À PROPOS DE L'APPRENTISSAGE DU CONCEPT D'AIRE

Paula MOREIRA BALTAR [1]
Équipe de Didactique des Mathématiques du Laboratoire Leibniz - Grenoble 1
LEMAT - Universidade Federal de Pernambuco - Brésil.

Introduction

Les analyses présentées dans cet article sont issues d'un travail de thèse [2] autour de l'enseignement et l'apprentissage du concept d'aire de surfaces planes. Nous nous intéressons, dans ce travail, à la construction du concept d'aire au niveau de collège et plus particulièrement, à l'acquisition, par les élèves de début de collège, des relations entre les longueurs et les aires.

Le but de cet article est de tracer un état des lieux des problèmes d'apprentissage du concept d'aire à l'heure actuelle en France à partir de l'étude des programmes, des évaluations nationales et des recherches antérieures sur le thème.

Dans le premier paragraphe, nous présentons la place du concept d'aire dans les programmes de l'école élémentaire et du collège (antérieurs aux changements de 1995).

Le deuxième paragraphe est consacré à la mise en évidence des difficultés d'apprentissage rencontrées par les élèves à partir de l'étude des résultats des évaluations

---

1 . Boursière de la CAPES - Ministère de l'Éducation Nationale Brésilienne.
2 Thèse préparée sous la direction de Madame Claude Comiti, au sein de l'Équipe de Didactique des Mathématiques du Laboratoire Leibniz de Grenoble.

nationales du Ministère de l'Éducation Nationale à l'entrée en sixième et de l'APMEP[3] en sixième et cinquième.

Dans le troisième paragraphe, nous faisons une synthèse des résultats des recherches antérieures qui permettent d'apporter des éléments d'interprétation et d'analyse des erreurs des élèves et contribuent, par conséquent à une meilleure compréhension du processus de construction de connaissances autour du concept d'aire au collège.

1. Les programmes

Nous nous intéressons ici à la place occupée par le concept d'aire dans les programmes de l'école élémentaire et du début de collège (sixième et cinquième). Notre étude est restreinte aux programmes en vigueur en France au moment des expérimentations de notre recherche et au moment de la réalisation des évaluations analysées dans le paragraphe suivant de cet article.

1.1. Les programmes de l'école élémentaire

Notre étude est centrée sur les programmes de 1985, mais nous présentons également quelques remarques sur les nouveaux programmes de l'école élémentaire - ceux de 1995 - en mettant particulièrement l'accent sur l'évolution qui concerne le concept d'aire.

Dans les programmes de l'école élémentaire de 1985, les notions d'aire et de périmètre étaient introduites au cours moyen dans un chapitre nommé "mesures".

Les programmes et instructions officielles prévoyaient pour ce niveau :

"*Formation des concepts de longueur, d'aire, de volume, de masse, d'angle et de durée; l'utilisation des systèmes de mesure: expression par un nombre ou par un encadrement du résultat d'un mesurage.*

Utilisation des unités du système légal et usuel.

[...]

Détermination du périmètre d'un cercle, de l'aire d'un disque, de l'aire d'un rectangle, de l'aire d'un triangle, et du volume d'un pavé.

Utilisation d'un formulaire pour calculer l'aire ou le volume d'un objet donné"[4]

Les compétences à acquérir au niveau du cours moyen étaient ainsi précisées :

- maîtriser les notions d'aire et de volume;
- connaître les unités couramment utilisées (cm^2, m^2, l, dm^3, m^3) ;
- calculer le périmètre et l'aire d'un carré, d'un rectangle, d'un disque
- savoir utiliser un formulaire.

En ce qui concerne les programmes de 1995, l'introduction de la notion d'aire est

3. APMEP = Association des Professeurs de Mathématique de l'Enseignement Public.

4. Les cycles à l'école primaire : Programmes et instructions pour l'école élémentaire - Chapitre Mathématiques

prévue dans le cycle des approfondissements.

Dans les instructions officielles de 1995 on ne parle plus de formation des concepts de longueur, d'aire, ... (on peut d'ailleurs se poser la question de ce que les auteurs des programmes de 85 mettaient derrière l'expression "formation des concepts").

La distinction entre l'aire et le périmètre apparaît de façon explicite en tant qu'objet visé par l'apprentissage. On remarque également l'insertion des questions sur l'ordre de grandeur et la suppression de l'aire du disque et de l'aire d'un triangle. En ce qui concerne les compétences à acquérir, les changements sont moins importants : il ne s'agit que de la suppression du calcul de l'aire du disque et de l'aire d'un triangle.

1.2. Les programmes de collège

Les programmes et instructions du collège sur lesquels se basent nos analyses datent de 1985. Les notions d'aire et de périmètre sont traitées, directement ou indirectement, dans les trois parties intitulées : "travaux géométriques", "travaux numériques" et "organisation et gestion de données ; fonctions".

En classe de sixième, les objets d'apprentissage sont :
- la comparaison d'aires planes et la mise en évidence de la conservation des aires dans la symétrie orthogonale (dans la partie "travaux géométriques") ;
- le calcul du périmètre et de l'aire d'un rectangle (dans la partie "organisation et gestion de données ; fonctions").

Dans les commentaires, les auteurs des programmes précisent que les travaux géométriques doivent constituer le support d'activités numériques conjointes, et en particulier le travail sur des grandeurs et des mesures. En ce qui concerne la comparaison d'aires planes, "*il s'agit de déterminer des aires à l'aide, soit de reports, de décompositions, de découpages et de recollements, soit de quadrillages et d'encadrements. Des travaux permettront de retenir sous forme d'images mentales, le passage du rectangle au triangle rectangle ou au parallélogramme, et de mettre en place des calculs sur l'aire à partir de l'aire du rectangle.*" [5]

L'un des objectifs d'apprentissage à ce niveau est la mise en évidence des conservations des longueurs et des aires par la symétrie orthogonale. Pourtant les auteurs précisent qu'il faut prendre garde de "ne pas demander aux élèves de prouver des propriétés perçues comme évidentes" [6]. Comme, par exemple, la conservation des aires par la symétrie orthogonale qui n'apparaît pas dans les textes officiels parmi les compétences exigibles.

Dans la partie destinée à l'étude des "travaux numériques", les notions d'aire et de périmètre apparaissent comme outil pour l'introduction des écritures littérales. Il s'agit de

5 . Extraits de la brochure "Mathématiques classes des collèges 6e, 5e, 4e, 3e" éditée par le Centre National de Documentation Pédagogique (Edition 1990 ; réimpression 1991) relative aux programmes de collège- page 25.
6. ibidem, page 26.

schématiser des calculs, en utilisant des lettres qui seront remplacées par des valeurs numériques.

Les compétences exigibles des élèves en ce qui concerne les concepts d'aire et de périmètre, en classe de sixième sont les suivantes :
- évaluer l'aire d'un triangle rectangle à partir de celle d'un rectangle ;
- appliquer les formules littérales au cercle et au rectangle ;
- effectuer, éventuellement avec une calculatrice, des calculs sur les mesures des grandeurs figurant au programme ;
- effectuer, pour les longueurs et les aires, des changements d'unités de mesure.

En ce qui concerne la classe de cinquième, les objectifs prévus sont la mise en évidence de la conservation des aires dans la symétrie centrale (dans la partie consacrée aux "travaux géométriques") et le calcul de l'aire d'un parallélogramme, d'un triangle et d'un disque (dans la partie "organisation et gestion de données ; fonctions").

Dans la partie "compléments" du programme officiel destinée aux "travaux géométriques" et en particulier à l'étude de la symétrie centrale nous trouvons la conservation des distances, de l'alignement et des angles, mais la conservation des aires n'apparaît pas parmi les propriétés élémentaires de la symétrie que les élèves doivent connaître. Par contre, une remarque précise que les propriétés de la symétrie centrale sont à relier à la caractérisation du parallélogramme et permettent aussi d'établir la liaison entre l'aire d'un triangle et celle d'un parallélogramme.

La partie "organisation et gestion de données ; fonctions" prévoit des activités sur les variations de l'aire d'un triangle ou d'un parallélogramme quand la mesure d'un côté est fixée. Cette étude peut se faire en liaison avec celle de la proportionnalité. "*Les élèves seront familiarisés avec l'écriture littérale des formules d'aires et de volume du programme*" [7]. Il s'agit en particulier, des formules d'aire du parallélogramme, du triangle et du disque.

Les compétences exigibles en classe de cinquième sont :
- évaluer, à partir de l'aire d'un rectangle, l'aire d'un parallélogramme et l'aire d'un triangle.
- utiliser les formules d'aires et de volumes du programme.

L'étude des changements d'unités de longueur, d'aire et de volume est prévue dans la partie sur les fonctions numériques.

Dans les nouveaux programmes de la sixième en vigueur depuis 1995, nous pouvons remarquer une évolution en ce qui concerne :
- l'explicitation dans le contenu de la partie destinée aux travaux géométriques, d'un item sur la mesure, la comparaison et le calcul d'aire et de périmètre de surfaces planes ;
- l'introduction, en tant que compétence exigible, de la mesure de l'aire d'une surface par pavage simple et de la comparaison des aires et des périmètres de surfaces planes ;

7. ibidem, page 43.

Dans les commentaires, les auteurs des programmes explicitent l'importance des procédures de décomposition, découpage et recollements, pavages et encadrements dans la prise de sens de la notion d'aire en général et des formules en particulier : "*On pourra s'appuyer sur ces travaux qui donnent du sens à la notion d'aire pour constituer et utiliser un formulaire. Cette utilisation peut être liée aux unités usuelles et aux changements d'unités.*" [8]

Si dans les programmes antérieurs on observe un accent sur la mesure et en particulier le calcul de l'aire, dans les nouveaux programmes les situations de comparaison prennent de l'importance, en tant que contenus visées par l'apprentissage et en tant que compétences exigibles. Les objectifs autour de la mesure de l'aire sont maintenus, et en même temps, les procédures (aussi bien de mesure que de comparaison) qui permettent de donner du sens au concept sont mises en valeur.

Les évaluations nationales que nous avons analysé concernent un enseignement antérieur à cette réforme curriculaire. Il serait intéressant, dans une étude postérieure, d'étudier l'effet de ces changements de programme sur l'apprentissage de la notion d'aire en début de collège.

2. Les évaluations du ministère de l'éducation nationale et de l'APMEP : quelques pistes sur les difficultés d'apprentissage

Les résultats des évaluations menées par le Ministère de l'Éducation Nationale et par l'APMEP montrent que l'apprentissage du concept d'aire est à l'origine de nombreuses difficultés pour les élèves. Les questions des évaluations concernant ce thème sont en général réussies par moins de 50 % des élèves.

2.1. L'évaluation du Ministère de l'Éducation Nationale : entrée en sixième

L'évaluation du Ministère de l'Éducation Nationale est réalisée depuis 1989 sur tous les élèves de CE2 et de sixième. Son objectif, selon les réalisateurs, est d'aider les enseignants "*à mieux identifier les acquis et les lacunes de leurs élèves dans les apprentissages de base : lecture, écriture, mathématiques*" [9]. Les résultats nationaux présentés sont fondés sur des échantillons représentatifs des élèves évalués, tirés de façon aléatoire dans les établissements d'enseignement public et privé de tous les départements, y compris ceux d'outre-mer.

En ce qui concerne plus particulièrement notre travail, nous n'avons étudié que les résultats relatifs à l'entrée en sixième, car comme nous l'avons mis en évidence dans le paragraphe antérieur la notion d'aire n'est introduite qu'au cours moyen.

---

8. Programmes de sixième 1995 mathématiques, page 20.
9. Éducation et Formation Publication hors série du ministère de l'éducation nationale de la jeunesse et des sports "Évaluation CE2 - sixième Résultats nationaux septembre 1990.

Les résultats de ces évaluations donnent des indices de la maîtrise de certaines connaissances du domaine des grandeurs, et des difficultés d'apprentissage liées à l'absence d'autres connaissances.

Les résultats de l'évaluation du Ministère de l'Éducation Nationale montrent que les objectifs d'apprentissage définis pour l'école élémentaire en ce qui concerne le concept d'aire sont loin d'être atteints.

En ce qui concerne la formation des concepts de longueur et d'aire, si plus de la moitié des élèves réussissent aux questions de comparaison et mesure sur papier quadrillé et à la dissociation de la surface et son contour, les taux de réussite pour l'addition et soustraction des aires sont seulement voisins de 50%. De plus, aucune question n'est posée sur l'invariance de l'aire par découpage recollement, ce qui est pourtant, à notre avis, un point fondamental dans la formation du concept d'aire.

L'utilisation des unités d'aire n'est pas testée directement, mais on peut remarquer des taux importants d'absence d'unité dans les réponses des élèves ; ce que nous interprétons comme le témoignage d'un certain malaise face à l'usage des unités d'aire.

En ce qui concerne la détermination de l'aire et du périmètre d'un rectangle, les taux de réussite sont assez faibles (à peu près 40% pour l'aire et 50% pour le périmètre).

L'utilisation d'un formulaire pour calculer l'aire d'un objet donné paraît très mal maîtrisée également. Le formulaire étant donné (avec des figures et les formules d'aire correspondantes) les tâches à la charge de l'élève sont :
- choisir la formule pertinente dans le formulaire ;
- remplacer les lettres par les bonnes valeurs numériques;
- calculer l'aire.

Seulement 27,4% des élèves calculent correctement l'aire du triangle et 28,3% donnent une réponse exacte pour le calcul de l'aire d'un parallélogramme. La difficulté majeure ne repose ni sur la reconnaissance de la forme de la figure ni sur le choix de la formule d'aire à utiliser (tâche réussie entre 45% et 60% à peu près). C'est sur le remplacement des lettres par les nombres et le calcul à proprement parler, que l'on trouve une chute importante des taux de réussite.

Les questions autour de la dissociation entre l'aire et le périmètre ne font pas partie des objectifs d'apprentissage et des compétences exigibles au niveau de l'école élémentaire dans les programmes de 85. Ce sont pourtant des situations souvent présentes dans les évaluations et dont les taux d'échec sont en général importants. Cet aspect est pris en compte de façon explicite dans les nouveaux programmes de l'école élémentaire qui sont entrés en vigueur en 1995.

2.2. Les évaluations de l'APMEP en sixième et en cinquième

La motivation principale des évaluations menées par l'APMEP depuis 1987 a été d'accompagner la mise en place des nouveaux programmes de collège et lycée, en particulier du point de vue de l'évolution des compétences des élèves. Les questionnaires ont été conçus de façon à vérifier l'acquisition des compétences exigibles et des capacités complémentaires définies dans les programmes officiels. L'évaluation des compétences exigibles et de celles dites d'approfondissement ou complémentaires sont faites séparément, par l'intermédiaire de deux types d'épreuves. Nous analysons ici les résultats des évaluations au niveau de sixième (1987 et 1989) et de cinquième (1988 et 1990).

Les exercices des questionnaires d'approfondissement sont destinés à tester la capacité de l'élève à mobiliser certaines connaissances et à les articuler dans la résolution de problèmes complexes.

Dans l'interprétation des taux de réussite à ces questions il faut prendre en compte le fait que les exercices proposés sont en général d'un niveau de complexité important du point de vue des tâches à la charge de l'élève "*Il faut lire l'énoncé, se l'approprier, l'analyser, résoudre des questions intermédiaires, puis il faut synthétiser les informations et présenter les résultats.*"[10]. Les erreurs sont donc dues en partie à la difficulté de traiter des situations complexes. Les échecs sont cependant également des indices de difficultés à mobiliser des connaissances, tout au moins dans des situations complexes.

On ne peut pas ici déduire directement des taux faibles de réussite que les élèves ne disposent pas des connaissances en jeu dans les exercices. Certaines erreurs peuvent relever de la complexité de la situation elle-même, ou des aspects secondaires de la situation, plutôt que des connaissances dont on veut tester la disponibilité. De plus, les brochures de l'APMEP, ne fournissent pas les réponses et justifications des élèves, mais seulement les taux de réussite et les interprétations des auteurs de la brochure, ce qui réduit nos conditions d'analyse des sources d'erreurs possibles.

Dans les évaluations APMEP les compétences exigibles à propos du concept d'aire sont ainsi précisées :

En classe de sixième :
- évaluer l'aire d'un triangle rectangle, à partir d'un rectangle ;
- appliquer les formules littérales au rectangle et au cercle ;
- effectuer des changements d'unité de mesure des longueurs et des aires ;
- effectuer, éventuellement avec une calculatrice, des calculs sur les mesures des grandeurs figurant au programme longueurs et aire.

En classe de cinquième :
- évaluer, à partir de l'aire d'un rectangle, l'aire d'un parallélogramme et l'aire d'un triangle ;

10. EVAPM sixième, 1989, page 52.

- utiliser les formules d'aire du programme : parallélogramme, triangle, disque et aire latérale d'un cylindre de révolution.

Dans l'esprit des programmes de 1985, comme les auteurs de la brochure eux-mêmes le mettent en évidence, les figures planes et les solides servent de support au calcul numérique et littéral - calcul sur les mesures de longueurs, d'aires et de volumes, et utilisation des formules. Ceci se traduit en particulier par le fait que les compétences exigibles à propos des grandeurs géométriques sont essentiellement de type calculatoire. Les exercices proposés dans l'évaluation sont en général cohérents avec cet esprit. Il s'agit surtout du calcul sur les mesures de longueurs, aires et volumes, et de l'utilisation de formules en tant que moyen de calcul.

Les résultats des premières évaluations APMEP en sixième (1987) et en cinquième (1988) montrent que deux des trois points faibles des programmes actuels signalés par les enseignants, concernent la construction du concept d'aire : les compétences concernant le calcul sur les grandeurs (aires, volumes, ...) et l'utilisation des unités (le troisième point faible concerne la géométrie dans l'espace). La réussite aux questions sur l'aire dépassent rarement les 50%.

2.2.1. Résultats des évaluations APMEP en fin de sixième

a - Résultats concernant les compétences exigibles

Dans l'évaluation en fin de sixième réalisée en 87, les auteurs mettent en évidence certaines erreurs fréquemment commises par les élèves dans les exercices sur les aires :
- confusions entre aire et périmètre ;
- du point de vue du calcul, erreurs du type :

aire = périmètre x 2 ;
aire = L + l
aire = L - l
aire = (L+l) x3,14
aire = (Lxl) - périmètre.

- en ce qui concerne les unités : expression de l'aire d'une surface dont les dimensions linéaires sont données en mètres, en m, m^3, cm, cm^2, ...

Certaines de ces erreurs concernent la dissociation de l'aire et du périmètre. Les items consacrés à ce sujet concernent l'association de l'aire à la surface et du périmètre au contour ; le calcul de l'aire et du périmètre de surfaces usuelles (distinction des formules d'aire et de périmètre) et le choix des unités pertinentes pour exprimer l'aire et le périmètre. Les résultats obtenus sont les suivants :
- seulement 42% des élèves associent l'aire à la surface, calculent correctement l'aire d'un rectangle et expriment le résultat avec l'unité pertinente ;
- 46% des élèves associent le périmètre au contour, calculent correctement le périmètre d'un rectangle et expriment le résultat avec l'unité pertinente.

Les auteurs de la brochure mettent en évidence que la notion d'aire discrimine les futurs redoublants (pour lesquels les taux de réussite chutent de moitié) contrairement aux questions sur le périmètre dont les taux de réussite pour l'ensemble des élèves et pour les futures redoublants sont assez proches.

Il n'y a aucun exercice dans les évaluations de l'APMEP en sixième sur l'étude des variations de l'aire et du périmètre (ce qui s'explique par l'absence de cet aspect du concept d'aire dans les instructions officielles en tant que compétence exigible ou objectif d'apprentissage explicite).

Les seules compétences exigibles qui présentent des taux de réussite supérieurs à 50% sont le calcul de l'aire et du périmètre d'un rectangle (respectivement 54% et 58%).

Les objectifs d'apprentissage à propos de l'aire définis pour la classe de sixième dans les programmes actuels ne sont pas atteints :

- moins de 50% des élèves ont évalué l'aire d'un triangle rectangle à partir de celle d'un rectangle (les taux de réussite varient entre 40% et 46% pour les longueurs entières ou décimales, avec ou sans usage de la calculatrice) ;
- les taux de réussite pour les changements d'unité d'aire sont compris entre 40% et 50% (tandis que pour les longueurs ces taux varient entre 50% et 70%).
- à peu près deux tiers des élèves font des erreurs dans le choix de l'unité correcte associée à un résultat numérique (par exemple, mesurer l'aire en cm).

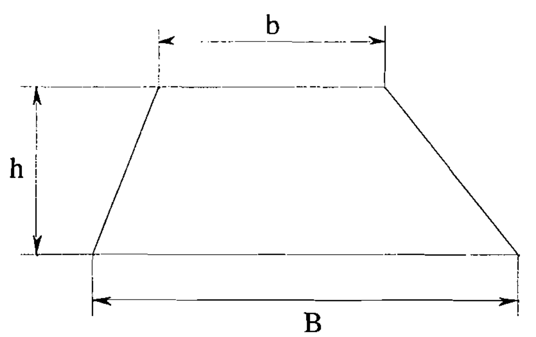
b - Interprétations des difficultés de certains items des questionnaires d'approfondissement

Pour l'ensemble des items sur l'aire des questionnaires d'approfondissement, le score maximum est de 31% de bonnes réponses.

Le calcul de l'aire d'un carré est une compétence exigible au CM2. Dans les situations proposées dans les questionnaires d'approfondissement, plusieurs situations mettent en jeu le calcul de l'aire d'un carré (implicitement, car il n'est jamais demandé directement à l'élève de calculer l'aire du carré) et les taux de réussite sont très faibles (entre 14% et 31%).

Analysons de manière comparative des résultats de l'évaluation à propos de deux questions sur l'aire du trapèze.

La première question qui nous intéresse ici est la suivante :



L'aire d'un trapèze est donnée par la formule :

$$A = \frac{(B+b)}{2} \times h$$

Utilise cette formule pour calculer l'aire d'un trapèze qui vérifie
B = 2,5 cm
b = 1,5 cm
h = 5 cm

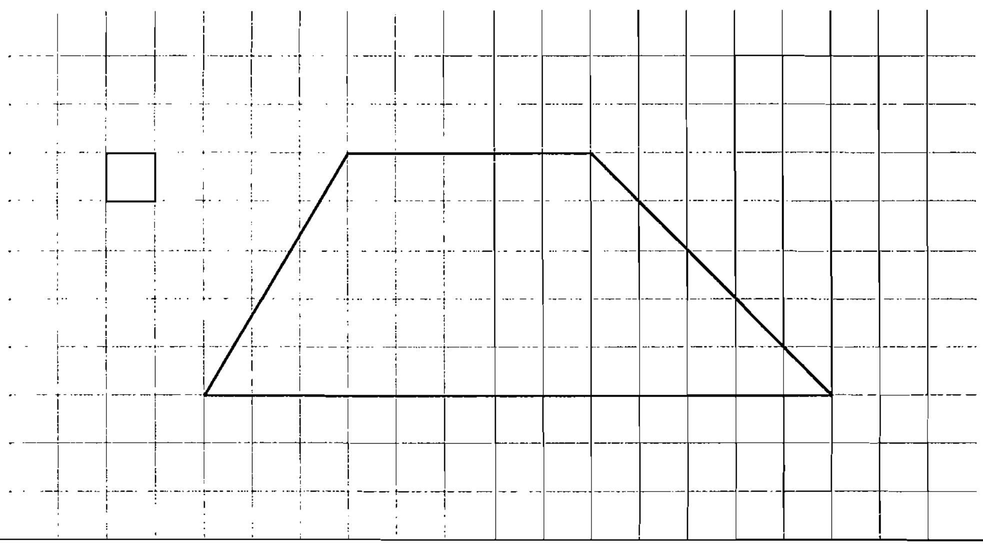
Écris le détail de tes calculs.

Il s'agit du calcul de l'aire d'un trapèze étant données la figure, la formule et les longueurs nécessaires au calcul. Les longueurs sont décimales et l'usage de la calculatrice est interdit. Cet exercice fait partir d'un questionnaire portant sur des compétences exigibles, mais le codage adopté par les auteurs de l'évaluation montre que le caractère de compétence d'approfondissement lui est accordé.

Les tâches à la charge de l'élève ici sont le remplacement des lettres par des valeurs numériques pertinentes, la manipulation de l'expression numérique ainsi obtenue, et le calcul. Les données numériques sont données dans l'énoncé : ce qui exclut les difficultés liées à la lecture de la figure. En fait, la figure n'est pas nécessaire dans la résolution du problème. La réussite à cette question est de 50% pour la réponse exacte et de 57% pour la démarche correcte.

Analysons maintenant un autre exercice portant sur l'aire du trapèze, proposé dans des questionnaires d'approfondissement des évaluations APMEP de 87 et 89.

Calculer l'aire du trapèze en prenant comme unité l'aire du petit carré :



Il ne s'agit pas ici de l'utilisation de formules littérales, car la formule de l'aire du trapèze n'est pas donnée et elle ne fait pas partie des objectifs d'apprentissage en sixième. Les élèves sont donc censés mettre en oeuvre des connaissances d'une autre nature telles que le dénombrement des unités, le "découpage-recollement", la décomposition de la figure (en par exemple un rectangle et deux triangles rectangles), l'additivité et la soustraction des aires ; éventuellement les formule de l'aire d'un rectangle et d'un triangle. Les évaluations à l'entrée en sixième montrent que l'addition des aires et la mesure de l'aire de surfaces dessinées sur quadrillage (surfaces pavables avec les carreaux du quadrillage) sont des connaissances mobilisables dans certains cas pour plus de la moitié des élèves.

A peu près 80% des élèves sont en échec dans cette situation : les taux de réussite pour cet exercice dans les évaluations de 1987 et de 1989 sont respectivement de 21% et de 14%.

Les tâches à la charge de l'élève ne sont pas ici d'un niveau de complexité très élevé. Les faibles taux de réussite ne sont donc pas essentiellement dus à la complexité de la tâche. Comme les côtés du trapèze ne suivent pas les lignes du quadrillage, nous ne pouvons pas non plus affirmer que le comptage des carreaux n'est pas disponible. Cependant, l'échec de 80% des élèves à cette question nous semble être un indice de la non disponibilité dans le type de situation proposée des connaissances que nous avons énoncées ci-dessus.

On peut attribuer aussi une part de l'échec à une certaine rupture par rapport au contrat didactique habituel. Normalement, quand on demande à un élève de sixième de calculer l'aire d'une figure, il s'agit d'utiliser une formule d'aire. Or, il ne s'agit pas ici d'appliquer une formule. Les taux de réussite pourraient être différents si à la place de calculer on avait demandé de trouver l'aire du trapèze.

Notons que :
- 57% des élèves réussissent dans l'application de la formule de l'aire du trapèze, ce qui représente une augmentation importante des taux de réussite par rapport à ceux du début de la sixième (autour de 28%) ;
- seulement 20% des élèves calculent correctement l'aire d'un trapèze dessiné sur quadrillage .

La différence de pourcentages de réussite entre les deux questions (57% et 20%) et le faible taux de réussite pour la deuxième question conduisent à une réflexion plus profonde sur la construction du concept d'aire chez les élèves de collège : les procédures telles que le "découpage-recollement", l'addition des aires, la décomposition de la figure ne semblent pas avoir été mobilisées.

2.2.2. Des résultats en fin de cinquième

a - Résultats concernant les compétences exigibles

L'utilisation des unités de mesure est un objectif d'apprentissage de la classe de CM2. Cependant, dans les exercices sur les aires, quand il est demandé d'indiquer l'unité seulement la moitié des élèves de cinquième le font correctement. Lorsque les unités ne sont pas explicitement demandées, un élève sur deux mentionne les unités de longueur et un élève sur trois seulement mentionne les unités d'aire.

Les compétences exigibles sur l'aire en cinquième sont de deux types : évaluer l'aire d'un triangle et d'un parallélogramme à partir de l'aire d'un rectangle et utiliser les formules d'aire du programme.

Dans le premier cas, la seule compétence acquise par plus de la moitié des élèves est le calcul de l'aire d'un triangle rectangle à partir de l'aire d'un rectangle[11] (72% de réussite dans une situation en absence de figure d'accompagnement).

Pour les autres questions, les taux de réussite sont les suivants :
- seulement 34% évaluent l'aire d'un triangle quelconque à partir de celle d'un rectangle et 33% évaluent l'aire d'un parallélogramme à partir de celle d'un rectangle ;
- la relation "l'aire du triangle est la moitié de celle d'un rectangle de même base et même hauteur" est disponible seulement pour un élève sur quatre (il en est de même pour la décomposition du triangle en deux triangles rectangles suivie de l'addition des aires des triangles rectangles).

L'utilisation des formules d'aire est comprise par les auteurs de l'évaluation comme "calculer à l'aide de formules non données aux élèves". Ainsi, dans les exercices qui concernent cette compétence, les formules ne sont pas fournies. En 1988 les taux de réussite varient entre 15% et 45% ; on observe une augmentation des taux de réussite en 1990, mais ces taux ne dépassent jamais les 60% de réussite :
- pour le calcul de l'aire d'un triangle, les taux de réussite sont compris entre 42% et 58% ;
- pour le calcul de l'aire du parallélogramme, les taux de réussite sont compris entre 22% et 50% ;

Dans les questions de calcul de l'aire par usage de formules, les mesures des longueurs des côtés sont entières ou décimales ; l'usage de la calculatrice est permis dans certaines épreuves et interdit dans d'autres et il y a parfois présence du dessin, parfois absence. Certains des taux d'échec sont dus en partie à la difficulté des élèves dans le calcul avec les nombres décimaux. La présence de la figure cotée facilite la tâche des élèves, mais une hauteur tracée à l'extérieur du triangle paraît être source d'erreur également.

L'étude des corrélations entre questions a montré que la réussite conjointe à des questions sur l'aire du triangle varie entre 37% et 42%, ce qui est interprété par les auteurs de l'évaluation comme un indice de la maîtrise du calcul de l'aire d'un triangle pour environ 40% des élèves (avec ou sans calculatrice).

b - Arrêtons-nous sur l'aire du parallélogramme

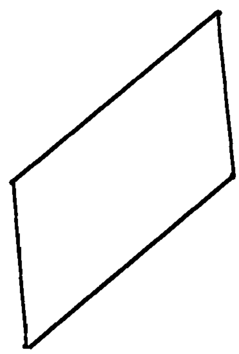
Le fait que les items proposés soient souvent en rupture avec le contrat didactique habituel est, à notre avis, l'une des raisons des erreurs commises. Habituellement, dans

11. Il faut remarquer pourtant qu'il s'agit ici d'une compétence de fin de sixième.

les exercices d'utilisation d'une formule, les seules mesures indiquées sur la figure sont celles nécessaires au calcul. Or, dans les items des évaluations sur l'aire du parallélogramme, on donne une figure cotée sur laquelle sont indiquées les longueurs d'une base, celle de la hauteur relative à cette base et celle de l'autre côté. On dispose donc d'informations qui ne sont pas toutes nécessaires à la résolution du problème.

Une deuxième source d'erreur liée au contrat concerne la lecture de la figure : dans les situations habituellement rencontrées par les élèves, la base d'un parallélogramme est le côté plus grand placé horizontalement et la hauteur du parallélogramme est verticale.

Or, dans les questions de l'évaluation, le parallélogramme est penché : il n'y a pas de côté horizontal et il n'y a aucun indice qui signale où se trouvent la base et la hauteur. Le choix d'un côté comme base, et l'indication sur le dessin de la hauteur relative à cette base, sont des tâches à la charge de l'élève.



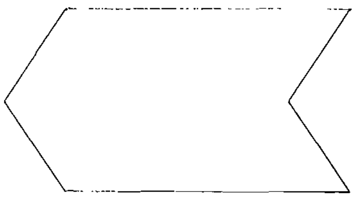
Aux difficultés dues à la position de la figure, s'ajoute de plus celle (signalée ci-dessus) du calcul avec des décimaux.

Ces sources d'erreurs, pour pertinentes qu'elles soient, sont-elles suffisantes pour expliquer des taux d'échec si importants ? Les échecs des élèves ne décèlent-ils pas en fait des difficultés d'ordre conceptuel liées au concept d'aire et au sens donné aux formules par les élèves ?

c) Interprétation des difficultés de certains items des questionnaires d'approfondissement

Nous avons souligné ci-dessus que les taux importants d'échec dans les questions sur l'aire sont des indices de la non maîtrise de connaissances de base, dans la construction du concept. C'est ce que nous voulons illustrer avec les deux questions suivantes, qui concernent respectivement l'invariance de l'aire par découpage recollement et l'addition et la soustraction des aires.

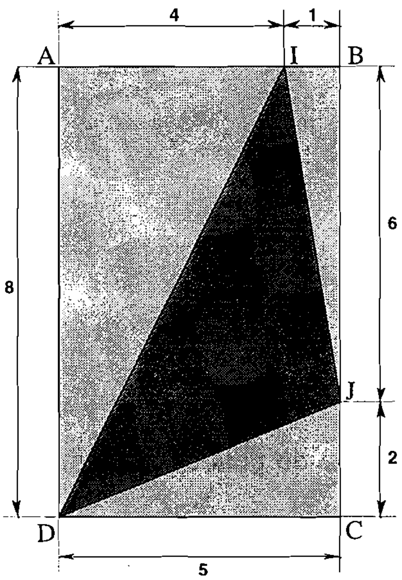
Observe la figure ci-contre :
a) Mesure ce dont tu as besoin pour calculer l'AIRE de cette figure.
Reporte ces mesures sur la figure.
b) CALCULE l'AIRE de cette figure.



Quels calculs fais-tu ?
Réponse : Aire de la figure : ....

Les taux de réussite pour cette question sont les suivants :

- dans l'évaluation de 1988, 41% des élèves mettent en oeuvre le découpage recollement convenable et 44% des élèves aboutissent à une réponse juste ;
- dans l'évaluation de 1990, 69% des élèves donnent la valeur numérique correcte, 39% mettent en oeuvre le découpage recollement; 37% donnent la réponse exacte avec l'unité correcte.



ABCD est un rectangle
Les mesures des longueurs sont faites en cm.
En n'utilisant que les mesures portées sur la figure :

1°) CALCULE l'aire du triangle DAI.

2°) CALCULE l'aire du triangle DIJ.

3°) Toujours sans mesurer, COMPARE la hauteur issue de A dans le triangle DAI et la hauteur issue de J dans le triangle DJI.

Les taux de réussite pour cet exercice sont les suivants :

- le calcul de l'aire du triangle rectangle DAI - compétence exigible en fin de sixième - n'est réussi que par 53% des élèves ;
- le calcul de l'aire d'un triangle scalène DIJ est réussi par seulement 17% des élèves ;
- seulement 3% des élèves réussissent la comparaison des hauteurs des triangles DAI (issue de A) et DJI (issue de J) dont DI est une base commune.

Seulement 40% des élèves ont mobilisé le découpage recollement et moins de 20% des élèves ont mis en oeuvre une procédure de soustraction des aires. Ces procédures sont cependant à la base des justifications de la pertinence des formules d'aire du triangle et du parallélogramme.

De plus, le taux très faible de réussite (3%) à la comparaison des hauteurs de triangles de même base à partir de la comparaison de leurs aires, est un indice du degré de complexité des questions mettant en jeu la relation de dépendance de l'aire d'un triangle, par rapport aux longueurs d'une base et de la hauteur correspondante.

2.3. Synthèse des résultats des évaluations du Ministère de l'Éducation Nationale et de l'APMEP et mise en évidence des points significatifs par rapport à notre problématique

Au delà de l'importance des taux d'échec dans les questions concernant le concept d'aire (aussi bien à l'entrée en sixième que en début de collège) et du constat que les objectifs d'apprentissage des programmes actuels ne sont pas atteints, nous retiendrons plus particulièrement des évaluations du Ministère de l'Éducation Nationale et de l'APMEP :

- la disponibilité de la procédure de pavage et l'acquisition de la dissociation entre la surface et son contour, pour un nombre non négligeable d'élèves, depuis le CM2 ;
- la non disponibilité, dans des situations complexes, chez un nombre significatif d'élèves de CM2 et (dans une moindre mesure) chez les élèves de cinquième, des procédures de découpage recollement, des décompositions d'une figure et de l'addition et soustraction des aires ;
- la mise en oeuvre, chez les élèves CM2, sixième et cinquième, de procédures où interviennent des confusions entre aire et périmètre (du point de vue des variations) ;
- les faibles taux de réussite en sixième lors du calcul à l'aide de formules de l'aire et du périmètre d'un rectangle quand on exige simultanément d'établir les correspondances entre aire et surface, périmètre et contour, de calculer l'aire et le périmètre en exprimant les résultats avec les unités de mesure pertinentes ;
- la non disponibilité du CM2 à la cinquième, de l'utilisation pertinente des unités de longueur et d'aire et des conversions d'unités de mesure ;
- la non acquisition par environ 2/3 des élèves de cinquième de la compétence "évaluer l'aire d'un triangle à partir de celle d'un rectangle" et le faible taux de réussite en ce qui concerne les questions autour de l'aire du triangle et du parallélogramme.

Nous faisons l'hypothèse que, dans les questions sur le calcul de l'aire par l'utilisation de formules, quelques sources possibles d'erreurs reposent sur :

- l'absence de connaissances géométriques[12] permettant de justifier la pertinence des formules ;
- la lecture de la figure (hauteur extérieure au triangle, position de la figure sur la feuille de papier provoquent la difficulté à identifier la base et la hauteur du parallélogramme et du triangle, ...) ;
- la manipulation d'écritures littérales ;
- le calcul avec des nombres décimaux ;
- l'utilisation des unités de mesure.

L'invariance de l'aire par "découpage-recollement" n'est traitée directement que dans les évaluations de cinquième. Il s'agit, cependant d'un aspect central de la formation du

12. L'invariance de l'aire par "découpage-recollement", par exemple.

concept d'aire, et d'un support important pour donner du sens aux formules d'aire en particulier.

La dissociation de l'aire et du périmètre n'est pas un objet d'apprentissage explicite dans les programmes 1985 de l'école élémentaire, ni dans les programmes de collège à l'heure actuelle.

Si l'association de l'aire à la surface et du périmètre au contour semble acquise depuis le CM2, les confusions entre aire et périmètre sont fréquentes à tous les niveaux, en ce qui concerne leurs formules et leurs variations respectives. Ainsi certains élèves fabriquent des formules pour calculer l'aire de figures usuelles en faisant intervenir le périmètre ou mettent en oeuvre des procédures que nous attachons à des raisonnements tels que "deux surfaces de même aire ont même périmètre" ou "l'aire et le périmètre varient dans le même sens".

3. Les résultats de recherches antérieures : des supports pour comprendre les sources des erreurs des élèves

Nous chercherons ici à mettre en évidence les résultats des recherches antérieures (aussi bien en France que dans d'autres pays) qui nous apportent des éléments pour comprendre les sources des erreurs commises par les élèves.

3.1. Deux pôles de conceptions : les conceptions géométriques et les conceptions numériques

Un certain nombre de difficultés rencontrées par les élèves sont liées au traitement des problèmes d'aire en ne prenant en compte que l'un des deux points de vue suivants : celui des surfaces ou celui des nombres. À ce propos, Douady et Perrin-Glorian montrent que "*...au sujet de l'aire, les élèves développeraient une "conception forme" liée au cadre géométrique ou une conception nombre liée au cadre numérique, ou les deux mais de façon indépendante, et ils traiteraient les problèmes sans établir de relation entre les deux points de vue. Or les problèmes d'aire mettent de façon essentielle en relation les cadres numérique et géométrique*" (Douady et Perrin-Glorian, 1989, p. 395).

Ceci les conduit à proposer deux pôles de conceptions : les conceptions géométriques et les conceptions numériques. On trouve chez Balacheff ce même classement des conceptions dans le traitement de questions sur l'aire et le périmètre de rectangles.

3.1.1. Les conceptions géométriques

Pour Balacheff (1988), les conceptions géométriques sont celles selon lesquelles les élèves confondent aire et surface, périmètre et contour. Dans ces types de conception domine une notion forme : toute modification de l'aire correspond à une modification du périmètre et réciproquement. Il remarque que l'origine de ces conceptions peut être dans le fait que les significations de ces mots sont attachées dans la langue naturelle.

On retrouve aussi cette idée de conception attachée à la forme chez Douady et Perrin-Glorian (1989) : "*Au démarrage, au CM2, certains enfants ont de la place occupée par une surface une conception liée à sa forme et se référant plutôt à l'encombrement ou à la situation de la surface dans la feuille de papier ou même à la manière dont elle a été obtenue : pour comparer la place occupée par des surfaces obtenues par découpage recollement sans perte ni chevauchement de rectangles superposables, des élèves ne peuvent accepter qu'une surface encombrante [...] puisse ne pas occuper plus de place qu'une autre plus "compacte" [...]* " (Douady et Perrin-Glorian, 1989, p. 404)

Certaines des procédures des élèves peuvent être analysées comme conséquences de la mise en oeuvre de ce type de conception :
- une diminution de l'aire est comprise comme une diminution de la surface. La forme étant conservée, l'aire et le périmètre vont varier forcément ensemble ;
- deux surfaces de même aire auront forcément même périmètre;
- deux surfaces composées des mêmes morceaux seront comparées selon l'encombrement : celle qui est plus encombrante aura une aire plus grande.

Les conceptions liées à l'encombrement peuvent être associées à la perception, ou à une approche pratique de la "place occupée par la surface".

La mise en oeuvre de conceptions géométriques entraîne notamment des difficultés liées à la dissociation de l'aire et du périmètre. La demande de dessiner une surface d'aire plus petite et de périmètre plus grand qu'une autre surface donnée au départ paraît absurde aux élèves, car la forme étant conservée, aire et périmètre varient forcément dans le même sens, à leurs yeux.

3.1.2. Les conceptions numériques

Balacheff appelle "conceptions arithmétiques" celles qui sont caractérisées par le traitement des assertions en référence aux formules de l'aire et du périmètre du rectangle. L'aire et le périmètre désignent respectivement les nombres associés à la surface et au contour d'un rectangle, mais la connaissance des formules d'aire et de périmètre d'un rectangle n'est pas suffisante pour caractériser ce type de conception. Il faut de plus établir, à partir des formules d'aire et du périmètre, les relations fonctionnelles entre les quatre nombres qui désignent les côtés, l'aire et le périmètre.

Le point de vue de Douady et Perrin-Glorian est différent. Les conceptions numériques sont aussi caractérisées par le fait que l'aire est un nombre, mais cet aspect fonctionnel est absent :
"*on est sur le plan du calcul et on ne relève que des éléments pertinents pour le calcul, par exemple des mesures de longueur qui paraissent caractéristiques de la surface considérée et qu'on combine dans des formules plus ou moins fondées : par exemple 'ajouter des mesures de deux côtés d'un triangle et multiplier par la troisième', pour calculer l'aire d'un triangle en faisant le produit de deux longueurs.*" (Douady et Perrin-Glorian, 1989, p. 395)

Pour caractériser une conception arithmétique au sens de Balacheff, il ne suffit pas de connaître les formules d'aire et de périmètre, mais il faut maîtriser les relations fonctionnelles qui en sont implicites. Tandis que pour Douady et Perrin-Glorian il suffit que l'aire soit un nombre (les moyens, justes ou erronés, mis en oeuvre pour trouver ce nombre ne sont pas en question dans la caractérisation des conceptions numériques).

Il nous faut certes distinguer les élèves qui connaissent et utilisent les formules justes d'aire et de périmètre et ceux qui associent l'aire à un nombre par l'intermédiaire de "formules fabriquées". Mais, il ne suffit pas de maîtriser l'usage des formules pour pouvoir traiter tous les types de situations autour du concept d'aire. Les résultats des évaluations montrent d'ailleurs que l'absence de connaissances géométriques sur l'aire empêche la résolution de certains types de situation[13].

Dans notre travail, nous utiliserons la modélisation en termes de conceptions géométriques et numériques afin de mettre en évidence que la seule prise en compte de l'un des deux points de vue - surfaces ou nombres - n'est pas suffisante pour traiter tous les problèmes sur les aires et essaierons de montrer les conséquences de la négligence dans l'apprentissage, de l'un ou l'autre de ces points de vue.

3.2. L'aire en tant que grandeur

Nous adoptons dans ce travail l'approche de l'aire en tant que grandeur[14]. Ce choix est justifié par les résultats des recherches antérieures. En effet, l'analyse faite par Douady et Perrin-Glorian les amène à distinguer trois pôles :
- le pôle géométrique avec les surfaces ;
- le pôle "grandeur" avec les aires ;
- le pôle numérique avec les mesures.

Douady et Perrin-Glorian mettent en évidence que le point de vue généralement adopté dans l'enseignement consiste à choisir une unité et puis à identifier aires et mesures. Dans ce cas, il n'y a que deux pôles retenus : surfaces et nombres.

"*Dans ces conditions, l'aire est un invariant non pas de la surface mais du couple (surface, unité) : pour une surface fixée, l'aire considérée comme nombre dépend du choix de l'unité. C'est légitime si on n'a pas l'intention de changer d'unité, mais c'est un point de vue difficile à tenir si on veut s'occuper de surfaces matérielles et si on veut que l'aire soit un invariant de la surface et d'elle seule*" (Douady et Perrin-Glorian, 1989, p. 393)

Elles formulent alors les deux hypothèses suivantes :
- Le développement dans l'enseignement du concept d'aire en tant que grandeur permet aux élèves d'établir les relations nécessaires entre les deux cadres (géométrique et numérique).
- Une identification trop précoce entre grandeurs et nombres favorise l'amalgame des différentes grandeurs (ici longueurs et aires).

---

13. Les faibles résultats dans le problème de calcul de l'aire d'un trapèze dessiné sur papier quadrillé en sixième sont un exemple.
14 . Le terme grandeur est pris ici dans un sens très naïf : notion indépendante à la fois de la forme de la surface et de quelque unité de mesure que ce soit.

L'étude des conceptions d'une part, et les résultats des évaluations d'autre part, montrent que l'identification entre aire et nombre (conceptions numériques) est source d'erreurs : en l'absence de connaissances géométriques à propos des aires, les élèves peuvent, par exemple, fabriquer des formules plus ou moins fondées, pour aboutir à un nombre qui mesure la surface.

Douady et Perrin-Glorian ont construit et expérimenté une ingénierie didactique adaptée à ces hypothèses et dans laquelle on distingue trois points :
(a) construire la notion d'aire comme grandeur autonome ;
(b) étendre l'application mesure à des surfaces non pavables avec l'unité A ;
(c) pointer les différences et établir des relations entre aires et longueurs.

La construction de la notion d'aire en tant que grandeur autonome consiste à :
- dissocier l'aire de la forme (des surfaces de formes différentes peuvent avoir même aire) et à
- distinguer l'aire du nombre (à une même surface peuvent correspondre des nombres différents si l'unité d'aire change).

On utilise pour cela les procédures de comparaison par inclusion, superposition et "découpage-recollement" ; et le pavage de surfaces avec des unités variées.

En ce qui concerne l'extension de l'application mesure à des surfaces non pavables avec l'unité A, deux points de vue sont abordés :
- l'usage du découpage recollement pour obtenir une surface S' de même aire que S et pavable avec l'unité A ;
- l'utilisation des encadrements successifs de S par des surfaces pavables avec A ou des subdivisions de A par l'intérieur et l'extérieur.

Du point de vue purement mathématique, l'utilisation d'encadrements est suffisante pour traiter toutes les surfaces, mais elle ne permet pas de surmonter la prégnance de la forme (caractéristique des conceptions géométriques) qui est une source importante d'erreurs chez les élèves.

On trouve dans les travaux de Héraud (1989) à propos de la construction du concept d'aire chez les élèves de l'école élémentaire, une hypothèse similaire à celle de Douady et Perrin-Glorian. Pour lui, la compréhension du concept d'aire comporte deux paliers qui correspondent respectivement à la construction de l'aire en tant que grandeur autonome et à l'acquisition de la mesure d'aire.

Nous nous intéressons ici au premier palier, par rapport auquel cet auteur propose trois niveaux de conceptualisation.

Au premier niveau, la surface est associée à l'étendue et l'élève se satisfait d'une estimation visuelle pour exprimer des jugements qui sont très approximatifs.

Au deuxième niveau, l'élève est capable de mettre en oeuvre des procédures d'inclusion et superposition pour comparer les aires de deux surfaces. Si la superposition n'est pas possible, on envisage la procédure de découpage-recollement. Toutefois, cette procédure ne peut être utilisée par l'élève que s'il admet l'invariance de l'aire par "découpage recollement".

Le troisième niveau consiste en l'acceptation que l'aire d'une surface est invariante sous l'effet de certaines transformations géométriques, même si son aspect globale change. On peut citer l'invariance de l'aire par rapport à la position et à l'orientation de la surface (translation et rotation) et l'invariance par découpage-recollement.

Plusieurs recherches convergent vers l'importance de l'utilisation du découpage recollement dans l'élaboration du concept d'aire - Douady et Perrin-Glorian (1989), Héraud (1989) , Hirstein et al (1978) et Hart (1981), par exemple. L'invariance de l'aire par découpage recollement s'appuie du point de vue mathématique, sur le fait que des surfaces équidécomposables[15] ont même aire.

La procédure de pavage est également un point important dans la construction de l'aire en tant que grandeur autonome, car elle permet de mesurer l'aire de surfaces directement par usage d'unités d'aire.

Les résultats des évaluations montrent que cette procédure est disponible chez la plupart des élèves à l'entrée en sixième. Hart (1981) montre aussi que les taux de réussite aux questions de mesure de l'aire par pavage sont assez élevés et la maîtrise de cette procédure est antérieure à celle de l'usage de formules d'aire.

Nunes, Light et Mason (1993) mettent en évidence l'importance de donner un fondement à la formule d'aire d'un rectangle basé sur le dénombrement d'unités d'aire associé à la multiplication plutôt que sur le produit de longueurs.

La prise en compte de l'approche de l'aire en tant que grandeur autonome permet de dépasser un certain nombre de difficultés des élèves. Cette approche permet en particulier d'établir des liens entre les cadres géométrique et numérique.

Cependant, cette approche n'est pas suffisante pour rendre compte de l'acquisition du concept d'aire par les élèves. Les relations entre l'aire et les longueurs (relativement marginales quand on considère l'aire en tant que grandeur autonome) sont fondamentales dans la construction du concept d'aire et au niveau de collège cette relation prend une place particulièrement importante.

3.3. L'aire en tant que grandeur bidimensionnelle : l'acquisition des relations entre aire et longueur

La construction de l'aire en tant que grandeur bidimensionnelle est un processus complexe et de longue durée qui s'insère dans le cadre plus large de l'acquisition des relations entre les différentes grandeurs géométriques.

A ce propos, Rogalski met en évidence que "*ces relations mettent en oeuvre un double processus de différenciation et de coordination : différenciation de propriétés simultanément présentes dans un objet ou une figure (la longueur du bord / la surface*

15. Deux surfaces sont équidécomposables quand il est possible d'obtenir une partition finie de chacune d'elles en morceaux deux à deux superposables.

intérieure ; la surface d'un solide / son volume ...) et coordination de ces propriétés de façon non seulement qualitative mais quantitative, aboutissant aux "équations aux dimensions" (Rogalski, 1982, p.348)

Les résultats des évaluations du Ministère de l'Éducation Nationale et de l'APMEP présentés précédemment montrent que la dissociation entre l'aire et la longueur (et en particulier entre l'aire et le périmètre) est un aspect de l'apprentissage du concept d'aire qui pose beaucoup de difficultés pour les élèves. Les recherches antérieures à la nôtre mettent également ceci en évidence et fournissent des pistes pour analyser certaines des sources possibles d'erreurs commises par les élèves.

Les difficultés concernant la dissociation entre aire et longueur peuvent résister longtemps comme témoigne la recherche développée par Schneider (1991) autour de l'apprentissage du calcul intégral chez des élèves de lycée (15 à 18 ans).

Schneider interprète certaines erreurs commises par les élèves dans les calculs d'aires et de volumes comme des conséquences de "l'obstacle de l'hétérogénéité des dimensions" de nature épistémologique. Cet obstacle consistant "*en glissements inconscients et indus entre le domaine des grandeurs et celui de leurs mesures*" (Schneider, 1991, p.242) est analogue à celui rencontré dans l'histoire des mathématiques concernant la notion d'indivisible dans la théorie de Cavalieri. Le passage à la limite y joue un rôle central, mais cet aspect s'éloigne un peu de nos préoccupations, vu le niveau de scolarité auquel nous nous intéressons. Cet exemple nous sert toutefois à illustrer la résistance des erreurs concernant la dissociation entre aire et longueur.

Dans son exposé de soutenance de thèse d'état, Perrin-Glorian fait l'hypothèse de l'existence d'un obstacle autour de la liaison entre l'aire et le périmètre :
"*il serait intéressant de répertorier les situations dans lesquelles l'amalgame se produit pour décider si c'est ou non un obstacle et préciser sa nature. On peut peut-être aussi le comparer à d'autres conceptions erronées dans d'autres domaines, du genre 'toutes les fonctions sont monotones' ou 'toutes les suite convergentes sont monotones' et considérer que c'est une simplification. Cette simplification résiste parce qu'elle produit souvent des résultats justes, ce qui fait qu'elle est renforcée dans le travail scolaire et même ensuite, et rapprocher cela de la notion de connaissances locales au sens où utilisent C. Sackur et F. Léonard, en particulier, elles ne sont vraies que dans un domaine de validité que l'élève ignore.*" (Perrin-Glorian, exposé de soutenance de thèse, p. 4)

Tierney et al observent chez les futurs professeurs d'école, des manques significatifs de connaissances sur le concept d'aire et en particulier sur les relations entre aire et périmètre (Tierney et al, 1990). Ceci renforce l'idée de la résistance des difficultés d'apprentissage à ce propos, et indique de plus, une tendance à la persistance de ces difficultés : si l'hypothèse d'un obstacle épistémologique est vérifiée, il est probablement renforcé par un obstacle didactique, dû aux connaissances insuffisantes des enseignants.

Dans l'étude des "misconceptions" à propos de la mesure d'aire, Hirstein et al ont observé la mise en oeuvre de procédures qui relèvent d'une confusion entre l'aire et le périmètre (Hirstein et al, 1978). C'est le cas par exemple des procédures de compensation additive des longueurs, dans des tâches de production d'une surface de même aire qu'une autre surface donnée au départ. Dans ce type de procédure, il y a invariance du périmètre mais l'aire n'est pas conservée. On ne peut pas savoir a priori si ces procédures se justifient par une confusion entre l'intérieur de la surface et son bord (l'élève ne sait pas très bien de quel objet il s'agit) ou s'il y a mise en oeuvre d'un raisonnement faux de type "l'aire et le périmètre varient dans le même sens" (ce qui "autorise" l'élève à conserver le périmètre, par compensation additive des longueurs des côtés, pour obtenir une surface de même aire).

Les raisonnements de type "aire et périmètre varient dans le même sens" apparaissent à plusieurs reprises et dans des types de situations diverses, dans les recherches développées par Hart (1981). Dans des tâches de comparaison des aires et des périmètres de surfaces équidécomposables, un nombre significatif d'élèves (autour de 30%) affirment que le périmètre ne change pas, parce que l'aire est conservée. La même confusion est observée lorsqu'on demande de produire un rectangle de même périmètre qu'un rectangle donné au départ : 36% des élèves construisent un rectangle de même aire.

Un autre type d'erreur à propos de l'aire et du périmètre est celui qui concerne les moyens de calcul. Les résultats des évaluations montrent que les élèves "fabriquent" des formules plus ou moins fondées, dans lesquelles interviennent les longueurs, l'aire et le périmètre.

Dans les pratiques sociales où la mesure de l'aire intervient (dans le contexte de l'agriculture, par exemple) on trouve également des processus de "fabrication" de formules qui ne correspondent pas à celles enseignées à l'école. Les recherches développées par Acioly (1994) et par Kjinski (1993) analysent les procédures de mesure mises en oeuvre dans le contexte de l'agriculture par les travailleurs de canne à sucre du Nordeste du Brésil et par des travailleurs du "mouvement des travailleurs ruraux sans terre" au Sud du Brésil. Il faut mettre en avant que la problématique de ces sujets n'est pas celle de l'apprentissage scolaire et que les objets qu'ils manipulent ne sont pas des surfaces du micro-espace d'une feuille de papier, mais des extensions de terrains. Il leur faut trouver une mesure approchée de l'aire, pour calculer le salaire, pour partager les terrains, pour prendre des décisions pratiques.

Ces recherches s'éloignent un peu de notre objet d'étude (centré sur les apprentissages scolaires) mais elles permettent de mettre en évidence des procédures erronées proches de celles mises en oeuvre par les élèves de l'école élémentaire et du collège. Nous pouvons remarquer parmi les méthodes de calcul de l'aire employées :

- l'identification d'un terrain "à quatre côtés connus" via un processus de modélisation, à un rectangle de même périmètre, dont les côtés sont calculés par la moyenne des côtés opposés ;
- l'identification d'un terrain "à quatre côtés connus" à un carré de même périmètre ;
- l'identification d'un terrain de forme triangulaire, à un quadrilatère dégénéré (l'un des côtés est nul).

Acioly fait remarquer que les Égyptiens primitifs utilisaient des méthodes de calcul de l'aire similaires à celles des agriculteurs de la canne à sucre "*tous leurs calculs de surface sont fondés sur celui du rectangle, qu'ils ont déterminé exactement comme étant égal au* *produit de deux côtés adjacents.*" (Acioly, 1994, p. 158)

A ce propos, Perrin-Glorian (1992) remarque que "*les élèves ont tendance à recourir à des procédures périmétriques dans des situations où le calcul d'aire risque d'amener des résultats approchés ou des processus infinis. Par exemple, un élève de CM2 réclame de la ficelle pour 'transformer en rectangle' une surface aux bords arrondis. [...]* " Les gestes de l'élève montrent cependant qu'il cherchait une compensation perceptive des aires. Perrin-Glorian interprète ceci de la façon suivante : "*ce recours aux procédures périmétriques ne veut pas dire que les enfants confondent aire et périmètre de la surface. Il semble plutôt qu'ils pensent qu'on peut tirer des informations sur l'un à partir d'informations sur l'autre, par exemple leurs variations ne sauraient que se produire dans le même sens ou bien on se réfère à l'un quand il est trop coûteux d'utiliser l'autre [...]*" (Perrin-Glorian, 1992, p. 3)

Des erreurs concernant les moyens de calcul ont été également analysées dans les recherches sur le volume menées par Vergnaud et al (1983). En effet, il a été observé, dans le traitement de situations de calcul du volume, la mise en oeuvre de procédures périmétriques, de procédures de type surface et de procédures mixtes. Les élèves cherchent à prendre en compte toutes les dimensions du solide, mais ils ne savent pas comment les articuler. A ce propos, Vergnaud et al mettent en évidence la difficulté de mise en oeuvre d'une composition multiplicative des dimensions ce qui s'insère dans l'étude du champ conceptuel des "structures multiplicatives".

Les difficultés concernant le passage d'opérations de compensations additives - suffisantes pour traiter les situations de conservation des longueurs - aux compensations multiplicatives - nécessaires pour traiter les situations de conservation des aires sont abordées également dans les recherches menées par Vinh Bang et Lunzer (1965) à propos de l'étude des conservations. Il s'agit ici de l'acquisition de l'indépendance entre l'aire et le périmètre du point de vue de leurs variations respectives. Les situations expérimentales étudiées par Vinh Bang et Lunzer sont centrées sur des surfaces usuelles (rectangles, parallélogrammes, triangles...), essentiellement du point de vue dynamique et il y a toujours conservation de l'aire avec variation du périmètre ou réciproquement.

On trouve chez Balacheff (1988) une expérimentation en classe de quatrième autour des variations respectives de l'aire et du périmètre pour le cas des rectangles. Contrairement à Vinh Bang et Lunzer, Balacheff étudie aussi bien le cas de conservation de l'aire (respectivement du périmètre) avec variation du périmètre (respectivement de l'aire) et celui des variations simultanées des deux mesures.

L'analyse des réponses des élèves et en particulier des "retours en arrière" montre que tous les binômes acceptent que rectangles de même aire peuvent avoir des périmètres distincts et rectangles de même périmètre peuvent avoir des aires différentes. Ce n'est pas le cas des assertions à propos des variations simultanées de l'aire et du périmètre. Tous les binômes affirment que "l'aire et le périmètre de rectangles varient dans le même sens". et la production de contre-exemples lors du traitement des autres assertions ne provoque pas la mise en cause de cette affirmation.

Balacheff fait l'hypothèse que la résistance de cette difficulté est renforcée dans le cadre numérique par le théorème en acte "*si on augmente une somme (respectivement un produit) alors chacun des termes (respectivement des facteurs) est augmenté*".

Nous avons étudié nous-même, lors de notre mémoire de DEA, le problème de la dissociation de l'aire et du périmètre de rectangles[16]. Nous avons cherché en particulier à approfondir l'analyse des sources de difficulté des élèves liées au cadre numérique, notamment le rôle de la mise en oeuvre du théorème en acte énoncé par Balacheff. L'expérimentation que nous avons faite en classe de cinquième, à ce moment là, a montré que :

- sur une centaine de copies analysées, à peu près un tiers des élèves n'ont pas acquis la formule de l'aire et/ou celle du périmètre d'un rectangle ;
- la mise en cause de "deux rectangles de même périmètre ont même aire" paraît antérieure à celle de "l'aire et le périmètre d'un rectangle varient dans le même sens";
- le "domaine de validité" pour les variations de l'aire et du périmètre de rectangles en sens opposés est en général restreint[17] : étant donné un rectangle A, on a beaucoup plus de chance de produire des exemples de rectangles dont l'aire et le périmètre sont tous les deux plus grands (ou plus petits) que ceux de A que des rectangles d'aire plus grande et périmètre plus petit (ou réciproquement)
- certaines des réponses des élèves peuvent être interprétées comme la mise en oeuvre du théorème en acte selon lequel si on augmente une somme (respectivement un produit) alors chacun des termes (respectivement des facteurs) est augmenté) et/ou d'un autre théorème en acte proche à celui-ci : "une somme (respectivement un produit) ne peut augmenter si l'un des termes (respectivement des facteurs) diminue".

Conclusion

Le panorama que nous venons de présenter permet
- de mettre en évidence l'importance et la variété de difficultés d'apprentissage autour du concept d'aire de surfaces planes
- d'analyser et comprendre les sources d'un certain nombre d'erreurs commises par les élèves.

Les séquences d'apprentissage construites lors des recherches antérieures favorisent le dépassement de certaines difficultés mais se montrent insuffisantes pour permettre de dépasser des erreurs liées à la dissociation de l'aire et du périmètre de surfaces usuelles et à l'usage des formules d'aire.

Le thème de l'apprentissage du concept d'aire présente donc une ouverture et demande à être approfondi. Nous avons ressenti en particulier la nécessité de construire un outil

16. Voir (Moreira Baltar et Comiti, 1993).
17. D'autant plus que dans les observations chez Balacheff et dans notre expérimentation les élèves cherchent les contre-exemples dans l'ensemble des entiers (les décimaux ne sont pratiquement pas pris en compte).

d'analyse locale, mais permettant en même temps de prendre en considération la construction du concept d'aire d'un point de vue globale. Pour cela, nous avons développé, dans le cadre de la théorie des champs conceptuels, une étude des situations-problème qui peuvent être traitées a priori au niveau de l'école élémentaire et du collège. Cette étude devrait faire l'objet d'un article dans un numéro ultérieur de « petit x ».

Bibliographie

APMEP, (1987), *Évaluation du programme de mathématiques, fin de sixième* . Une étude de l'APMEP, publication n°66, Paris.

APMEP, (1988), *Évaluation du programme de mathématiques, fin de cinquième.* Une étude de l'APMEP, publication n°72, Paris.

APMEP, (1990), *Évaluation du programme de mathématiques, sixième 1989 - cinquième 1990.* Une étude de l'APMEP, publication n°84, Paris.

ACIOLY N., (1994), *La juste mesure, une étude des compétences mathématiques des travailleurs de la canne à sucre du Nordeste du Brésil dans le domaine de la mesure.* Thèse de Doctorat d'Université, Université de Paris V, Paris.

BALACHEFF N., (1988), *Processus de preuve chez des élèves de collège.* Thèse de Doctorat d'État, Université Joseph Fourrier, Grenoble.

DOUADY R. et PERRIN-GLORIAN M.J., (1984), Aires de surfaces planes (1ère partie). *Petit x* , n° 6 , pp. 5-33.

DOUADY R. et PERRIN-GLORIAN M.J., (1985), Aires de surfaces planes (2ème partie) *Petit x,* n° 8 , pp. 5-30.

DOUADY R. et PERRIN-GLORIAN M.J., (1989), Un processus d'apprentissage du concept d'aire de surface plane. *Educational Studies in Mathematics,* 20(4), pp. 387- 424.

HART K. M., (1981), Measurement. In K.M. Hart (Ed.) *Children's understandind of mathematics* 11-16. Oxford : Murray.

HERAUD B., (1989), A conceptual analysis of the notion of lenght and its measure. In G. Vergnaud , J. Rogalski, & M. Artigue (Eds.), *Proceedings of the 13th International Conference of the psychology of Mathematics Education,* Vol 2, pp. 83-89, Paris.

HIRSTEIN J.J., LAMB C.E. et OSBORNE A., (1978), Students misconceptions about area measure. *Arithmetic Teacher* 25 (6), pp. 10-16.

KNIJNIK G., (1993), O saber popular e o saber acadêmico na luta pela terra : uma abordagem etnomatemática. *A Educação matemática em Revista,* SBEM n°1, pp. 28-42

LEONARD F. et SACKUR C., (1990), Connaissances locales et triple approche, une méthodologie de recherche. *Recherches en didactique des mathématiques*, n°10/2.3, La Pensée Sauvage, Grenoble, pp. 205-240

MOREIRA BALTAR P. et COMITI C., (1993), Difficultés rencontrées par des élèves de cinquième en ce qui concerne la dissociation aire/périmètre pour des rectangles, *Petit x*, n°34, IREM de Grenoble, pp. 5-29.

MOREIRA BALTAR P. (1996), *Enseignement et apprentissage de la notion d'aire de surfaces planes : une étude de l'acquisition des relations entre les longueurs et les aires au collège.* Thèse de Doctorat de l'Université Grenoble 1.

NUNES T., LIGHT P. et MASON J., (1993), Tools for thought : The measurement of lenght and area. *Learning and Instruction.*, Vol 3. pages 39-54.

PERRIN-GLORIAN M.J., (1990), L'aire et la mesure. *Petit x* , n° 24, IREM de Grenoble, pages 5-36.

PERRIN-GLORIAN M.J., (1992), *Aires de surfaces planes et nombres décimaux. Questions didactiques liées aux élèves en difficulté aux niveaux CM - 6ème.* Thèse de doctorat d'état. Paris VII.

PERRIN-GLORIAN M.J., (1993), *Exposé de soutenance.* Paris.

ROGALSKI J., (1982), Acquisition de notions relatives à la dimensionalité des mesures spatiales (longueur, surface). *Recherches en didactique des mathématiques*, n°3.3, La Pensée Sauvage, Grenoble, pp. 343-396.

SCHNEIDER M., (1991), Un obstacle épistémologique soulevé par des "découpages infinis" des surfaces et des solides. *Recherches en didactique des mathématiques*, n°11/2.3, La Pensée Sauvage, Grenoble, pp. 241-294.

TIERNEY C., BOYD C. et DAVIS G., (1990), Prospective Primary teachers' conceptions of area. *Fourteenth PME Conference.* Vol. II. Mexico.

VERGNAUD et al., (1983), Didactique du concept de volume. *Recherches en didactique des mathématiques*, n°4.1, La Pensée Sauvage, Grenoble.

VINH BANG et LUNZER, (1965), *Conservations spatiales.* Etude d'épistemologie génétique. PUF, Paris.