement"

L'analyse du contenu des demandes explicites ou non de l'enseignant permet à l'observateur de préciser l'interprétation qu'il fait de l'erreur correspondante. Nous avons distingué 8 niveaux de traitement rapidement décrits dans le tableau ci-joint.

Nous avons au départ souhaité pour le niveau IV, distinguer entre la référence au sens et le raisonnement. Le caractère interdisciplinaire de la grille qui nous a conduit à réunir ces deux aspects.

L'exemple cité ici est un cas limite du niveau IV : l'enseignant ne se contente pas de faire énoncer les conditions requises pour qu'une figure soit un carré, mais il tente d'élucider avec l'élève ce qui a pu provoquer son erreur : c'est la raison pour laquelle nous avons choisi de coder ce traitement de l'erreur au niveau IV plutôt qu'au niveau II.

b) La stratégie de traitement

Chaque erreur traitée fait l'objet d'une description sous forme de parcours. Chaque étape correspond à une intervention (ou demande d'intervention) significative de l'enseignant ou d'un élève, la "bonne réponse" étant codée par un entourage de l'intervention correspondante.

Quelques précisions : la ligne 1 correspond à un abandon explicite du traitement de l'erreur par l'enseignant; la ligne 3 correspond à un guidage très serré du type "discours à trous" sans recours à des éléments de référence sur lesquels les élèves pourraient appuyer leurs réponses; la ligne 6 suppose la mise en œuvre d'un véritable démontage du mécanisme de l'erreur, au-delà d'un simple retour sur une règle; la ligne 7 suppose une interruption du déroulement prévisible du cours et la mise en place d'un véritable travail de recherche.

Pour terminer, nous proposons quelques exemples d'erreurs pour lesquels le lecteur pourra "s'exercer" à faire fonctionner l'outil décrit ici ...

Exemple 1 (CM2) (La classe travaille sur l'énoncé oral suivant : 1 cm sur une carte représente 10 cm dans la réalité)

- *Maître : Si on a 2 centimètres et demi sur le papier, combien cela fait-il dans la réalité ?*
- *Elève 1 : 20 centimètres et demi*
- *Plusieurs élèves : Non ! Non !*
- *Elèves 1 : Ben si ! 20 centimètres et demi*

- Plusieurs élèves : Non ! Non !
- Elève 1 : Ben si ! 20 centimètres et demi
- Maître : Tu es sûr ? Est-ce que ça fait ça ? (il écrit 20,5 cm au tableau). 20 centimètres et demi, c'est ça. Est-ce que ça fait ça ?
- Plusieurs élèves : Non ! Non !
- Elève 2 : C'est 25
- Maître : Alors pourquoi ? Explique pourquoi il s'est trompé.
- Elève 2 : Parce que si 1cm représente 10 cm, un demi centimètre représente 5 cm...
- Maître : Un demi centimètre ici (il montre le 5 de 2,5 qu'il vient d'écrire), tu es d'accord ? la moitié d'un centimètre représentera 5 centimètres. Et donc, 20 centimètres plus 5 centimètres, ça fait bien 25 centimètres.

Exemple 2 (CM2) (La classe travaille sur les conversions de mesures de masses)

- Maître : (s'adressant à l'élève 1) : On nous donne 5 hectogrammes et on nous dit 0,5 ... alors 0,5 quoi ?
- Elève 1 : 0,5 kilogramme
- Maître : Tu es sûr ?
- Elève 1 : 0,5 hectogramme
- Des élèves : kilogramme
- Maître : Ne t'occupe pas des autres et reprends ton idée. Alors, à ton avis ?
- Elève 1 : 0,5 hectogramme
- Maître : Eh bien, non !
- Elève 2 : 0,5 kilogramme
- Maître : Oui ... 0,5 kilogramme ... (s'adressant à l'élève 1) : Tu es sûr, maintenant ?
- Elève 1 : Oui !

Exemple 3 (6ème) (La classe travaille sur les propriétés de la multiplication une erreur a été faite dans le calcul d'une différence : l'élève 1 a calculé $13,4 - 7,2$ et trouvé 0,62)

- Maître : Il m'a expliqué sa technique : 2 pour aller à 4, ça fait 2; 7 pour aller à 13, ça fait 6. D'accord ? Et puis, il dit "Là, je mets deux chiffres après la virgule et je trouve 0,62". Il calculait $13,4 - 7,2$... Il a fait ses calculs correctement. Il m'a dit ensuite : "Là je trouve 2 et là 6, il me faut deux chiffres après la virgule, donc je mets un 0 et ça fait 0,62". C'est ça ou pas ?
- Elève 2 : Il a fait comme une multiplication
- Elève 1 : Ah, oui ! j'ai fait comme si c'était une multiplication
- Maître : Alors ton résultat en fait c'est ...
- Elève 1 : 6,2 parce qu'il y a un chiffre après la virgule
- Maître : Oui, il y a un chiffre après la virgule aux deux nombres, donc on va mettre un chiffre après la virgule
- Elève 3 : On peut quand même pas trouver 0'62 parce que ... (interrompu par le maître)
- Maître : En plus, voilà ... Alors, vas-y, explique ...
- Elève 3 : On a $13,4 - 7,2$ et ... (interrompu par le maître)
- Maître : On aurait pu se rendre compte du résultat comment ? En faisant ...
- Elève 3 : $13 - 7$... (interrompu par le maître)
- Maître : $13 - 7$ ça fait 6 ... On a assez travaillé avec les ordres de grandeur pour se rendre compte que c'était près de 6 et pas 0 virgule quelque chose.

Exemple 4 (CM2) (La classe travaille sur le calcul du produit de deux décimaux. Un élève est en train de calculer $2620 \times 4,58$: elle vient de terminer le calcul et a écrit :

$$\begin{array}{r} 2620 \\ \times 4,58 \\ \hline 2096 \\ 1310 \\ 1048 \\ \hline \end{array}$$

119996 le maître l'arrête avant qu'elle ne place la virgule)

– Maître (s'adressant à l'élève 1) : Alors, ce nombre (il montre 119996), ce serait le résultat de quel calcul ?

– Elève 1 : De 2620 par 458

– Maître : Evidemment ! Eh bien, non ! Ce serait le résultat de ... (il désigne l'élève 2)

– Elève 2 : De 262 par 458

– Maître : Voilà ! De 262 par 458

Grille - statut de l'erreur -

IDENTIFICATION	DETECTION DE L'ERREUR PAF	NIVEAU D'INTERPRÉTATION																																																
Date : Enseignant : CM2 <input checked="" type="checkbox"/> Etablissement : 6° <input type="checkbox"/>	<table border="1"> <tr><td>M</td><td>E</td></tr> <tr><td>x</td><td></td></tr> <tr><td></td><td></td></tr> <tr><td></td><td></td></tr> <tr><td></td><td></td></tr> <tr><td></td><td></td></tr> </table>	M	E	x										<table border="1"> <tr><td>0</td><td>I</td><td>II</td><td>III</td><td>IV</td><td>V</td></tr> <tr><td></td><td></td><td></td><td></td><td>x</td><td>x</td></tr> <tr><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td></tr> <tr><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td></tr> <tr><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td></tr> <tr><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td></tr> </table>	0	I	II	III	IV	V					x	x																								
M	E																																																	
x																																																		
0	I	II	III	IV	V																																													
				x	x																																													
N° de la grille	M = le maître E = un ou des élèves																																																	

ENONCES DES ERREURS

- E n° 1 - c'est un carré -
- E n°
- E n°
- E n°
- E n°

	A	E	C
LE MAITRE	prend l'initiative de	demande à ou laisse l'élève qui a fait l'erreur	demande à, ou laisse à 1 autre élève ou à la classe le soin de
1. différer ou abandonner la correction			
2. corriger, donner la bonne réponse		①	
3. chercher la bonne réponse avec son aide, son guide			
4. répéter, formuler, commenter donner son avis (le maître n'apporte pas d'informations supplémentaires)	1		
5. donner un élément de références • règle, définition • exemple, fait, contre exemple • allusion au savoir antérieur • élément de consigne complémentaire	1		
6. démontrer le mécanisme de l'erreur, expliquer			1
7. chercher dans une documentation, recourir à une expérience, résoudre 1 autre exercice du même type (le maître fournit une aide indirecte)			1

NIVEAUX D'INTERPRETATION

L'enseignant considère que :	Précisions. Exemples
0 – L'erreur est due à un non-respect de la consigne	L'enseignant estime que la consigne n'a pas été comprise ou a été comprise de manière incomplète
I – L'erreur se situe en dehors de sa discipline	Orthographe, présentation ...
I bis L'erreur porte sur un savoir "général"	"Un grossiste est quelqu'un qui vend de grosses robes"
II – L'erreur porte sur des éléments du savoir disciplinaire	L'enseignant estime que l'élève ne connaît pas une définition, une règle, une convention, ... – "5 est divisible par 35" au lieu de "5 est diviseur de 35" – "pourquoi n'a-t-on pas le droit d'écrire 2cm=1km" – "il a oublié la définition du carré; qui la lui rappelle?"
III – L'erreur porte sur un savoir-faire disciplinaire	L'enseignant estime que l'élève ne sait pas utiliser une technique, un algorithme – Mesurage, calcul, conversion ... – Construire une figure à la règle et au compas
IV – L'erreur révèle un défaut de logique, de raisonnement et/ou une absence de référence au sens	L'enseignant interprète l'erreur comme relevant du raisonnement (confusion hypothèse-conclusion, par exemple), de l'utilisation non pertinente modèle mathématique, ...
V – L'enseignant intervient sur un comportement jugé à tort comme erroné	– Utilisation d'un autre procédé que celui attendu par l'enseignant – La procédure de l'élève est correcte, mais l'élève ne peut la mener à terme – La consigne, ambiguë, a été interprétée par l'élève autrement que par l'enseignant
VI – Indices particuliers	0–Erreur dans la discipline, mais en dehors du thème de la séquence 1– Erreur dans la discipline, et en rapport avec l'objet de la séquence

II – L'INTERPRETATION DES ERREURS

Nous regroupons en 4 classes nos analyses :

- classe 1 : l'erreur n'est pas considérée par l'enseignant comme relevant des mathématiques;
- classe 2 : l'erreur est, pour l'enseignant, due à une absence de connaissance ou à une mauvaise utilisation de certains savoirs ou savoir-faire mathématiques;
- classe 3 : l'erreur est interprétée comme relevant d'un défaut de logique ou de raisonnement ou d'une absence de signification des savoirs utilisés;
- classe 4 : l'enseignant intervient sur un comportement qu'il juge à tort comme erroné, par exemple l'élève apporte une autre réponse que celle que l'enseignant attend.

Le schéma suivant (annexe 1) illustre les observations recueillies. Trois observations peuvent être faites :

- tout d'abord, plus de deux erreurs sur trois, au CM2 comme en 6ème, appartiennent à la classe 2. L'erreur est interprétée alors comme un manque de connaissance : l'élève ne sait pas ou ne sait pas faire, il n'a pas appris; ...
- ensuite, on peut noter la faible proportion d'erreurs considérées au niveau du raisonnement ou de la signification des savoirs;
- ainsi les mathématiques enseignées apparaissent-elles ici davantage comme un ensemble de savoirs et de règles que comme des outils ayant du sens pour l'élève et dans lesquelles le raisonnement joue un rôle déterminant; c'est l'image qu'en donne l'enseignant à ces élèves au travers de la façon dont il interprète leurs erreurs.

La correction : qui intervient ? pour quoi faire ?

Pour simplifier, nous avons croisé deux types d'observations :

- d'une part, qui intervient : l'enseignant lui-même ou un élève qu'il a sollicité pour cela ?
- d'autre part, pour quoi faire : énoncer la bonne réponse, ou reformuler ce qui vient d'être dit ou encore apporter des éléments de référence ou des explications ?

Les premiers schémas (annexes 2, 3 et 3 bis) donnent une image globale de ces observations :

- l'enseignant partage ses propres interventions avec celles de ses élèves, pratiquement à égalité : les élèves sont donc très souvent sollicités;
- plus de la moitié des interventions sont consacrées à tenter de donner la bonne réponse, et moins d'une intervention sur cinq est destinée à fournir une explication ou simplement rappeler un élément de savoir utile : la bonne réponse semble donc avoir plus d'importance que les explications qui la justifient

Si on s'intéresse maintenant au partage des tâches (annexes 4 et 4 bis), on est frappé par deux faits :

- à l'élève, il revient de donner, d'énoncer la bonne réponse, mais rarement d'expliquer;
- à l'enseignant, il revient de reformuler ce qui est dit (correctement sans doute) et de fournir les explications nécessaires.

CONCLUSION

Les résultats présentés ici révèlent en fait une tendance moyenne, mais une analyse plus fine montre que cette tendance est largement dominante pour les enseignants des deux niveaux étudiés. Ces résultats nous permettent de préciser quelques aspects des rapports enseignant-élèves-savoir à propos des mathématiques.

* **La séquence de mathématique est d'abord consacrée aux mathématiques.** Seules quelques erreurs relevant du français (orthographe, correction d'un énoncé oral, ...) sont prises en compte. Les erreurs retenues relèvent donc essentiellement des mathématiques, et plutôt du thème abordé ce jour là.

* **Les mathématiques sont une discipline où on apprend et où on applique.** Elles apparaissent ainsi à l'élève comme un ensemble de savoirs, de règles, d'algorithmes. La plupart des erreurs sont en effet interprétées par l'enseignant comme relevant d'un élément de savoir ou d'un savoir-faire non maîtrisé. Peu d'erreurs sont corrigées en référence à une signification ou au raisonnement. Ce constat "moyen" doit cependant être atténué : il n'y a pas, à cet égard, homogénéité à l'intérieur de chacune des deux populations, même si les enseignants de sixième apparaissent plus groupés que ceux de CM2.

* **Les erreurs sont considérées comme des parasites (comme des fautes ?) :** il faut les corriger rapidement en leur substituant la bonne réponse.

* **La réponse est plus importante que l'activité qui y conduit.** Il s'agit d'abord de substituer la réponse correcte à la réponse erronée.

* **Le savoir est d'abord le fait de l'enseignant.** Les élèves sont fréquemment sollicités, mais essentiellement pour donner la bonne réponse. Il revient, par contre, à l'enseignant de commenter les réponses et d'apporter les explications (s'il y en a); cependant les professeurs de sixième font un peu plus appel pour cela à leurs élèves.

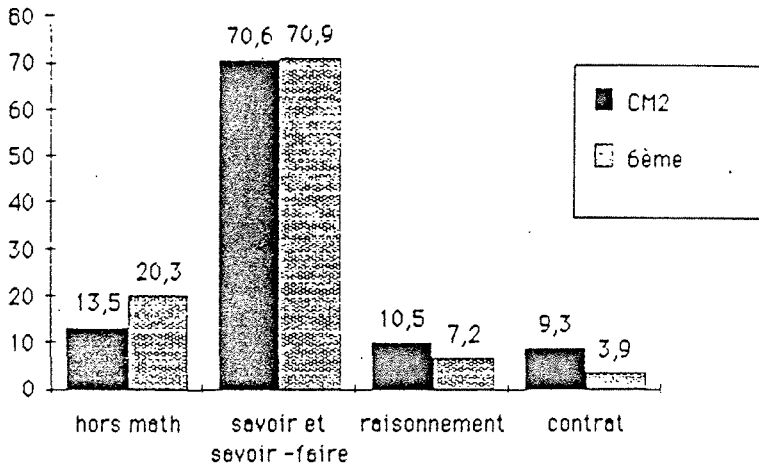
En bref, l'erreur est rarement analysée, décortiquée avec et par les élèves : l'enseignant ne la considère pas, en général, comme un support possible pour les apprentissages.

Il apparaît donc qu'un travail important doit être réalisé sur ce sujet pour une meilleure information et pour une meilleure formation des enseignants de mathématiques, dans une triple direction :

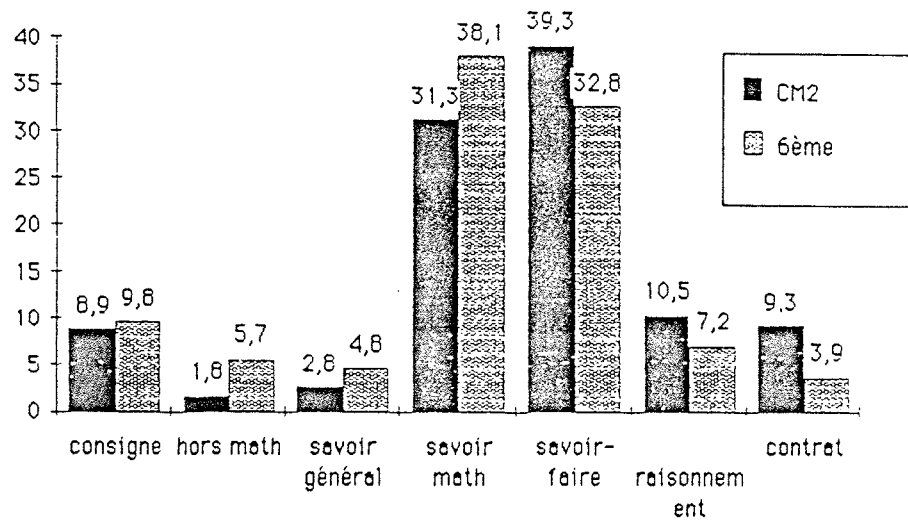
— avant l'apprentissage d'une notion, et en cours d'apprentissage, se donner les moyens de connaître les conceptions, les représentations, les procédures "spontanées" des élèves;

— lorsqu'une erreur (ou plus souvent un ensemble d'erreurs) est constituée en obstacle, élaborer des situations d'enseignement convenables qui permettent à l'élève une prise de conscience du caractère erroné de sa réponse et l'engagent à modifier ses conceptions initiales, à y renoncer pour en construire de nouvelles;

— enfin agir au niveau de ce que les didacticiens français appellent le "contrat didactique". En effet, si l'erreur est considérée comme un phénomène anormal, comme une faute, si elle est systématiquement l'occasion de sanctions, l'élève cherchera des recettes pour répondre à l'attente de l'enseignant, il se réfugiera dans le "n'importe quoi" ou le refus de répondre; au contraire, si l'élève a le sentiment que ses réponses, même celles qui sont erronées, sont prises en considération, deviennent un objet de travail, il se centrera plus volontiers sur la tâche proposée, et peut-être moins sur ce qu'il croit que l'enseignant attend de lui, il répondra davantage au problème posé qu'à l'enseignant qui pose la question.



Annexe 1 : interprétation des erreurs

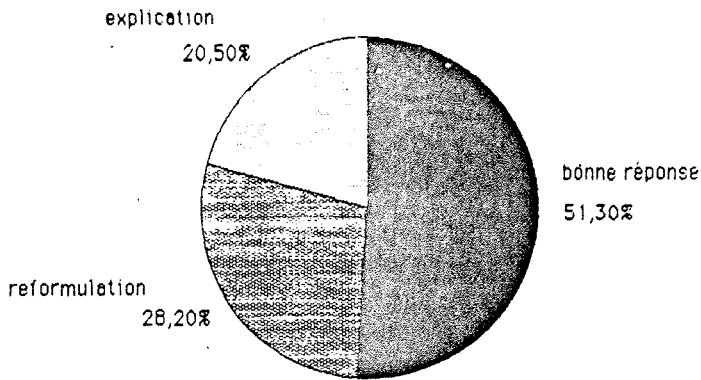


Annexe 1 bis : interprétation des erreurs (détails)

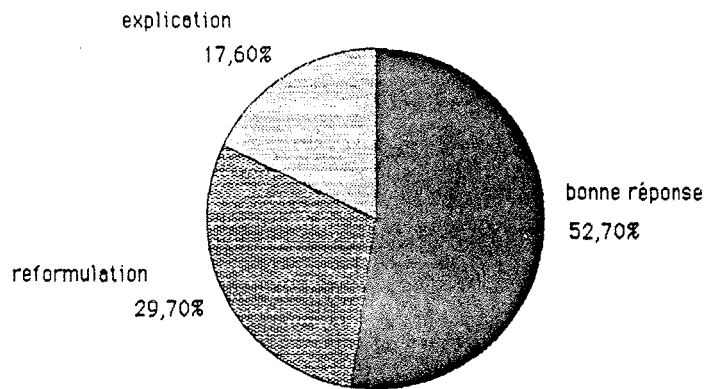
	INTERVENTIONS CM2	
	enseignant	élèves
bonne réponse	8,5	42,8
reformulation	22	6,2
explication	14,3	6,2
	44,8	55,2

	INTERVENTIONS 6ème	
	enseignant	élèves
bonne réponse	9,8	42,9
reformulation	26,4	3,3
explication	10,1	7,5
	46,3	53,7

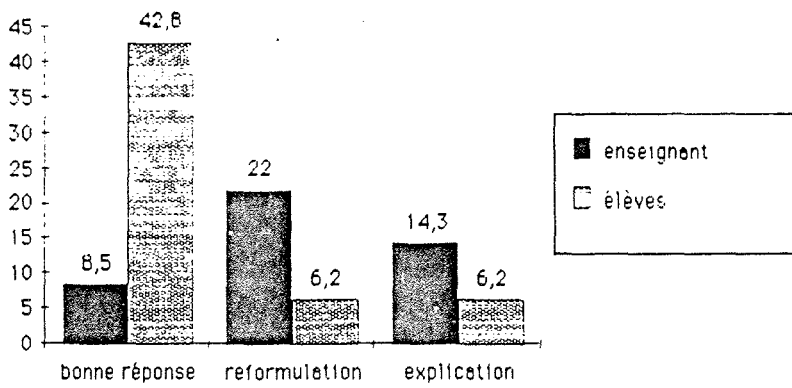
Annexe 2 : qui intervient ? pour quoi faire ?



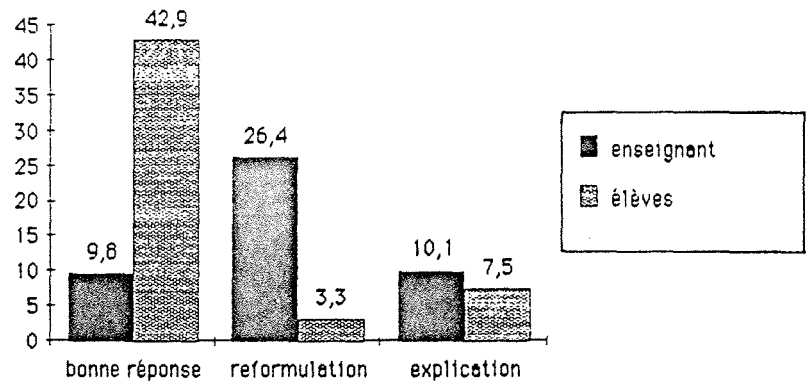
Annexe 3 : types d'intervention (CM2)



Annexe 3bis : types d'interventions (6ème)



Annexe 4 : le partage des tâches (CM2)



Annexe 4bis : le partage des tâches (6ème)

BIBLIOGRAPHIE

- BACHELARD G., *La formation de l'esprit scientifique*, Vrin, 1967
- BROUSSEAU G., *Les obstacles épistémologiques et les problèmes en mathématiques*, Recherche en didactique des mathématiques, 1983, vol. 4.2
- SALIN M.H., *Le rôle de l'erreur dans l'apprentissage des mathématiques à l'école primaire*, mémoire de DEA, publié par l'IREM de Bordeaux
- CHARNAY R., *Rôle et gestion des erreurs dans le cadre de la construction des connaissances*, colloque INRP-Direction des écoles; "Actions et recherches pour transformer les écoles maternelles et élémentaires" janvier, 1985, INRP
- CHARNAY R., *L'erreur dans l'enseignement des mathématiques*, "En mathématiques, peut mieux faire; l'élève face à la difficulté en mathématiques" Rencontres Pédagogiques 1986, n° 12
- COLCMB J., GUILLAUME J.C., CHARNAY R., *Articulation école-collège, Quels contrats disciplinaires en mathématiques ?*, Revue Française de Pédagogie, n° 80, INRP, 1987
- Equipe de recherche Articulation école-collège, *Le statut de l'erreur dans l'enseignement en CM2 et en 6ème*, collection école-collège, INRP, 1987
- Equipe de recherche Articulation école-collège, *Les enseignements en CM2 et en 6ème, Ruptures et continuités*, collection Rapports de recherches, n° 11, 1987
- Equipe de recherche Articulation école-collège, *Enseignants de CM2 et de 6ème face aux disciplines*.
-

