À PROPOS DE CHARADES DONT LA SOLUTION EST UN SYSTÈME D'ÉQUATIONS À DEUX INCONNUES.

Geneviève DIDIERJEAN, Claire DUPUIS,
Raymond DUVAL, Marie-Agnès EGRET,
Daniel KREMER, Gilles ROBERT,
Brigitte WENNER, Michèle ZIEGLER.
IREM de Strasbourg

Il y a dans l'enseignement des mathématiques des points sensibles sur lesquels il faut passer sans appuyer si l'on veut éviter tout désagrément aux élèves comme aux enseignants. La démonstration en est un, bien connu, la résolution des problèmes de mise en équations en est un autre.

D'un point de vue mathématique, l'enjeu peut sembler de moindre importance pour les problèmes de mise en équations que pour la démonstration. Il ne s'agit, après tout, que d'appliquer des techniques algébriques élémentaires à des problèmes extra-mathématiques. Et si les élèves, de troisième, de seconde et parfois de première, qui ont appris avec pas mal de succès à résoudre des équations et des systèmes, échouent quand il s'agit d'écrire un système d'équations à partir d'un énoncé, ne sommes-nous pas là aux marges d'une activité proprement mathématique ? Et la faute, n'en déplaise aux enseignants de français, n'en reviendrait-elle pas à des difficultés de langage ou de compréhension des textes ?

Du point de vue du rôle que les mathématiques peuvent jouer dans la formation générale de base des élèves, l'enjeu apparaît bien plus important, car il s'agit pour le moins de montrer à quoi peuvent servir les mathématiques que l'on apprend. Et l'on connaît la vague de fond, qui dans beaucoup de pays, tend à porter au premier rang un enseignement des mathématiques qui serait effectué à partir de leurs applications concrètes et qui serait centré sur ces applications. Demain, il n'y aura peut-être de mathématiques socialement et éducativement acceptables qu'appliquées. Dans ces conditions...

Il y a là matière à débat. Mais un tel type de débat surgit souvent comme un écran pour éviter le problème de fond que posent les difficultés systématiquement rencontrées par les élèves pour «écrire un système d'équations» : *quelles sont les opérations requises pour effectuer cette tâche, ou en quoi consiste la complexité de cette tâche ?* Tant qu'on ne dispose pas d'éléments de réponse précis pour ce problème, toute proposition de méthodes pour apprendre à mettre en équations ne peut que relever d'une démarche un peu aveugle.

C'est à cette question qu'est consacrée la brochure (Problèmes de mise en équations, groupe Math-Français de l'IREM de Strasbourg[1], 1996) sur laquelle s'appuie cet article. Nous ne reprendrons pas ici le premier chapitre de la brochure qui présente un bilan critique des méthodes de mise en équations que l'on trouve dans les manuels. L'apprentissage de la mise en équations, c'est-à-dire du passage du texte de l'énoncé à l'équation ou au système d'équations est trop souvent court-circuité. Tout se passe comme si donner un énoncé était une formalité obligée, les choses sérieuses intellectuellement et mathématiquement ne commençant qu'avec la résolution technique des équations !

Pour dégager toutes les opérations, explicites ou implicites, que l'on effectue quand on passe d'un énoncé à l'écriture d'un système, nous n'avons pas pu nous contenter d'utiliser des exemples de problèmes mais nous avons dû déterminer un ensemble d'énoncés de problèmes possibles. Car d'un énoncé à un autre, il peut y avoir des variations qui vont modifier radicalement la complexité de la tâche. Nous avons également pris en compte un autre passage : le passage de ce que nous avons appelé «la présentation complète» d'une situation extra-mathématique à l'écriture de plusieurs systèmes différents[2]. L'examen de ces passages nous permet de voir que les problèmes de mise en équations mobilisent des opérations discursives de désignation d'objet et d'expression de relations à l'aide de mots comme à l'aide de symboles. Ces opérations sont beaucoup plus fines que celles habituellement mobilisées dans la lecture courante d'un texte ou dans la manipulation calculatoire d'équations. Et nous touchons là quelque chose d'essentiel pour l'apprentissage des mathématiques. Car cette mobilisation des opérations discursives de désignation d'objets n'a pas seulement un intérêt pour la mise en équations, elle est également requise pour que l'introduction des écritures littérales ou que l'exigence d'un langage précis aient un sens aux yeux des élèves.

Naturellement nous ne négligeons pas la question pratique, : *comment faire pour apprendre aux élèves à résoudre les problèmes de mise en équations ?* Mais nous ne développerons pas ce sujet dans le présent article[3].

---

1 Les auteurs en sont : Isabelle Beck, Nicole Cordier, Geneviève Didierjean, Claire Dupuis, Raymond Duval, Marie-Agnès Egret, Daniel Kremer, Gilles Robert, Michèle Vaillant, Brigitte Wenner, Ghislaine Werguet, Michèle Ziegler.
2 Voir dans op. cit.
3 On trouvera dans la brochure (op. cit.) la suite de l'analyse développée ici et la description de séquences de travail pratiquées par des membres du groupe dans leurs classes.

1. De la lecture de l'énoncé à l'écriture du système d'équations

La question essentielle concernant les problèmes de mise en équations est celle-ci : comment passe-t-on de la lecture de l'énoncé du problème à l'écriture du système d'équations ?

Généralement les enseignants regardent à peine l'énoncé. Un bref regard sur les deux ou trois lignes pour repérer les inconnues, un peu comme on cherche un article sur un rayon, et ils savent écrire le système. Pour eux, hormis le cas où il y des astuces, un énoncé en vaut un autre : non seulement la distance qui sépare l'énoncé et l'écriture du système ne change pas mais elle se franchit sans qu'on s'en aperçoive. Alors pourquoi tant d'élèves restent-ils «plantés» devant l'énoncé ? Pour expliquer cette difficulté et pour la faire surmonter, il ne s'agit pas de décrire un algorithme performant qui peut-être n'existe pas, ni d'analyser toutes les erreurs observables des élèves, il s'agit d'abord de comprendre la tâche cognitive que constitue ce passage.

Arrêt sur lecture : l'énoncé

Deux remarques sur la compréhension des énoncés de problèmes vont guider l'analyse de ce passage:

1. D'une façon générale, la compréhension d'un énoncé de problème consiste dans l'identification des *objets* que l'énoncé décrit et dans l'identification des *relations qu'il établit entre ces objets.*

Ce ne sont ni les mêmes objets ni les mêmes relations que l'on identifie dans un énoncé de problème, s'il s'agit de comprendre la situation extra-mathématique décrite ou évoquée par l'énoncé ou s'il s'agit d'écrire un traitement mathématique à partir de l'énoncé : par exemple un système d'équations.

2. Dans les problèmes de mise en équations, *les objets à identifier sont des quantités inconnues ; les relations entre ces objets* sont les relations qui permettent d'*articuler en une équation les quantités inconnues identifiées.*

Les quantités inconnues ne sont pas ce que l'on appelle habituellement les «inconnues», et que l'on représente dans l'écriture des équations par les lettres x et y. Un système d'équations à deux inconnues requiert généralement, comme nous le verrons plus loin, *quatre quantités inconnues exprimées à l'aide des deux dénominations de base x et y.*

Ces quantités inconnues peuvent être décrites ou désignées par des expressions linguistiques à chaque fois différentes ou par des expressions linguistiques ayant une partie commune. Nous appellerons «dénomination de base» une expression désignant ou décrivant une quantité inconnue. Un énoncé peut donc présenter deux dénominations de base ou quatre dénominations de base.

Comprendre l'énoncé consiste donc d'abord à identifier les expressions linguistiques *décrivant les quantités inconnues.*

Les relations entre les quantités inconnues sont *des relations d'égalité ou des relations qui articulent des quantités , connues ou inconnues, en un membre d'équation.*

L'analyse du passage de l'énoncé à l'écriture du système d'équations doit donc porter sur deux points :

- l'identification des quantités inconnues décrites ou désignées dans l'énoncé et la conversion de leur expression linguistique en une expression algébrique,
- l'identification des expressions correspondant aux relations.

Nous verrons qu'il s'agit là de deux opérations totalement indépendantes l'une de l'autre. Les difficultés auxquelles elles peuvent donner lieu ne sont pas de même nature car elles ne relèvent pas des mêmes fonctions discursives.

1.1. L'identification des quantités inconnues et la conversion de leur expression linguistique

Cette première opération cognitive comprend deux étapes très différentes :

La première porte directement sur l'énoncé. Elle suppose *une lecture dirigée par une liste de questions* pour identifier toutes les quantités inconnues qui sont désignées ou décrites dans l'énoncé et il est possible[4] de donner un moyen de *faire générer ces questions par l'élève lui-même, ceci sans lui donner une liste de questions toutes prêtes à l'emploi* et qui ne seraient pas utilisables pour un autre type d'énoncé.

La deuxième étape porte sur la conversion du texte en écriture algébrique et comporte une difficulté spécifique. Comment traduire les expressions linguistiques décrivant les quantités inconnues en expressions algébriques décrivant ces mêmes quantités, étant donné que l'on ne dispose pas nécessairement du même nombre de dénominations de base dans chacun des deux registres ? En effet, l'écriture algébrique d'un système de deux équations n'autorise que deux dénominations de base, deux lettres désignant les deux inconnues, pour exprimer les quatre quantités inconnues, alors que le nombre de dénominations de base utilisés dans l'énoncé peut varier.

Deux cas peuvent alors se présenter :

a) L'énoncé exprime lui aussi les quatre quantités inconnues à l'aide de deux dénominations de base. Et alors, la conversion des expressions linguistiques en expressions algébriques est immédiate. A la lecture, l'identification des quantités inconnues coïncide avec le choix des inconnues. C'est le cas de *transparence.*

Problème 1

Un bassin est alimenté par deux fontaines A et B. Si on laisse couler A pendant 4 h et B pendant 2 h, on obtient 64 l. Si on laisse couler A pendant 3 h et B pendant 4 h, on obtient 62 l. Quel est le débit de chaque fontaine ?

---

4 Voir le chapitre IV de la brochure (op. cit.)

Dans cet énoncé, les quantités inconnues sont exprimées par des propositions qui présentent deux à deux une même dénomination de base :

« **A coule** pendant 4h », « **A coule** pendant 3h ». (Dénomination de base : A coule ... *(débit de la fontaine A))*

« **B coule** pendant 2h », « **B coule** pendant 4h ». (Dénomination de base : B coule ... *(débit de la fontaine B))*

Ces quatre expressions désignent quatre quantités inconnues différentes *à partir de deux dénominations de base* (en caractère gras ci-dessus). La conversion est donc immédiate. En redésignant ces deux dénominations de base respectivement par x et par y on a les quatre désignations algébriques : $4x$, $3x$, $2y$, $4y$.

b) L'énoncé exprime les quatre quantités inconnues en recourant à plus de deux dénominations de base. Un travail de redésignation de deux des quantités inconnues est alors nécessaire pour passer aux expressions algébriques. C'est le cas d'*opacité.*

Problème 2

Un vélomoteur monte une colline à la vitesse de 15 mètres par seconde ; puis il redescend de l'autre côté à la vitesse de 21 mètres par seconde. Le parcours total a duré 270 secondes, et la montée est de 126 mètres plus longue que la descente. Combien de temps a duré la montée ?

Dans cet énoncé les quantités inconnues sont désignées par des expressions n'ayant aucune dénomination de base commune:

« Le parcours total a duré.... » qui se nominalise en «*la durée de la montée* » et la « *la durée de la descente* »

« la montée est de 126 mètres plus longue que la descente» qui exprime une comparaison entre « *la longueur de la montée* » et « *la longueur de la descente* ».

Le problème que soulève la formulation de l'énoncé n'est pas à chercher dans les légères modifications des deux propositions de la seconde phrase, mais dans le fait que *nous avons quatre dénominations de base.* Une conversion immédiate, comme dans le problème 1 ci-dessus, nous donnerait une désignation algébrique des quantités inconnues par quatre inconnues. Ce qui conduirait au système d'équations suivant :

$x + y = 270$

$z = w + 126$

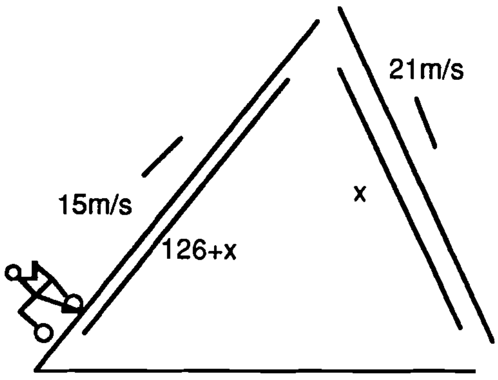
Ce système a quatre quantités inconnues ; il faut donc, pour pouvoir écrire un système d'équations pouvant être résolu, *redésigner deux des quatre quantités inconnues* de façon à ne plus avoir que deux dénominations de base au lieu de quatre. Par exemple « *la longueur de la montée* » équivaut à « *la durée de la montée* multipliée par la vitesse de la montée » et « *la longueur de la descente* » équivaut à « *la durée de la descente* multipliée par la vitesse de la descente ». Cette redésignation est une *opération de réduction à deux dénominations de base* : «la durée de la montée» et la «la durée de la descente». L'expression algébrique des quatre quantités inconnues de l'énoncé devient alors immédiat : x, y, $15x$, $21y$.

Le dessin ci-dessous, fait par un élève de seconde, illustre bien deux choses:

- l'hésitation entre les objets extra-mathématiques (montée, descente) et les objets mathématiques (quantités inconnues) auxquels l'énoncé réfère,
- la confusion entre les dénominations de base et l'expression des quantités inconnues

Extrait du travail d'un élève de seconde :

"Nous interprétons les données par un dessin explicatif:



15m+21m: 270s

Nous choisissons x pour la longueur de la descente et y pour le temps.
Nous avons trouvé: $(126 + x)15\,y + x + 21y$ =270s."

On remarque que la redésignation des quatre quantités inconnues se fait dans ce problème en fonction d'une *relation multiplicative entre deux grandeurs* de nature différente, relation correspondant à la notion de vitesse : $v = d/t$. Mais cette redésignation peut aussi se faire en fonction d'*une relation additive* comme dans le problème suivant:

Problème 3
Trouver un nombre de deux chiffres sachant que la somme des deux nombres que ces chiffres représentent est 13, et que la différence entre le nombre cherché et le nombre obtenu en permutant les deux chiffres est 45.

Il y a quatre quantités inconnues : « un nombre de deux chiffres » (= « le nombre cherché »), « les deux nombres que ces chiffres représentent », c'est-à-dire « le nombre représenté par le premier chiffre » et « le nombre représenté par le deuxième chiffre », « le nombre obtenu en permutant les deux chiffres ». La désignation de ces quatre quantités inconnues se fait à partir des dénominations de base dont une est implicite : les deux chiffres, le nombre représenté par les deux chiffres, et la position des chiffres (dizaine, unité). Pour opérer la réduction, il faut donc utiliser la relation additive qui permet de convertir « le nombre représenté par les deux chiffres » en « $10x + y$ » et « le nombre obtenu en permutant les deux chiffres » en $10y + x$.

Pas un scientifique ne confond un objet et sa dénomination. Pas un mathématicien ne confond un nombre et un chiffre. On pourrait donc s'attendre naturellement à ce qu'aucun enseignant ne confonde les quantités inconnues, qui sont des objets pouvant être décrits linguistiquement et redésignés algébriquement, et les « inconnues » qui sont des dénominations de base pour désigner algébriquement des quantités inconnues. Pourtant on parle allègrement de « commencer par choisir les (deux) inconnues ». Qu'est-ce que cela veut dire ? commencer par choisir des dénominations de base (lesquelles ne sont pas des objets) ? Identifier ces (quatre) objets que sont les quantités inconnues ? Redésigner algébriquement ces objets ?

Dans le cas transparent, il n'y a pas à se poser ce genre de questions, puisque l'expression linguistique des quatre quantités inconnues se fait à partir de deux dénominations de base que l'on peut mettre directement en correspondance avec les deux inconnues marquées par deux lettres. Le choix des dénominations de base, l'identification des quantités inconnues et la redésignation algébrique se confondent dans une seule et même étape.

Il n'en va plus de même dans le cas opaque, si on ne s'autorise que l'écriture d'un système à deux inconnues. L'énoncé utilise plus de deux dénominations de base pour décrire ou désigner les quantités inconnues. Il faut donc opérer une réduction à deux dénominations de base pour avoir une correspondance avec les deux «inconnues». Or, pour pouvoir être effectuée, cette réduction requiert deux conditions :

- avoir pris conscience de la différence entre *le choix de deux dénominations de base* pour désigner les quantités inconnues et *la désignation des objets que sont les quantités inconnues*. De même que 6 ou 9 peuvent être deux chiffres permettant d'écrire des nombres (699, 969...) ou deux nombres, de même x et y peuvent être deux dénominations de base ou deux expressions de quantités inconnues (cf. problème 3)
- avoir pris conscience qu'*un même objet*, ici une quantité inconnue, *peut être désigné de façon très différente selon les dénominations de base choisies*, et cela aussi bien dans le registre de la langue naturelle que dans celui de l'écriture algébrique. Et cela renvoie à une opération discursive fondamentale qui ne relève pas d'une question de bonne ou mauvaise connaissance du français (Duval 1995, p.99-100).

1.2. L'identification des relations

L'identification des quantités inconnues auxquelles les formulations de l'énoncé réfèrent et leur conversion en expressions algébriques ne sont pas des opérations suffisantes pour écrire l'équation. Il faut aussi identifier les relations que l'énoncé établit entre ces quantités inconnues et qui vont permettre d'identifier les membres de chaque équation. Ces relations sont, d'une part, celles articulant deux quantités inconnues en un membre d'équation et, d'autre part, les plus importantes, celles qui désignent les relations d'égalité. Deux cas peuvent se présenter:

1.2.1. Cas de marquage explicite des relations

Reprenons l'énoncé du problème 1 ci-dessus:

Si on laisse couler A pendant 4 h *et* B pendant 2 h, *on obtient* 64 l.
+ =
Si on laisse couler A pendant 3 h *et* B pendant 4 h, *on obtient* 62 l.
+ =

Nous avons mis en caractère italique les expressions qui marquent les relations pertinentes pour l'écriture de l'équation. Le marquage ne peut pas être plus explicite puisque la relation d'égalité est exprimée ici par le verbe de la proposition principale et que la conjonction « et » se convertit directement en un signe d'addition ! En réalité, le cas explicite classique est celui où d'une part, nous avons une phrase (ou une proposition indépendante) par équation, et où, d'autre part, l'organisation syntaxique de la phrase peut être mise en correspondance terme à terme avec l'organisation de l'équation. Très souvent, le marquage de la relation d'égalité est donnée dans une proposition qui exprime une relation additive entre les deux situations décrites. C'est le cas, par exemple, de l'énoncé du problème 2:

la montée *est* de 126 mètres *plus longue* que la descente
se traduit par
longueur montée = 126 + longueur descente.
et
le parcours *total* a *duré* 270s
peut être paraphrasé par
la somme des durées est égale à 270s.

Cet exemple permet en outre de voir que les énoncés peuvent être opaques pour l'identification des objets et transparents ou explicites pour l'identification des relations. Ce sont là deux facteurs totalement indépendants pour la compréhension et la conversion des énoncés.

Dans le problème ci-dessus, les quantités sont continues mais on peut avoir la même situation avec des quantités discrètes :

Problème 4
Un enfant dispose de 15 jetons blancs et de 12 jetons noirs. Les jetons de la même couleur ont le même diamètre. Le diamètre d'un jeton blanc mesure 6 mm de plus que le diamètre d'un jeton noir. La rangée des 15 jetons blancs alignés côte à côte dépasse de 144 mm la rangée des 12 jetons noirs alignés côte à côte.
Quel est le diamètre d'un jeton blanc ?

Dans cet exemple les quantités inconnues sont: «le diamètre d'un jeton blanc», «le diamètre d'un jeton noir», «la longueur de la rangée des jetons blancs», «la longueur de la rangée des jetons noirs».
Les relations entre les quantités inconnues sont données par:
la rangée des 15 jetons blancs alignés côte à côte *dépasse* de 144m la rangée des 15 jetons noirs alignés côte à côte
qui se traduit par
longueur de la rangée des jetons blancs = 144 + longueur de la rangée des jetons noirs.
Le diamètre d'un jeton blanc *mesure* 6 mm *de plus que* le diamètre d'un jeton noir
qui se traduit par
le diamètre d'un jeton blanc = 6 + le diamètre d'un jeton noir

1.2.2. Cas de marquage semi-implicite ou entièrement implicite des relations

Problème 5
Une usine fabrique deux sortes d'objets A et B. L'objet A nécessite 2,4 kg d'acier et 3 h de fabrication. L'objet B nécessite 4 kg d'acier et 2 h de fabrication. Calculer le nombre d'objets de chaque sorte sachant que l'on a utilisé, pour les produire, 80 kg d'acier et 67 h de travail.

Cet énoncé est intéressant puisqu'il rentre dans le cas transparent, pour l'identification des objets. En revanche, les relations nécessaires pour écrire l'équation ne sont pas toutes marquées explicitement. La proposition « on a *utilisé* pour les produire » permet d'identifier la relation d'égalité pour les deux équations. Mais il faut paraphraser l'expression « le *nombre* d'objets de chaque sorte... » par « le nombre d'objets de A et le nombre d'objets de B» pour constituer le premier membre de chaque équation. En outre la conjonction «et» fonctionne comme un séparateur des quantités inconnues pour chacune des deux équations. Ici l'emploi de la conjonction «et» peut donc être trompeur, car cette indication ne sert à rien pour écrire le système d'équations. L'organisation de l'énoncé correspond en réalité à une description du tableau suivant :

(SITUATION 1) L'objet *A* nécessite	*2,4 kg* d'acier (et)	*3 h* de fabrication.
(SITUATION 2) L'objet *B* nécessite	*4 kg* d'acier (et)	*2 h* de fabrication
Le *nombre* d'objets de chaque sorte... pour *les produire...*	*80 kg* d'acier (et)	*67 h* de travail
« *Production des objets* A *et* *des objets* B » (Relation entre les deux situations)	$2{,}4\ n_A + 4\ n_B = 80$	$3\ n_A + 2\ n_B = 67$

Voici maintenant un exemple d'énoncé où le marquage de la relation principale est complètement implicite.

Problème 6

Un avion décolle de sa base à 7 h, vole en ligne droite jusqu'à une balise radio, retourne vers sa base et atterrit à 10 h 30 min. A l'aller la vitesse de l'avion était de 960 km/h, au retour de 720 km/h.

Calculer les temps mis pour aller à la balise puis pour retourner à la base.

Dans cet énoncé, qui relève du cas opaque pour l'identification et la désignation des quantités inconnues, la relation permettant d'écrire l'une des équations est : «la distance de la base à la balise est *la même que* la distance de la balise à la base».

On voit donc la différence entre l'identification des quantités inconnues et l'identification des relations. Alors que la désignation des quantités inconnues est toujours explicite, même si elle n'est pas toujours directement utilisable, en revanche le marquage des relations non seulement n'est pas toujours explicite, mais il peut parfois être omis, ceci sous prétexte d'évidence.

Avant d'en finir avec notre arrêt sur lecture, rappelons que les énoncés de problèmes de mise en équations présentent deux types de difficultés entièrement indépendantes l'une de l'autre. La première est générale : c'est le caractère explicite ou implicite des informations. Pour les problèmes de mise en équations cette difficulté porte très exactement sur les informations relatives aux relations. En revanche, la seconde est spécifique aux problèmes de mise en équations : c'est la différence entre les inconnues qui sont des dénominations de base dans le registre de l'écriture algébrique et dont le nombre est déterminé par le nombre d'équations, et les quantités inconnues qui sont les objets décrits dans l'énoncé à l'aide de dénominations de base dans le registre linguistique et dont le nombre est variable.

2. A propos des énoncés de problèmes de mise en équations

2.1. Classification des énoncés de problèmes de mise en équations

Les exemples de problèmes que nous venons d'analyser suffisent à montrer que les énoncés de problèmes ne sont pas du tout équivalents. L'importance des variations que nous venons de dégager joue qualitativement (nature des opérations à effectuer, addition ou multiplication) et quantitativement (distance entre la lecture de l'énoncé et l'écriture du système d'équations) sur la complexité de la tâche globale de résolution. Il est donc important de disposer d'une catégorisation des différents types d'énoncé possibles de problème de mise en équations.

Pour déterminer le type d'un énoncé, il faut se poser deux questions :

1. La conversion requiert-elle une réduction à deux des dénominations de base des quantités inconnues? (et si oui, la redésignation se fait-elle en utilisant une procédure additive ou une procédure multiplicative?)
2. Le marquage linguistique des relations est -il explicite ou non ?

Selon les réponses à ces questions, on obtient un énoncé qui est de l'un des six types suivants:

<table>
<tr><td></td><td></td><td colspan="3">EXPRESSION DES QUANTITÉS INCONNUES</td></tr>
<tr><td></td><td></td><td>Transparente</td><td colspan="2">Opaque
(réduction à deux dénominations de base)</td></tr>
<tr><td></td><td></td><td></td><td>quantités discrètes qui permettent le recours à une procédure additive</td><td>quantités continues qui obligent le recours à une procédure multiplicative</td></tr>
<tr><td rowspan="2">INDICATIONS RELATIVES AU MARQUAGE DES RELATIONS</td><td>explicite et conversion immédiate</td><td>Pb. 1
A.1</td><td>Pb. 4
B.1</td><td>Pb.2
C.1</td></tr>
<tr><td>partiellement implicite ou complètement implicite (relativement à une relation d'égalité)</td><td>Pb.5
A.2</td><td>Pb.3
B.2</td><td>Pb.6
C.2</td></tr>
</table>

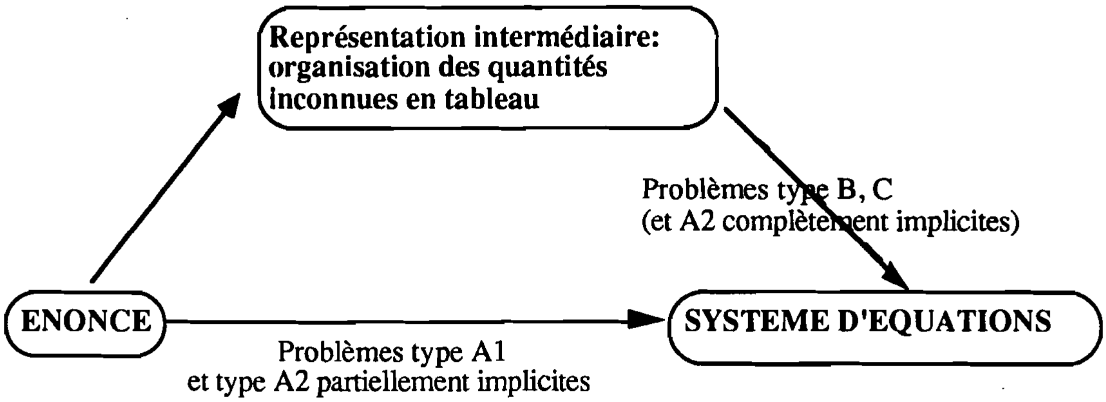
Les caractères italiques, dans chaque case, désignent chacun un type de problème.

On peut éventuellement envisager d'autres variations, comme par exemple la présence de pourcentages : « si la longueur d'un rectangle augmente de 10 %... ». Mais ces variations ne concernent plus la structure de l'énoncé ou du système d'équations mais seulement la présentation de l'une des quantités connues ou inconnues.

On voit tout de suite que le type de conversion à effectuer change selon la rédaction de l'énoncé. On peut avoir *un passage direct et immédiat* dans le cas de problèmes du type A1 ou au contraire un passage exigeant *un détour par une représentation intermédiaire* dans le cas des problèmes du type B ou C.

Pour les problèmes du type A2, cela peut dépendre des indications relatives aux relations que la rédaction laisse implicites. Rappelons que le degré d'implicite ne concerne pas les quantités inconnues mais les indications relatives aux relations.

Le passage de l'énoncé à l'écriture du système d'équations dépend du degré de correspondance entre l'organisation de l'énoncé qui est proposé comme problème et celle du système d'équations à écrire.



La compréhension des problèmes de mise en équations ne dépend pas d'une « compétence » générale de lecture des énoncés de problème, comme cela est quelque fois affirmé, mais d'un développement intériorisé d'une organisation en tableau de données relatives à des grandeurs, qu'elles soient reliées ou non par une relation multiplicative.

Ces remarques sont importantes car elles permettent de mieux analyser la nature des difficultés rencontrées pour la mise en équations de ces problèmes. Et elles montrent aussi que proposer de *commencer par « choisir les inconnues » est un non-sens*. D'ailleurs ce conseil aveugle est non seulement inefficace mais il peut conduire à renforcer des comportements de choix impressionnistes chez les élèves qui vont associer les inconnues à un mot de l'énoncé, celui-ci étant en général choisi dans la question posée.

2.2. Aperçu des variations possibles d'énoncés de problèmes extraits d'une même situation

A partir d'une situation complète, donnée sous la forme d'un texte descriptif ou narratif ou sous la forme d'un tableau, on peut construire différents types d'énoncés. Voici par exemple la présentation complète sous forme de tableau d'une situation comportant les valeurs numériques de six objets ainsi que les relations entre les objets de même nature (le problème 2 ci-avant est un des problèmes que l'on peut construire à partir de cette situation) :

	vitesse en m/s	durée en s	distance en m
montée	$v_1 = 15$	$t_1 = 161$	$d_1 = 2415$
descente	$v_2 = 21$	$t_2 = 109$	$d_2 = 2289$
relations	$v_2 - v_1 = 6$	$t_1 + t_2 = 270$	$d_1 - d_2 = 126$

Il y a évidemment un saut cognitif important quand on passe de la forme textuelle à la forme tabulaire pour la présentation complète d'une situation. Dans un cas, les données sont mélangées et, dans l'autre, elles sont classées. Qu'il faille ou non faire travailler les élèves sur ce saut est évidemment une question importante qui est abordé au chapitre IV de la brochure[5].

Mais la présentation complète d'une situation ne constitue pas un problème. Pour que la situation présentée devienne la matière d'un problème, il faut choisir parmi les données, celles qui figureront dans le texte de l'énoncé et celles qui seront des quantités inconnues. Ainsi, à partir d'une même situation, nous pouvons générer des problèmes très différents les uns des autres[6].

Il ne resterait plus pour fermer la boucle qu'à analyser les énoncés de ces problèmes en fonction de la classification proposée. Et on aurait alors une vue globale et précise de tout le fonctionnement cognitif impliqué par les problèmes de mise en équations.

3. Conséquences et perspectives pour l'enseignement

Nous venons de voir la complexité du passage d'un énoncé à l'écriture d'un système d'équations. Il n'est donc pas surprenant que les élèves ne le réussissent pas après quelques conseils ou quelques exemples ! Car un tel passage, dans le cas opaque, présente plein de fausses pistes. On peut d'abord se tromper sur la nature des objets à identifier : on établit alors une correspondance représentative entre les objets physiques (montée-descente, aller-retour...) de la description de la situation extra-mathématique évoquée et les objets qui sont pertinents pour la conversion en équations, à savoir des quantités inconnues. Mais de façon plus subtile et plus durable, on peut confondre les dénominations de base utilisées pour désigner les quantités inconnues et les objets qu'elles permettent de désigner : on établit alors de fausses correspondances entre les inconnues, c'est-à-dire les deux lettres utilisées comme dénominations de base dans l'écriture algébrique (pour un système de deux équations), et certains mots ou certaines expressions linguistiques qui, elles, désignent les quatre quantités inconnues.

---

5 Op. cit.
6 Voir page 40 de la même brochure (op. cit.)

On ne peut donc pas être surpris de voir les élèves emprunter toutes les fausses pistes possibles. Elles conduisent à une grande variété d'erreurs que l'on retrouve toujours pour les énoncés qui relèvent du cas d'opacité. Dans son travail de thèse, Kourkoulos (1990) en a établi une typologie de base. Il les a caractérisées comme des « défauts de représentation » des élèves. Vu la complexité de la tâche cognitive requise, dans le cas d'opacité, pour passer de l'énoncé à l'écriture du système d'équations, et en l'absence d'un apprentissage spécifiquement adapté à cette tâche, ces erreurs sont inévitables. Et il y a peu de chances que la plupart des élèves les surmontent au fur et à mesure qu'ils avancent dans le curriculum. On peut donc se poser une première question : *comment apprendre aux élèves à lire les énoncés, dont les rédactions peuvent beaucoup varier, de façon à ce qu'ils deviennent capables de reformuler sous une forme algébrique les informations lues, c'est-à-dire sélectionnées ?*

Toute lecture intégrée à une tâche implique que cette lecture se fasse de manière plus ou moins interrogative; car c'est en fonction de cette interrogation que les informations en relation avec la tâche à effectuer peuvent être sélectionnées. En d'autres termes, cela implique que le lecteur ait, implicitement ou explicitement, une grille de questions en tête. C'est en fonction de cette grille qu'il « voit » se détacher de l'énoncé les informations qui lui paraissent devoir ou pouvoir être utilisées. Nous pouvons donc préciser la première question en une deuxième : *quelle grille de questions peut-on construire pour la tâche de reformulation sous forme algébrique et comment les élèves peuvent-ils se l'approprier ?*

En ce qui concerne la première partie de cette question, on voit que la grille de questions doit être orientée vers deux types d'informations :

(1) les informations concernant les quantités inconnues ainsi que celles concernant les relations que l'énoncé établit ou présuppose entre ces quantités inconnues,

(2) les informations permettant d'organiser toutes les informations de (1) sous une forme qui permette un traitement dans le registre d'arrivée, à savoir un système d'équations.

Pour véritablement discriminer le type d'informations décrit en (1), c'est-à-dire pour être en mesure de comprendre les questions pouvant s'y rapporter, il faut avoir pris conscience de la distinction entre les objets désignés (les quatre quantités inconnues) et les dénominations que l'on utilise respectivement pour les désigner dans l'énoncé et dans l'écriture du système d'équations. Le point délicat consiste dans le fait que les « dénominations de base » (le lexique) utilisables dans l'écriture algébrique pour désigner les objets est plus restreint que celui qui est utilisé dans l'énoncé. Et pour véritablement discriminer le type d'informations décrit en (2), il faut avoir pris conscience que les objets désignés dans l'énoncé le sont en fonction de deux dimensions sémantiques (durée et distance, être un chiffre et représenter un nombre, nombre d'objets produits et ce que nécessite cette production, pour reprendre les énoncés cités plus haut), et que la reformulation sous forme algébrique doit conserver cette désignation en fonction de deux dimensions sémantiques.

Cette double prise de conscience, qui doit se faire simultanément, s'explicite dans une grille de questions ou peut émerger dans une activité où l'on apprend un type de questionnement orienté vers ces deux types d'informations. Une grille de questions ne saurait donc être codifiée à l'avance une fois pour toutes. C'est pourquoi, le biais du recours à la représentation de type tableau s'avère précieux.

Il n'est pas besoin d'expliquer pourquoi ce type de représentation s'impose structurellement par rapport à d'autres types de représentations comme celles auxquelles certains élèves recourent spontanément pour constater ensuite qu'ils sont en impasse (cf. l'exemple plus haut où est produite l'image de la montée et de la descente). En revanche, il est important de préciser que ce n'est pas tant le tableau qui importe que la fonction qu'on lui donne dans l'organisation des activités. Il ne s'agit pas de donner un tableau déjà rempli, ou même à remplir. Car alors tout le travail de prise de conscience relatif à la génération d'un grille de questions serait court-circuité. Il s'agit, au contraire, de faire construire le tableau, ce qui implique que l'on s'interroge sur la nature des informations à mettre dans les marges (déterminations sémantiques) et dans les cases (les quantités inconnues reformulées en fonction d'un lexique à deux lettres). Bref, il ne s'agit pas de faire utiliser des tableaux déjà partiellement construits (activité en aval de la représentation) mais de le faire construire (activité en amont). Car en amont *on ne travaille plus sur un seul registre de représentation*, l'énoncé pris en lui-même ou le tableau seul en oubliant le texte, *on travaille sur la conversion des représentations.* M. Kourkoulos (1990) et plus explicitement N. Cordier (1993) ou, plus récemment, une équipe d'enseignants (op. cit.) ont élaboré et expérimenté dans des classes des séquences d'apprentissage allant dans ce sens. C'est à ce stade d'une construction de tableau, en tant qu'elle porte sur une activité de conversion et sur les moyens pour effectuer l'opération discursive de désignation d'objets dans chacun des deux registres, que se fait la réelle compréhension de la mise en équations. Naturellement, on peut vouloir ignorer l'importance de cette tâche, mais alors autant donner directement le système d'équations à résoudre et ne pas donner un (pré)texte comme énoncé de problème.

Bibliographie

CORDIER N. (1993) Les problèmes de mise équation en troisième et en seconde, *Annales de didactique et de sciences cognitives*, IREM de Strasbourg, n°5

DUVAL R. (1995) *Sémiosis et pensée humaine*, Peter Lang.

GROUPE MATH-FRANCAIS de l'IREM de STRASBOURG (1996) *Problèmes de mise équations : ces charades dont la solution est un système d'équations à deux inconnues*, IREM de Strasbourg

KOURKOULOS M. (1990) *Modélisation mathématique de situations aboutissant à des équations du premier degré*, Strasbourg, thèse Université Louis Pasteur