LES NOMBRES NEGATIFS DANS L'ABSTRAIT, DANS LE CONTEXTE ET SUR LA DROITE

Alicia BRUNO et Antonio MARTINÓN
Université de La Laguna
Tenerife, Espagne

RÉSUMÉ. Nous avons analysé les connaissances sur les nombres négatifs dans trois dimensions : la *dimension abstraite*, la *dimension de droite* et la *dimension contextuelle*. Nous avons étudié, à travers des entretiens cliniques réalisés avec 11 élèves âgés de 12 et 13 ans, la façon dont ceux-ci transfèrent leurs connaissances d'une dimension à l'autre. Les difficultés majeures sont apparues dans les transferts de l'abstrait à la droite. Dans les problèmes verbaux additifs, c'est la position de l'inconnue qui détermine le transfert correct entre les dimensions.

I. Introduction

L'apprentissage des nombres présente de multiples facettes, ainsi lorsque nous parlons d'un bon apprentissage des nombres nous nous référons par exemple, à la maîtrise du calcul, à la bonne résolution des problèmes, à l'application des connaissances dans diverses situations, à l'acquisition d'un bon "sens numérique", etc. Dans cet article, ce qui nous intéresse c'est l'apprentissage du domaine des nombres, et plus particulièrement de celui des nombres négatifs. Par domaine des nombres, nous comprenons l'ensemble des situations, des représentations physiques ou graphiques, les habilités, les techniques, etc..., associées aux nombres. Parmi les recherches faites à ce sujet, on trouve des travaux intéressants qui contienent les idées de ce que nous comprenons par domaine numérique : *champ conceptuel* (Vergnaud, 1990), *domaine conceptuel* (Greeno, 1991). Ainsi, Greeno définit le *domaine conceptuel* en utilisant la métaphore d'un "environnement" ("ambiance", "milieu") dans lequel on peut savoir comment trouver les ressources et comment les utiliser pour faire des choses. On ne connaît véritablement un concept que lorsqu'on sait bien se mouvoir à l'intérieur de son domaine conceptuel. Comme le signale Greeno (1991) :

Using a physical metaphor, the domain may be thought of as an environment, with resources at various places in the domain. In this metaphor, knowing the domain is knowing your way around in the environment and knowing how use its resources. This includes knowing what resources are available in the environment as well as being able to find and use those resources for understanding and reasoning,... learning the domain, in this view, is analogous to learning to live in an environment : learning your way around, learning what resources are available, and learning how to use those resources in conducting your activities productively and enjoyably.

Pour procéder à l'exploration du domaine des nombres négatifs, nous utilisons l'idée de dimension introduite par Peled (1991) qui présente une analyse théorique sur les connaissances des enfants au sujet des nombres avec signe et des opérations telles que l'addition et la soustraction. Dans cette analyse, on décrit différents *niveaux de connaissances* des nombres négatifs dans deux dimensions : la *dimension de droite numérique* et la *dimension quantitative*.

Selon Peled, la façon dont les enfants décrivent leur perception des nombres négatifs, et ce que veulent dire pour eux les opérations, mènent à la description de leurs connaissances en deux dimensions : une *dimension "quantitative"* et une *dimension de "droite numérique"*. Un enfant peut utiliser en même temps plusieurs images de nombres avec signe et des opérations et il peut utiliser des images différentes pour divers types de problèmes numériques.

Dans chaque dimension, Peled a découvert quatre niveaux de connaissance, et les élèves peuvent ainsi se situer à des niveaux différents dans chacune des dimensions. Par exemple, au niveau 1 de la dimension de droite, l'enfant sait qu'il existe des nombres, qu'on appelle des nombres négatifs à gauche du zéro sur la droite, ces nombres sont le reflet des nombres "réguliers",.... On caractérise le niveau 1 de la dimension quantitative de la façon suivante : il y a des "nombres réguliers" qui représentent des quantités de choses, et il existe des nombres négatifs qui sont aussi des quantités de choses, bien qu'avec une connotation défavorable, comme par exemple devoir de l'argent. Par exemple, un élève peut parvenir au niveau 2 de connaissance dans la dimension quantitative, et au niveau 3 dans la dimension de droite.

Peled signale que l'analyse des niveaux est utile comme instrument pour comprendre la complexité des connaissances sur les nombres négatifs et cela permet de diagnostiquer ce que l'enfant connaît et ce qu'on peut faire pour qu'il progresse jusqu'à des niveaux de connaissances plus élevés.

Cette description des connaissances en dimensions, nous permet d'organiser et de caractériser le domaine des nombres négatifs. Les recherches que nous avons faites sur l'apprentissage des nombres négatifs, nous ont amené à envisager une dimension de plus que Peled (1991). Nous subdivisons la dimension quantitative en *dimension "contextuelle"* et *dimension "abstraite"*. Dans la deuxième partie de ce travail, nous décrivons de façon plus détaillée, chacune des trois dimensions. Notre recherche s'est tout particulièrement centrée sur la façon dont les élèves mettent en rapport les dimensions entre elles, sur la façon dont ils expriment une connaissance dans chacune des trois dimensions, et plus précisément, nous avons cherché à savoir comment une situation numérique d'une certaine dimension se transfère dans une autre dimension. Pour ce faire, nous nous sommes basés sur les résultats obtenus à partir des entretiens cliniques que nous avons réalisés avec 11 élèves âgé de 12 et 13 ans. Ces élèves avaient déjà participé, avec un autre groupe, à une recherche entreprise par le premier des deux auteurs de cet article. Dans la troisième partie, vous trouverez les principales caractéristiques de cette recherche. Les principaux résultats auxquels nous sommes parvenus ainsi que de nombreuses observations sur les transferts entre dimensions qui figurent dans les quatrième et cinquième parties.

II. Les trois dimensions des nombres

Dans cette partie, nous décrivons les trois dimensions que nous envisageons dans le domaine des nombres : *abstraite*, *de droite* et *contextuelle*. Dans chacune de ces trois dimensions, nous devons prendre en compte les différents aspects mathématiques qui sont présents : les nombres en soi, l'ordre entre eux et les opérations avec eux.

Tout d'abord, il faut signaler que la recherche que nous avons menée à bien, conseille fortement de considérer les trois dimensions, car, elles possèdent toutes des particularités et des nuances qui les rendent complètement différentes aux yeux des élèves. C'est sur ce point que nous nous écartons de Peled (1991) qui ne considère que deux dimensions : *quantitative* (où nous concevons nos deux dimensions : abstraite et contextuelle) et la dimension *de droite*.

Voyons, à l'aide d'un exemple, comment ces dimensions se manifestent chez les 11 élèves qui ont participé aux entretiens. On leur a demandé, entre autres choses, d'ordonner les nombres suivants :
-8, 6, -7, -18, 9. Voici les critères que les élèves ont utilisés :

Dimension abstraite (cinq élèves)
"Parmi les négatifs, le nombre le plus grand est le plus petit".
"Parmi les positifs, le nombre le plus grand est le plus fort, parmi les négatifs, c'est le contraire".

Dimension contextuelle (un élève)
"Si on doit 8 c'est pire que si on doit 7".

Dimension de droite (cinq élèves)
"Celui qui se trouve le plus à gauche est le plus petit".

Cet exemple démontre que face à une certaine situation problématique, les raisonnements des élèves se situent dans les trois dimensions. De toute évidence, le fait que les connaissances manifestées par un élève puissent être situées dans une dimension déterminée ne signifie pas qu'il ne connaisse pas les autres ; par exemple, il peut ordonner les nombres en pensant à la représentation sur la droite bien qu'il sache aussi le faire en suivant un critère abstrait.

II.1. La dimension abstraite

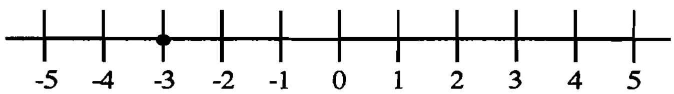
Cette dimension fait référence à la connaissance abstraite, symbolique et algébrique des nombres, à l'ordre et aux opérations. En vue de notre recherche, nous considérons que les élèves connaissent les nombres positifs, les règles qui permettent de les ordonner et les algorithmes pour pouvoir réaliser des opérations. Lorsqu'on introduit les nombres négatifs, élargissant ainsi l'ensemble numérique, l'ordre et les opérations sont soumis à de nouveaux critères. Par exemple, le calcul de l'addition $3 + (-8) = -5$ fait partie de cette dimension et, on applique la règle suivante : "pour faire la somme d'un nombre positif et d'un nombre négatif, on soustrait les valeurs absolues et l'on garde le signe du plus grand", et ce, sans faire allusion à aucune référence réelle ni à une représentation sur la droite.

Les connaissances liées à la compréhension des symboles font parties de cette dimension. Lorsqu'on s'étend au nombres négatifs, de nouvelles idées sur l'écriture des nombres et de nouvelles règles pour utiliser les symboles apparaissent. Par exemple, un nombre peut s'écrire de différentes façons (3 = +3 = +(+3)), les signes "+" et "-" ont un double sens, en tant qu'opérations et en tant que signes de nombres, etc.

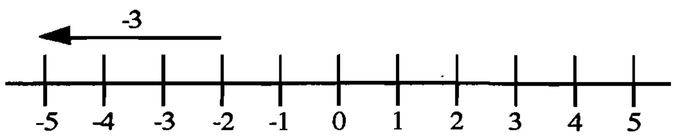
II.2. La dimension de droite

On peut représenter les nombres réels sur une droite sur laquelle on a marqué le point d'origine (0) et une unité (1). L'identification de la droite avec l'ensemble des nombres réels constitue l'une des idées fondamentales des mathématiques. L'ordre des nombres est déterminé par leur position sur la droite, c'est-à-dire que, si l'on a deux nombres, le plus grand est celui qui se trouve à droite sur la droite. L'addition et la soustraction trouvent aussi une traduction sur la droite lorsqu'on identifie les nombres à des mouvements (flèches) sur la droite, comme on peut voir dans les exemples qui suivent.

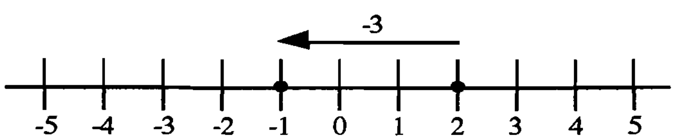
Cependant, une dualité apparaît sur la droite. D'une part, chaque nombre correspond à un point sur la droite. D'autre part, on identifie chaque nombre à un vecteur opérant sur la droite. Les deux représentations sont correctes et toutes deux sont étroitement liées : chaque point peut être identifié au vecteur déterminé par l'origine et par ce même point. En outre, ces deux représentations sont utiles. Par exemple, le nombre -3 peut être représenté par un point :



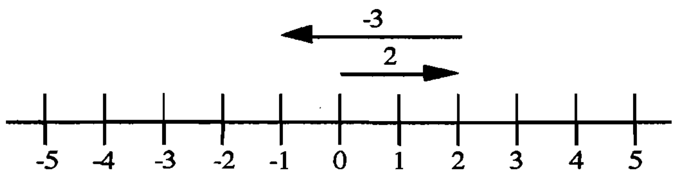
On peut également représenter le nombre -3 par un vecteur et dans ce cas on le représente par un segment de longueur 3, orienté vers la gauche :



Il arrive parfois qu'on utilise les deux représentations de façon simultanée. En général, pour représenter 2 + (-3) = -1, on représente le premier terme par un point et le second par un vecteur, et on obtient alors un point :



ou bien



La dualité de la représentation présente certaines difficultés pour l'élève, comme l'a déjà fait remarquer Janvier (1983). Selon Janvier, la difficulté provient du fait que l'addition peut être la composition de deux transformations ou le changement d'un état à un autre état. Toutefois, cette dualité est aussi présente avec les couples, triples,... de nombres réels. Cependant, Glaeser (1981) décrit la *difficulté à unifier la droite numérique* comme étant l'un des obstacles épistémologiques à l'acquisition du concept de nombre négatif qui a surgi tout au long de l'histoire, et il signale que cet obstacle se manifeste, entre autres raisons, *lorsqu'on répugne à envisager simultanément des caractères dynamiques et statiques des nombres*. De nombreux élèves se trouveront face à la dualité point-vecteur à des stades plus élevés de leur apprentissage. Nous pensons que l'utilité de l'étude systématique de la dualité dans le cas des nombres réels, se justifie en soi, et d'autre part cela permettra aux élèves de mieux comprendre cette notion lorsqu'il la retrouverons un peu plus tard en cours de géométrie analytique ou en cours de sciences physiques.

II.3. La dimension contextuelle

La dimension contextuelle fait référence aux connaissances qui sont exprimées par les élèves à travers des situations numériques concrètes. Par exemple, le fait d'associer le nombre négatif -2 à l'idée de "*devoir 2* " ou "*descendre 2*". L'égalité 3 + (-8) = -5 adopte un sens tel que "*J'ai 3 francs, j'en ai perdu 8, maintenant je dois 5*".

Nous envisageons six contextes differents : *devoir-avoir*, *température*, *altitude*, *route*, *chronologie* et *ascenseur*. Les situations numériques que nous envisageons correspondent à des *états* (e), des *variations* (v) et des *comparaisons* (c). En guise d'éclaircissement, voyons maintenant des exemples d'états, de variations et de comparaisons à l'intérieur des six contextes cités plus haut.

Devoir-avoir :
e : *Je dois 2*
v : *J'ai perdu 2*
c : *J'ai 2 de moins que toi*

Route :
e : *Je suis au kilomètre 2 à gauche du kilomètre zéro*
v : *Je me suis déplacé de 2 kilomètres vers la gauche*
c : *Tu es à 2 kilomètres plus à gauche que moi*

Température :
e : *la température est de 2 degrés en dessous de zéro*
v : *la température a baissé de 2 degrés*
c : *Il fait 2 degrés de moins à Londres qu'à New York*

Chronologie :
e : *Il est né en l'an 2 avant J.C.*
v : *Il y a 2 ans*
c : *Tu as 2 ans de moins que moi*

Altitude :
e : *Je suis à 2 mètres sous le niveau de la mer*
v : *Je suis descendu de 2 mètres*
c : *Tu es à 2 mètres en dessous de moi*

Ascenseur :
e : *Je suis au 2ème sous-sol*
v : *J'ai descendu 2 étages*
c : *Tu es à 2 étages en dessous de moi*

On voit apparaître à nouveau une variété de sens dans la mise en contexte, étant donné que les nombres représentent des situations différentes : des états, des variations et des comparaisons.

Les six contextes sont fréquemment utilisés dans les manuels. À noter que tous les contextes sont utilisés dans la vie réelle à l'exception du contexte route, que l'on peut considérer comme une idéalisation de la droite numérique.

III. La recherche

Voyons à présent la description de l'expérience faites avec 71 élèves et les entretiens cliniques réalisés avec 11 d'entre eux.

III.1. Description de l'expérience

Cette expérience a été réalisée avec 71 élèves âgés de 12 et 13 ans que nous avons partagés en trois groupes que nous désignerons par G1, G2 et G3. Les élèves des trois groupes ont utilisé un matériel de travail que nous avions nous même élaboré. Ils ont dû passer plusieurs épreuves écrites et certains d'entre eux (11 au total) ont participé à des entretiens cliniques.

Nous avons élaboré le matériel de notre recherche en fonction des critères suivants :

(1) Trois dimensions. Les élèves ont travaillé sur les trois dimensions décrites plus haut, avec le matériel élaboré. Les activités avaient pour objet la résolution des situations problématiques concrètes (dimension contextuelle) de telle façon que ces situations donnent un sens et justifient les règles opératoires des nombres négatifs (dimension abstraite). De plus, nous avons utilisé la représentation sur la droite (dimension de droite), aussi bien pour les activités abstraites que pour celles de mises en contexte.

(2) Elargissement aux nombres réels. En général, on introduit les nombres négatifs en plusieurs étapes. Tout d'abord, les entiers négatifs, puis les rationnels négatifs et enfin les réels négatifs. Avec les élèves des groupes G1 et G2, nous avons procédé différemment : nous sommes partis du fait qu'ils connaissaient les nombres positifs (étant en mesure d'identifier cet ensemble avec toutes les expressions décimales, ce qui correspond à tous les nombres situés à droite du zéro) puis nous avons introduit les nombres réels négatifs. Ainsi, nous avons travaillé à l'élargissement : $\mathbb{R}_+ \longrightarrow \mathbb{R}$. Bien que le travail se soit tout particulièrement centré sur $\mathbb{Q}$.

Pour ce faire, nous leur avons proposé des situations où il fallait utiliser les nombres négatifs, qui ont été présentés comme les nombres qui se situent sur la droite à gauche du zéro. Nous sommes conscients de ne pas avoir réalisé l'extension formelle à $\mathbb{R}$, au contraire, nous avons essayé de leur faire comprendre de façon intuitive qu'avec les nombres négatifs nous complétons la droite réelle.

Le groupe G3 a réalisé les mêmes activités que les deux autres groupes mais on a remplacé les fractions ou les décimales qui apparaissaient dans certaines activités, par des nombres entiers. Ainsi, ces élèves ont réalisé l'extension $\mathbb{Z}_+ \longrightarrow \mathbb{Z}$.

(3) Identification de l'addition et de la soustraction. Lorsqu'on introduit les nombres négatifs, une difficulté importante apparaît dans les opérations : l'identification de l'addition et de la soustraction. La compréhension de cette identification dans chacune des dimensions (abstraite, contextuelle et de droite) est quelque peu complexe. Par exemple, dans la dimension contextuelle, les élèves sont persuadés qu'additioner veut dire "ajouter", "gagner", ... alors que soustraire veut dire le contraire "enlever", "perdre", ...Mais maintenant, les deux idées sont confondues et cela revient au même de dire "*j'ai perdu 3*" que "*j'ai gagné -3*", "*j'ai gagné 3*" veut dire "*j'ai perdu -3*". Avec les nombres négatifs, on peut exprimer les situations numériques de deux façons et il est élémentaire que dans leur apprentissage, on transforme les deux idées opposées d'additionner et de soustraire, propres aux nombres positifs, en une seule idée d'addition de nombres (positifs et négatifs), qui peut s'exprimer aussi bien sous forme d'addition que de soustraction.

III.2. Entretiens cliniques

Pour la réalisation d'entretiens cliniques, nous avons sélectionné 11 élèves (que nous appelerons E1, E2, E3,...E11). Ceux-ci ont fait l'objet de cinq entretiens ; chaque session dure approximativement une demi-heure. Nous exposons dans cette article une partie des résultats de ces entretiens.

Nous avons choisi les élèves en fonction des taux de réussite obtenus lors des épreuves écrites réalisées au cours de cette expérience par tous les élèves. Les épreuves écrites contenaient les différents aspects des nombres négatifs : l'ordre, la représentation sur la droite, l'opération, la résolution de problèmes, etc... Chaque épreuve a été notée de 0 à 10, et c'est à partir de cette notation que nous avons classé les élèves en 5 niveaux différents et qui sont les suivants : moins de 5 à toutes les épreuves (niveau *bas*), moins de 5 à une épreuve et plus de 5 aux autres (niveau *bas-moyen*), entre 5 et 7 à toutes les épreuves (niveau *moyen*), entre 5 et 7 points à certaines épreuves, et entre 8 et 10 à d'autres (niveau *moyen-élevé*), et enfin, plus de 8 points à toutes les épreuves (niveau *élevé*). De plus, nous avons veillé à choisir des élèves appartenant à chacun des trois groupes. (Voir Tableau I).

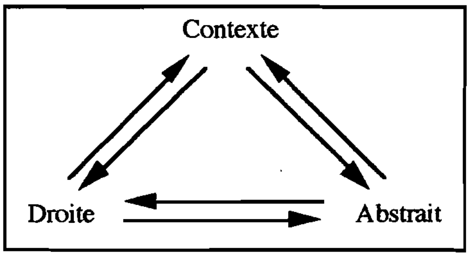
Tableau I. Distribution des 11 élèves par groupes et par niveaux

Niveau\Groupe	G1	G2	G3
Bas		E1	E2
Bas-moyen	E3	E4	
Moyen	E5, E6, E7		
Moyen-élevé			E8
Elevé	E9, E10	E11	

Les activités proposées lors des entretiens réunissaient les différents aspects abordés au cours de cette expérience. C'est à dire, comment s'est produite l'extension au nombres négatifs, l'unification des opérations addition et soustraction, la résolution des problèmes additifs avec des nombres négatifs et enfin, comment se manifeste et se relie la connaissance des trois dimensions. Pour ce faire, nous avons préparé un ensemble de situations problématiques avec des nombres négatifs qui comprenaient les aspects suivants : le classement des nombres, l'ordre, les règles opératoires, la représentation sur la droite et la résolution des problèmes.

Dans cette étude, nous exposons les résultats concernant les dimensions et les transferts entres ces dernières. Par transfert nous comprenons ce que Janvier (1987) a appellé *processus de translation*, c'est-à-dire, le processus psychologique que l'on réalise pour passer d'un mode de représentation à un autre, par exemple, d'une équation à un graphique. Janvier signale que ce n'est pas facile de trouver, parmi les différentes recherches effectuées, des travaux se rapportant au *processus de translation* étant donné que souvent cette idée est abordée indirectement, comme on a pu le voir dans le cas de certains chercheurs qui ont étudié les notions de modèles. En ce qui concerne notre sujet, la connaissance du domaine conceptuel des nombres ne se limite pas à la connaissance des trois dimensions, elle inclut également la connaissance des relations existantes entre ces dimensions. Il est possible de faire une représentation graphique de cette dernière idée, à l'aide d'un triangle (Figure 1).

Figure 1

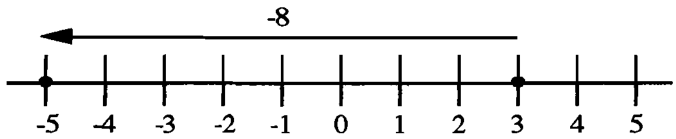


Nous cherchons à savoir comment trois dimensions se mettent en rapport les unes avec les autres et jusqu'à quel point il est possible de comprendre et d'exprimer dans une dimension une connaissance obtenue dans une autre. Pour analyser ces aspects, nous avons proposé aux élèves des activités où on leur demandait de façon explicite de passer d'une dimension à l'autre. La liste complète de ces questions serait beaucoup trop longue à détailler ici, mais le tableau II nous donne un exemple de chaque type de question.

Tableau II. Exemples de situations sur les transferts entre dimensions

1 . Transfert de la dimension abstraite à la dimension de droite
Représente sur la ***droite*** *l'opération : -4 + 10 = 6*

2 . Transfert de la dimension de droite à la dimension abstraite
Trouve une ***opération*** *qui puisse être représentée sur la droite de la façon suivante :*

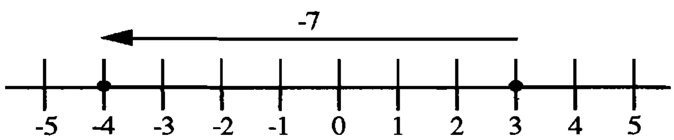


3 . Transfert de la dimension abstraite à la dimension contextuelle
Trouve une ***situation*** *qui puisse être résolue par l'opération : -4 + 7 = 3*

4 . Transfert de la dimension contextuelle à la dimension abstraite
Trouve une ***opération*** *qui puisse résoudre la situation suivante :*
La température à Madrid est de 9 degrés au dessus de zéro, à Paris il fait 12 degrés de moins. Quelle température fait-il à Paris ?

5 . Transfert de la dimension contextuelle à la dimension de droite
Représente sur la ***droite*** *la situation suivante :*
Un ascenseur se trouvait au sous-sol 5 puis il a monté 7 étages. A quel étage s'est-il alors retrouvé ?

6 . Transfert de la dimension de droite à la dimension contextuelle
Trouve une ***situation*** *qui puisse être représentée sur la droite de la façon suivante :*



Il est arrivé qu'une même activité, nous permette de découvrir les connaissances de l'élève dans les deux autres dimensions. Par exemple, nous leur avons posé des problèmes additifs verbaux et nous leur avons demandé de les résoudre en utilisant la droite et en s'aidant d'une opération.

Au total, pour chaque transfert, nous avions entre 18 et 20 situations problématiques, c'est-à-dire, de 18 à 20 activités où il fallait passer de la dimension contextuelle à la dimension de droite, de 18 à 20 activités où il fallait passer de la dimension de droite à la dimension abstraite, etc. Pour chaque série d'activités (de 18 à 20), 14 d'entre elles correspondaient à des problèmes verbaux additifs. Au moment de rédiger l'énoncé de ces 14 problèmes, nous avons tenu compte de trois aspects qui nous ont paru essentiels : le contexte, la structure et la *position de l'inconnue*.

Nous avons déjà signalé que six contextes différents ont été envisagés : *devoir-avoir*, *température*, *altitude*, *route*, *chronologie* et *ascenseur*.

La structure des problèmes fait référence aux signifiés (*états*, *variations* et *comparaisons*) qui figurent dans les énoncés. Par exemple, la situation "*une personne a 5 francs et elle en dépense 2, donc il lui en reste 3*" correspond à la structure :

$$e_i + v = e_f ,$$

$e_i = 5$ étant l'état initial, $v = 2$ la variation et $e_f = 3$ l'état final.

Dans les problèmes proposés aux élèves, ce sont les structures les plus simples qui apparaissent. Pour ce qui est du classement des problèmes en fonction de leur structures, nous nous sommes inspirés de Vergnaud et Durand (1976), Vergnaud (1982), bien que nous ayons fait quelques modifications : Vergnaud distingue entre des situations telles que "avoir 5 francs" (qu'il appelle *mesures*) et "devoir 5 francs à ..." (qu'il appelle *relationstatique*). Quant à nous, nous ne distinguons pas entre les deux types de situations et nous affirmons simplement que les deux sont des *états* (Bruno et Martinón, 1996).

Une même structure peut donner lieu à divers types de problèmes en fonction de la position de l'inconnue. Par exemple, la structure $e_i + v = e_f$ donne lieu à trois problèmes :

$e_i + v = e_f$, problème à *inconnue 1* (I1), les données sont e_i et v, l'inconnue est e_f
$e_f - v = e_i$, problème à *inconnue 2* (I2), les données sont e_f et v, l'inconnue est e_i
$e_f - e_i = v$, problème à *inconnue 3* (I3), les données sont e_i et e_f ,l'inconnue est v.

Chacun de ces trois types de problèmes figuraient parmi les 14 problèmes qui ont été donnés à résoudre aux élèves. Nous donnons ici quelques exemples des énoncés de ces problèmes, en indiquant dans chaque cas la structure et la position de l'inconnue. D'autres exemples figurent dans les entretiens que nous exposons plus loin.

Problème 1. $e_1 + e_2 = e_t$ (état 1 + état 2 = état total), I1.
Si une personne a 8 pesetas et doit 11 pesetas, quelle est sa situation financière ?

Problème 2. $e_i + v = e_f$ (état initial + variation = état final), I1.
Un camion se trouve au kilomètre 12 à gauche du zéro et il se déplace de 7 kilomètres vers la droite. Où se trouve-t-il lorsqu'il termine son trajet ?

Problème 3. $e_1 + c = e_2$ (état 1 + comparaison = état 2), I2.
La température à Londres est de 5 degrés au-dessus de zéro et à Moscou elle est de 8 degrés en dessous de zéro. Que doit-il se produire pour que la température de Londres soit la même qu'à Moscou ?

Problème 4. $v_1 + v_2 = v_t$ (variation 1 + variation 2 = variation total), I2.
Un poulpe se reposait sur un rocher, puis après avoir fait deux mouvements suivis, il s'est retrouvé à 6 mètres en dessous du rocher. S'il est descendu de 13 mètres avec le premier mouvement, de combien est-il descendu avec le second ?

Problème 5. $e_i + v = e_f$ (état initial + variation = état final), I3.
Une personne a vécu 15 ans et elle est décédée en l'an 3 avant J.C. En quelle année est-elle née ?

Problème 6. $e_i + v = e_f$ (état initial + variation = état final), I3.
Un immeuble de 25 étages a 5 sous-sols. L'ascenseur de l'immeuble a descendu 8 étages puis il s'est arrêté au 4ème sous-sol. Où se trouvait l'ascenseur avant de descendre ?

IV. Principaux résultats

Dans cette partie, nous avons rassemblé les principales conclusions obtenues sur les transferts entre dimensions mais nous commenterons également d'autres conclusions dans la partie suivante.

IV.1. Asymétrie des transferts

Ainsi que nous avons déjà indiqué, chacun des six transferts entre les dimensions a été l'objet d'une recherche à partir des 18 à 20 situations problématiques qui étaient à résoudre par les élèves. Sur le tableau III, nous indiquons les pourcentages de réussite dans chaque transfert. Voici les abréviations qui ont été utilisées :

D A : de la droite à l'abstrait **C D** : du contextuel à la droite **C A** : du contextuel au abstrait
A D : de l'abstrait à la droite **D C** : de la droite au contextuel **A C** : du abstrait au contextuel
Le **d** représente la différence de pourcentages entre deux transferts.

Tableau III. Pourcentages de réussites dans les transferts

	DA	AD	d		DC	CD	d		CA	AC	d
E1	6	6	0		50	44	6		55	31	24
E2	18	6	12		30	40	-10		42	31	11
E3	25	29	-4		85	72	13		55	31	24
E4	37	25	12		45	55	-10		47	43	4
E5	50	44	6		85	90	-5		80	61	19
E6	75	68	7		85	75	10		63	43	20
E7	50	44	6		90	89	1		55	37	18
E8	56	43	13		75	95	-20		77	62	15
E9	84	82	2		100	100	0		95	72	23
E10	81	83	-2		100	95	5		62	62	32
E11	93	87	6		95	100	-5		83	77	6

Les transferts entre la droite et l'abstrait (DA et AD) obtiennent des pourcentages similaires, les différences n'étant pas très importantes. Pour 9 des 11 élèves, le pourcentage du transfert DA est supérieur ou coïncide avec celui du AD et pour les deux élèves qui restent la différence est insignifiante.

Les transferts entre la dimension contextuelle et celle de la droite (CD et DC) ne présentent pas de majeures différences parmi les pourcentages de réussite. Cependant, 5 élèves ont trouvé le transfert CD plus facile que le transfert DC, pour 5 autres élèves, il se produit justement le contraire : un élève a atteint 100% de réussite dans les deux types de transferts.

Il apparait par contre une asymétrie importante pour ce qui est des transferts entre la dimension contextuelle à la dimension abstraite. Pour tous les élèves, *il s'est avéré plus difficile de passer de la dimension abstraite à la dimension contextuelle* (AC), que de passer de la dimension contextuelle à l'abstraite (CA). Ceci veut dire qu'il est plus difficile pour les élèves de donner un sens concret à une opération plutôt que le contraire, c'est-à-dire, de chercher une opération à partir d'une situation donnée.

Voyons à présent, un exemple de cela à partir d'un problème concret. Face à un problème additif, l'élève E10 a donné une opération correcte avec des nombres négatifs. Cependant, il n'a pas été capable d'expliquer ou de donner un sens à l'opération qui résout le problème, malgré le fait qu'il ait lui même donné l'opération.

E. *Un immeuble de 25 étages a 5 sous-sols. L'ascenseur de l'immeuble a descendu 8 étages puis il s'est arrêté au 4ème sous-sol. Où se trouvait l'ascenseur avant de descendre ?*

E10. -4 - (-8) = 4.
Je mets -4 parce qu'il est arrêté au 4ème sous-sol, et j'ai mis -(-8).

E. *Comment représentes-tu qu'il a "descendu 8" ?*

E10. Avec -8.

E. *Que veut dire l'autre "-" ?*

E10. Je ne sais pas,... c'est pour le trouver. Le résultat est bon.

E. *Mais à quoi as-tu pensé ?*

E10. Je pensais au résultat, je savais que j'allais obtenir 4.

E. *Comment savais-tu que tu allais obtenir 4 ?*

E10. S'il s'est arrêté au -4 et qu'il a descendu 8, ..., c'est qu'il se trouvait peut-être au 0 et s'il descendait 4 il se trouverait au -4, mais comme il a descendu 8, au lieu de 4 ce serait "4 plus 4" qui font 8, ce qu'il a descendu. Donc il se trouvait au 4ème. Mais je ne sais pas quelle est l'opération.

Cet exemple nous montre un élève qui a une image correcte du problème, cette image peut-être réaliste (d'ailleurs certains élèves avouent imaginer l'ascenseur de chez eux) ou bien plus abstraite, sur une droite. Ainsi donc, il connaît la bonne solution. Il sait également poser une opération correcte et en rapport avec l'énoncé du problème, parce que sa maîtrise des règles opératoires le lui permet. Cependant, il n'arrive pas à comprendre pourquoi il faut utiliser ici la soustraction. Il n'arrive pas à associer l'idée de la différence de deux quantités avec ce problème. Dans ce cas présent, ce n'est pas le problème qui donne un sens aux règles opératoires avec des nombres négatifs. Au contraire, le maîtrise des règles opératoires conduit à une opération correcte, mais pas de façon significative.

IV.2. Difficulté des transferts

De toute évidence, tous les élèves n'ont pas la même facilité pour établir des relations entre les dimensions. Il existe une grande diversité entre les élèves, ce qui est naturel et est étroitement lié au niveau des élèves. Par exemple, pour ce qui est du transfert DA, l'élève E1 a obtenu 6% de réussite et l'élève E11 a obtenu 93%.

Si l'on consulte à nouveau le tableau III, on peut voir, que les transferts les plus faciles à établir, pour pratiquement tous les élèves, sont les transferts CD et DC, bien qu'on obtienne différents taux de pourcentages (de 30% à 100%). Les plus difficiles à établir sont les transferts AD, DA et AC. Ainsi, les résultats des transferts DA et AD sont toujours inférieurs à ceux des transferts CD et DC, pour tous les élèves. La difficulté pour mettre en rapport la dimension abstraite avec celle de la droite est surtout visible chez les élèves dont le niveau est bas ou moyen-bas.

D'autre part, dans les transferts CA nous trouvons les comportements les plus variables. Alors que pour certains élèves ces transferts ont le même degré de difficulté que les transferts CD et DC, pour d'autres cela représente une difficulté considérable. Tous ces résultats peuvent s'expliquer d'une autre façon, à savoir :

- *pour tous les élèves, il est plus facile d'arriver à la représentation sur la droite à partir du contextuel plutôt qu'à partir de l'abstrait.*
- *pour tous les élèves, il est plus facile d'arriver au contextuel à partir de la droite plutôt qu'à partir de l'abstrait.*
- *pour presque tous les élèves* (à l'exception des élèves E3 et E10), *il est plus facile d'arriver à l'abstrait à partir du contextuel plutôt qu'à partir de la droite.*

Ainsi, cela nous indique que pour les élèves, la représentation sur la droite de situations concrètes est plus claire que la traduction de ces situations dans un langage abstrait, ce qui pourrait se justifier par le parallélisme existant entre les contextes réels et la représentation sur la droite comme par exemple, dans les cas de l'*altitude*, la *température*, l'*ascenseur* et la *route*.

Les difficultés pour représenter sur la droite l'addition et la soustraction avec des nombres positifs ont été signalées dans les travaux de Carr et Katterns (1984) et avec des nombres négatifs dans les travaux de Küchemann (1981) et de Liebeck (1990). Cependant, nos résultats indiquent la facilité avec laquelle les élèves réalisent les transferts des contextes à la droite ; ce qui montre que les situations concrètes peuvent constituer un pont entre la dimension de la droite et la dimension abstraite. Autrement dit, en utilisant la droite, l'enseignement des nombres négatifs peut obtenir de meilleurs résultats s'il s'appuie sur des situations contextuelles, qui apportent un sens aussi bien aux opérations qu'à la représentation sur la droite.

V. Observations sur les transferts

Dans cette partie, nous apportons des exemples de quelques raisonnements fait par les élèves lorsqu'ils ont transféré des connaissances d'une dimension à l'autre. Nous exposons à l'occasion les comportements les plus fréquents, et nous donnons également des exemples de raisonnement peu fréquents, mais qui dénotent les difficultés concrètes des élèves lorsqu'ils réalisent les transferts. De plus, ces exemples nous donneront la possibilité d'apporter d'autres conclusions et de nouveaux résultats.

V.1. Distinction entre états et variations

Dans les activités où les élèves devaient représenter des situations concrètes sur la droite (transfert du contextuel à la droite), en prenant des exemples tels que :
le plongeur est à 7,5 mètres sous le niveau de la mer,
la température a baissé de 6 degrés,
j'ai perdu 7 pesetas, il a vécu 6 ans,

on s'aperçoit que, en général, les élèves différencient les états et les variations, en les représentant par des points et des flèches respectivement. Les élèves qui ne les distinguent pas sont des élèves du niveau bas et moyen-bas (E1, E2 et E4). À ce propos, il est nécessaire de spécifier que les élèves avaient reçu un enseignement sur les nombres négatifs qui leur permettait d'utiliser librement n'importe laquelle de ces deux représentations.

Pour représenter des variations, certains élèves ont besoin d'un point de départ ou d'une position initiale. Nous voulons attirer l'atention sur le fait que cette nécessité est progressive selon le niveau de l'élève. Ainsi, les élèves E1, E2, E3, E4 et E7, étant presque tous d'un niveau bas et moyen-bas, représentent les variations en prenant comme position initiale 0. Quant aux élèves E5, E6 et E8, étant d'un niveau moyen et moyen-élevé, représentent l'état initial en partant de n'importe quel point. Enfin, les élèves du niveau élevé, E9, E10 et E11, n'ont pas besoin de représenter le point de départ.

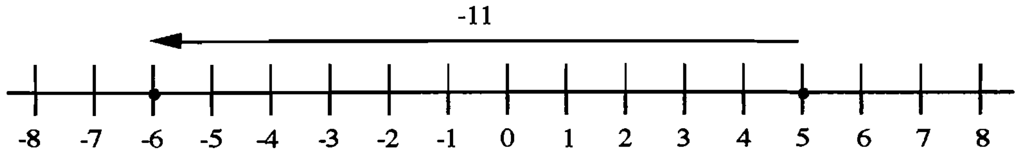
V.2. Difficultés avec le contexte "chronologie"

Nous avons analysé la capacité des élèves à identifier une situation concrète avec un nombre positif ou négatif (transfert du contextuel à l'abstrait). Cela n'a présenté aucun problème pour eux si ce n'est pour les situations dans le contexte chronologie. Ainsi, par exemple, on interprète l'âge de quelqu'un comme étant négatif parce qu'il est né "avant J.C.". Ainsi que nous l'avons déjà indiqué dans un autre travail (Bruno et Martinón 1994a), nous pensons que dans le vocabulaire lié à la chronologie, les mots ne désignent pas "le positif" et "le négatif" aussi clairement que dans d'autres contextes, tels que la température ou l'altitude.

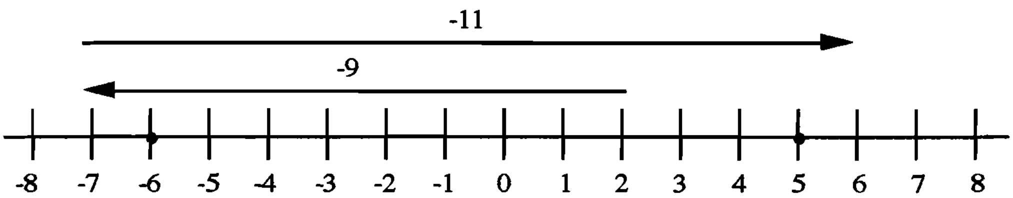
V.3. Types de structures et de contextes choisis par les élèves

Dans certaines activités les élèves devaient inventer une situation à partir d'une représentation sur la droite (transfert de la droite au contextuel). Par exemple :

a.



b.



Pour ce qui est de la question a), il n'y a aucune difficulté pour les élèves qui donnent pour la plupart des exemples ayant pour structure $e_i + v = e_f$, bien qu'ils donnent aussi des exemples qui ont des structures du type $v_1 + v_2 = v_t$, $e_f - e_i = v$, $e_1 + e_2 = e_t$, tout en employant les contextes *devoir-avoir, ascenseur* et *température.*

Pour la question b), les élèves reconnaissent cette représentation comme un ensemble de deux variations. Les difficultés apparaissent au moment d'interpréter le résultat car les élèves ont du mal à voir la variation totale et ils ont tendance à donner un état final. Seuls les élèves du niveau élevé et moyen élevé donnent une variation du type : "il se trouve à 4 plus haut qu'au départ". Le reste des élèves fixent un état initial, sur le 0 ou sur un autre point, et ils donnent comme résultat l'état final, utilisant par conséquent une structure du type : $e_i + v_1 + v_2 = e_f$. Ou bien, ils donnent un exemple avec la structure $v_1 + v_2 = v_t$, mais ils n'interprètent pas correctement le résultat. Ici encore, ils utilisent divers contextes : *devoir-avoir, altitude* et *ascenseur.*

Dans les travaux de Bell (1986) et Conne (1985) sur les problèmes de structures $v_1 + v_2 = v_t$, avec des nombres négatifs, on s'est aperçu que les élèves avaient des difficultés à manipuler les combinaisons de changements lorsqu'ils ne connaissaient pas le point de départ.

Dans d'autres problèmes, nous avons aussi demandé aux élèves de nous donner des situations concrètes qui pourraient se résoudre avec des opérations telles que -4+10 ou 5-10 (transfert de l'abstrait au contextuel). Cet exercice n'a posé aucun problème aux élèves qui n'ont utilisé que des structures du type $e_1 + e_2 = e_t$ et $e_i + v = e_f$, mais toujours dans le contexte *devoir-avoir.*

En résumé, lorsque les élèves inventent des situations à partir d'une représentation sur la droite, ils utilisent des contextes et des structures qu'ils n'emploieraient pas si la position de départ était une opération.

V.4. Représentation isolée des nombres

Lorsqu'on leur demande de représenter des situations plus complexes, telles que les problèmes additifs dans lesquels sont impliqués trois nombres (transfert du contextuel à la droite), l'erreur la plus fréquente, que nous avions par ailleurs déjà pu observer lors des épreuves écrites (Bruno et Martinón, 1994b), est de représenter les nombres qui apparaissent dans l'énoncé du problème par des points, de manière isolée, sans aucun lien entre eux. Cette erreur a également été signalée dans les travaux de Carr et Katterns (1984) avec des nombres positifs. Dans l'exemple qui suit, on peut observer cette difficulté dans la représentation de la situation et qui est liée à la localisation incorrecte des nombres décimaux sur la droite.

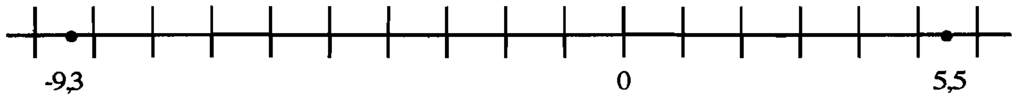
E . *La température à Madrid est de 5,5 degrés au dessus de zéro, à Paris il fait 9,3 degrés de moins qu'à Madrid. Quelle est la température à Paris ?*

E1. $+5{,}5 - 9{,}3 = -3{,}8$

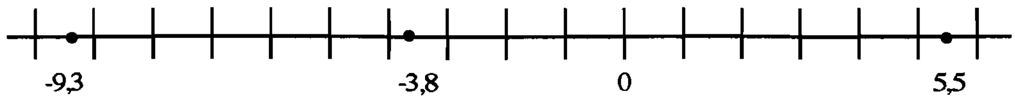
$$\begin{array}{r} 9{,}3 \\ -\ 5{,}5 \\ \hline 3{,}8 \end{array}$$

La température à Madrid est de 5,5 au dessus de zéro ce qui est positif, et à Paris il fait 9,3 degrés de moins, ainsi il y a un moins. Il faudrait soustraire et mettre le signe du plus fort, ce qui ferait -3,8, c'est la température qu'il fait à Paris.

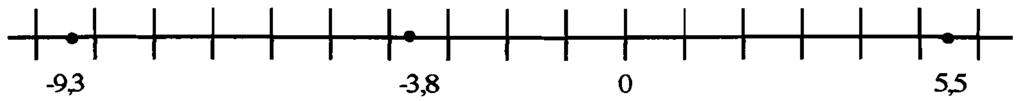
E. *Est.ce-que tu peux le représenter sur la droite ?*
E1.



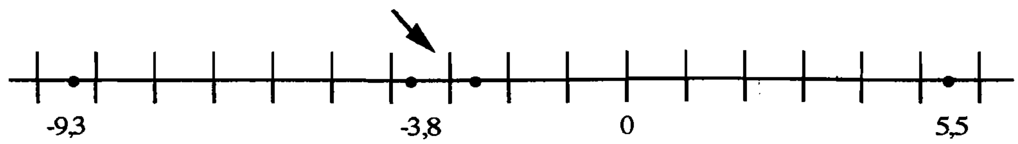
On soustrait et il reste.



E. *Quelle est la température à Madrid ?*
E1. Ici (il signale le 5,5 sur la droite). et ensuite à Paris 9,3 de moins (il compte à nouveau 9,3 à partir du 5,5, il se trompe et il signale un point proche de 3,8).

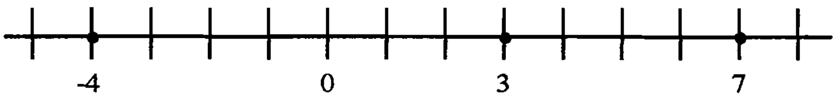


E. *Quelle serait la température à Paris ?*
E1. Celle-ci (il signale le -9,3).
E. *Et le -3,8 ?*
E1. Ici (il signale le -3,8)
Il ferait -3,8 de moins qu'à Madrid.
E. *La température ne coïncide pas avec le lieu où tu as terminé de compter ?*
E1. Non, parce que ce trait les sépare.

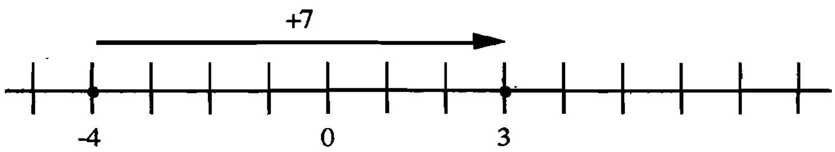


L'élève représente tout d'abord les nombres figurants dans le problème de façon isolée les uns par rapport aux autres, sans se baser sur la situation. Ensuite, il essaie d'expliquer le problème sur la droite, il démontre qu'il l'a compris mais il commet une erreur de dénombrement sur la droite, erreur due probablement au fait qu'il s'agit de nombres décimaux, ce qui le conduit à donner de fausses explications sur ce qu'il a fait.

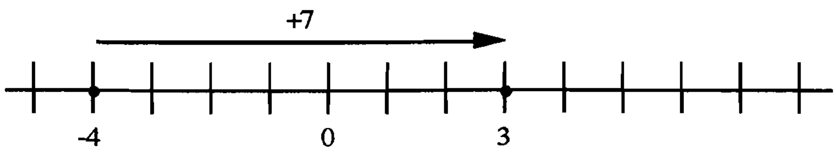
Dans d'autres activités, les élèves devaient faire la représentation d'une opération donnée du type -4+7 ou 5-12 sur la droite, (transfert de l'abstrait à la droite). Les élèves de niveau bas et moyen-bas ont rencontré bon nombre de difficultés. L'erreur qu'ils commettaient était la même que lorsque la position de départ était la dimension contextuelle, c'est-à-dire, l'erreur de représenter les nombres isolés sur la droite.



Le reste des élèves, ceux qui ont fait une bonne représentation, on fait des représentations du type :



et aussi



C'est à dire, qu'ils ont identifié le signe de l'opération avec le signe d'un des nombres.

V.5. Difficultés des problèmes à inconnue 2 et 3

En ce qui concerne le fait de poser une opération à partir d'un problème additif (transfert du contextuel à l'abstrait), le plus important est la différence de la difficulté entre les problèmes à inconnue 1 et ceux à inconnue 2 et 3. Les élèves trouvent facilement l'opération pour les problèmes à inconnue 1, mais pour les problèmes à inconnue 2 ou 3 c'est plus complexe. La raison en est que pour ces derniers, qu'il faut poser une soustraction qui exprime une différence et cela est assez compliqué pour les élèves. La connaissance qu'ils ont des nombres positifs fait qu'ils associent la soustraction à l'idée *d'enlever* et dans une moindre mesure seulement à l'idée de *différence entre deux nombres.* Ils transposent cette façon de penser aux problèmes avec des nombres négatifs, c'est pourquoi ils ont du mal à comprendre les opérations dans lesquelles la soustraction soit la différence de deux quantités et ils ont tendance à ignorer le signe "-" de la différence, qu'ils identifient alors au nombre. Par exemple, dans le problème 8, il apparaît une différence entre l'état final et l'état initial, -7 - (-15). Certains élèves écrivent -15 - 7, en ignorant le "-" de la différence et en associant le "-" de la soustraction à celui qui est exprimé par le 7 avant J.C. Les élèves E1, E2 (niveau bas), E4 (niveau moyen-bas), E6 et E7 (niveau moyen) commettent cette erreur dans presque tous les problèmes à inconnue 2 et 3. C'est à dire, qu'ils écrivent les nombres qui figurent dans l'énoncé du problème, dans l'ordre de leur apparition, et l'opération est alors déterminée par le nombre du second nombre. Ainsi, ils agissent de la même manière que dans les problèmes à inconnue 1, mais cette fois-ci, cela les conduit à une mauvaise solution. Voyons un exemple.

E . *Une persone est né en l'an 15 avant J.C. et elle est morte en l'an 7 avant J.C. Combien d'années a t-elle vécu ?*

E1. -15 - 7 = -22 15 7 22	Elle est née en l'an 15 avant J.C., ce qui est négatif, et elle est morte en l'an 7 avant J.C., ce qui est négatif. Etant donné que moins et moins s'additionnent, et l'on met le signe du plus grand. Combien d'années a-t-elle vécu ?....elle a vécu 22 ans.

E . *Et peut-on exprimer les années vécues de façon négative ?*
E1. Oui, parce qu'elle a vécu dans le passé, c'est -22.
E . *Qu'est-ce-que ça veut dire qu'une personne ait vécu -22 ans ?*
E1. Qu'étant donné qu'elle est morte ça fait -22.

A noter que dans ce cas il s'agit, en plus de la façon de poser l'opération décrite antérieurement, d'une règle de calcul confuse et d'une justification erronée du résultat négatif.

VI. Conclusion

Peled (1991) conçoit deux dimensions dans l'apprentissage des nombres négatifs : la dimension quantitative et la dimension de droite. L'expérience acquise en classe et l'analyse des résultats obtenus lors d'une expérimentation, nous ont mené à diviser la dimension quantitative de Peled en deux : la dimension abstraite et la dimension contextuelle. Ainsi, nous envisageons trois dimensions différentes des nombres : la dimension de droite, abstraite et contextuelle.

La recherche que nous avons présentée dans cet article se base principalement sur les transferts qui se produisent entre les trois dimensions lorsque l'élève s'initie à l'apprentissage des nombres négatifs. Naturellement, la façon dont se produit cet apprentissage influe sur la capacité de transférer des situations numériques d'une dimension à l'autre. Les élèves qui ont fait partie de l'expérimentation, ont effectué de nombreuses activités de transferts. Par exemple, pour une situation donnée sur la droite, les élèves devaient trouver la situation abstraite correspondante et inventer une situation contextuelle.

En général, il n'y a pas de symétrie entre les transferts. De façon plus concrète, le transfert entre l'abstrait et le contextuel a posé plus de difficultés aux élèves que celui du contextuel à l'abstrait, et ce, surtout pour les élèves du niveau bas.

Pour arriver à faire correctement le transfert d'une situation numérique se trouvant dans une dimension précise, à une autre dimension, cela dépend bien sûr du type de situation, mais aussi des dimensions entre lesquelles ont veut réaliser le transfert.

Les situations numériques simples (telles que "*la température est de moins 2 degrés*") sont transférées facilement par tous les élèves, et de ce fait les trois dimensions sont bien mises en rapport. Il en est autrement pour les situations plus complexes, ainsi que nous avons pu le voir dans la résolution des problèmes additifs. Dans les problèmes que nous avons désignés à inconnue 1, les trois dimensions sont bien mises en rapport, mais pour les problèmes à inconnue 2 et 3 il y a d'énormes difficultés pour mettre en rapport les dimensions abstraite et de droite. Il est nécessaire de faire une étude plus approfondie de ces problèmes, pour analyser de façon détaillée les difficultés qui apparaissent et les stratégies de résolution. Mais, cela fera l'objet d'un prochain travail.

Ainsi que nous avons déjà fait remarquer, tout dépend des dimensions que l'on choisit pour l'analyse du transfert. En règle générale, nous avons pu observer qu'il est plus facile de faire le transfert

de la droite au contexttuel que de l'abstrait au contextuel,
du contextuel à la droite, que de l'abstrait à la droite,
du contextuel à l'abstrait, que de la droite à l'abstrait.

Ceci nous permet de conclure que les situations mises en contexte favorisent l'apprentissage.

Une des principales controverses sur l'apprentissage des nombres concerne le rôle de la droite. Certains auteurs ont signalé qu'il existe des difficultés pour représenter l'addition et la soustraction, aussi bien avec des nombres positifs (Ernest, 1985 ; Carr et Katterns, 1984), qu'avec des nombres négatifs (Küchemann, 1981 ; Liebeck, 1990). Küchemann a affirmé qu'on doit abandonner la droite comme modèle pour l'enseignement de la soustraction avec des nombres négatifs. Nos résultats montrent qu'il existe des difficultés, mais ils signalent aussi qu'il est plus facile d'initier l'apprentissage de la représentation sur la droite avec des situations mises en contexte, probablement à l'aide de contextes qui aient de façon naturelle une représentation rectiligne, tels que la *route* et l'*ascenseur*. La discussion ne doit pas se limiter au dilemme droite ou pas droite, elle doit plutôt se centrer sur les différentes façons d'introduire son apprentissage et sur l'utilisation qu'on peut en faire.

Nous avons déjà dit que l'identification des nombres réels avec la droite constitue l'une des idées fondamentales des mathématiques. La présence de la droite dans l'apprentissage des nombres, dès le départ avec l'introduction des nombres naturels, nous paraît nécessaire pour un apprentissage correct du domaine conceptuel des nombres. Notre conclusion est que la représentation de la droite doit s'initier avec des situations numériques mises en contexte, laissant de côté pour une phase ultérieure la représentation des situations numériques abstraites.

Références

BELL A. (1986). Enseñanza por diagnóstico. Algunos problemas sobre números enteros. *Enseñanza de las Ciencias,* 4 (3) 199-208.

BRUNO A. & y MARTINÓN A. (1994a). Contextos y estructuras en el aprendizaje de los números, negativos. *Suma,* 16, 9-18.

BRUNO A. y MARTINÓN, A. (1994b). La recta en el aprendizaje de los números negativos. *Suma,* 18,39-48.

BRUNO A. & MARTINÓN A. (1996). Problèmes additifs (1) : d'états. *Math-Ecole,* 171, 17-20. Problèmes additifs (2) : de variations, *Math-Ecole,* 172, (à paraître). Problèmes additifs (3) : de compapaisons, *Math-Ecole,* 173 (à paraître).

CARR K. and KATTERNS B. (1984). Does the number line help ?. *Mathematics in School,* 13, 4, 30-34.

CONNE F. (1985). Calculs numériques et calculs relationnels dans la resolution de problémes d'arithmetique. *Recherches en Didactique des Mathématiques,* 3, 269-332.

ERNEST P. (1985). The number line as a teaching aid. *Educational Studies in Mathematics,* 16, 411-424.

GLAESER G. (1981). Epistémologie des nombres relatifs. *Recherches en Didactique des Mathématiques,* 2, 3, 303-346.

GREENO J.G. (1991). Number sense as situated knowing in a conceptual domain. *Journal for Research in Mathematics Education,* 22, 3, 170-218.

JANVIER C. (1983). The understanding of Directed Numbers. *Proceedings of the XV Annual Conference of the North American Chapter of the International Group for the Psychology of Mathematicas Education,* Montreal, 295-301.

JANVIER C. (1987). Translation processes in mathematics education. In Janvier (ed.) *Problems of representation in the teaching and learning of mathematics.* Lawrence Erlbaum Associates. London.

KÜCHEMANN D. (1981). Positive and negative numbers. In Hart K. (ed). *Children's Understanding of Mathematics : 11-16.* John Murray, London.

LIEBECK P. (1990). An intuitive model for integer arithmetic. *Educational Studies in Mathematics,* 21, 221-239.

PELED I. (1991). Levels of knowledge about signed numbers : effects of age and ability. *Proceedings of the XV Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education.* Assisi, Italy, 3, 145-152.

VERGNAUD G. & DURAND C. (1976). Structures additives et complexité psychogénétique. *La revue française de pedagogie,* 36, 28-43.

VERGNAUD G. (1982). A classification of Cognitive Tasks and Operation of Thought Involved in Addition and Subtraction Problems. In Carpenter T., Moser J. and Romberg T. (eds), *Addition and Subtraction : A cognitive perspective. Lawrence Erlbaum Associates,* Publishers.

VERGNAUD G. (1990). La théorie des champs conceptuels. *Recherches en Didactique des Mathématiques,* 10, 2.3, 133-170.