ACTIVITÉS DE REPRÉSENTATION ET DE MODÉLISATION DANS UNE APPROCHE EXPLORATOIRE DE LA MATHÉMATIQUE ET DES SCIENCES[1]

TROISIÈME PARTIE

LES ACTIVITÉS DE MODÉLISATION DANS LE DISCRET ; CONCLUSIONS GÉNÉRALES ET ENJEUX PÉDAGOGIQUES

C. BEGUIN[2], S. BITTON[3], M. DENZLER[2],
J.-L. GURTNER[4], O. DE MARCELLUS[3], A. TRYPHON[5] et B. VITALE[6]

Sommaire

Nous présentons ici les résultats d'une approche exploratoire à l'enseignement interdisciplinaire de la mathématique et des sciences. Cette approche est fondée sur une analyse détaillée des activités de représentation et de modélisation développées par les élèves - dans le contexte de l'enseignement secondaire obligatoire dans le canton de Genève - avec, à un certain point de leur travail, le recours à l'informatique.

Dans les deux parties précédentes, nous avons présenté les aspects généraux et le contexte pédagogique de notre projet et nous avons analysé en détail le rôle des activités de *représentation* (Béguin et al, 1995) et de *modélisation dans le continu*

[1] Cette recherche a été partiellement financée par le Fonds national suisse de la recherche scientifique (FNRS), contrat de recherche n°.11-30259.90, et par l'Office suisse de l'éducation et de la science (OFES) ; elle s'inscrit dans le cadre des activités de recherche du Centre de recherches psychopédagogiques (CRPP) du canton de Genève. Pour toute correspondance avec les auteurs : c/o Bruno Vitale, 27 rue des Gares, 1201 Genève, Suisse.

[2] Enseignants de mathématique et de sciences, Département de l'instruction publique (DIP), canton de Genève.

[3] CRPP, DIP, Genève.

[4] Institut de pédagogie, Université de Fribourg.

[5] FNRS.

[6] En congé de recherche de l'Institut de physique théorique, Université de Naples, au Laboratoire de didactique et d'épistémologie des sciences (LDES), Faculté de psychologie et des sciences de l'éducation (FPSE), Université de Genève ; collaborateur du CRPP.

(Béguin et al, 1996) des élèves. Dans ce troisième article, nous étendrons cette analyse aux activités de *modélisation dans le discret.* Nous présenterons ensuite nos *conclusions générales* et nous analyserons les *possibilités de généralisation* et les *enjeux pédagogiques* de notre approche[1].

VI. La modélisation dans le discret

> "De l'avis de certains philosophes, il faut nécessairement que le mouvement de corps d'une grandeur aussi considérable (que celle des astres) produise un son ... S'appuyant sur ces raisonnements et sur ce que les vitesses, dépendant des distances, possèdent les proportions des accords musicaux, ils assurent que le son émis par le mouvement circulaire des astres est une harmonie"[2].

Nous entrons maintenant dans un domaine peu étudié et rarement affronté à l'école, celui de la *modélisation dans le discret*, c'est-à-dire de la modélisation de phénomènes où le changement observé dépend d'une ou de plusieurs variables qui ne peuvent prendre que des valeurs discrètes. Dans ces cas, évidemment, la variable d'évolution ne sera plus le *temps*, comme dans la plupart des exemples donnés dans les deux premiers articles ; même s'il s'agit de phénomènes qui se déroulent dans le temps, c'est une variable discrète (par exemple, le *nombre de générations*, dans certains modèles de populations) qui devient pertinente.

En réalité, toutes les modélisations présentées jusqu'à présent - en particulier, dans leur réalisation informatique - sont dans le discret. Le fait de ne pas pouvoir utiliser le calcul différentiel au Cycle d'orientation transforme toutes les *équations différentielles* sous-jacentes à ces modèles en des *équations aux différences finies* (qui utilisent, par exemple, un saucissonement du temps en petites tranches - incréments - Dt). Mais, dans ces cas, on estime que la meilleure approximation du modèle aux données expérimentales pourrait être trouvée avec un Dt le plus petit possible, compatiblement avec le temps de calcul dont on dispose. C'est ce qui fait souvent dire : *le discret est un mauvais continu* [3].

Dans les cas qui seront traités dans ce qui suit, le discret n'est pas un mauvais continu mais un élément essentiel et spécifique du modèle. Nous donnerons un premier exemple (point VI.1. ci-dessous), où la variable d'évolution (distance) est en réalité continue, mais où la manière dans laquelle le phénomène est présenté et exploré ("par échantillonnage") la rend discrète. Cet exemple nous servira de transition vers un autre

---

[1] Par ailleurs, nous avons écrit une *Séquence didactique pour le maître*, relative à notre projet de *construction de l'espace sonore.* Les enseignants intéressés par ce texte peuvent contacter Claude Béguin, 131 Chênaie, 1293 Bellevue (Suisse), tél. (**41 22) 774 24 84.

[2] Aristote : De Caelo, 290b.

[3] Dans beaucoup des exemples discutés dans les deux parties précédentes (modélisation de phénomènes dans le continu) il aurait été très utile d'analyser avec les élèves les changements qu'on observe dans les résultats numériques et dans les temps de calcul quand on change la valeur de Dt.

exemple (point VI.2. ci-dessous), où la variable d'évolution est intrinsèquement discrète.

Cet élément discret dans l'évolution d'un système pourrait être introduit dans bien de cas où le traitement traditionnel est continu (on semble toujours penser que, à la fin, on finira bien par retomber dans des équations différentielles...). Comme exemple, voyons (figure 15) comment un élève - **Thomas** (9ème) - a représenté la chaîne de propagation d'un couple de lapins, en imaginant une description par *générations successives* au lieu de celle, bien plus fréquente chez les élèves de la même classe, qui utilise un diagramme *nombre d'individus* vs *temps.*

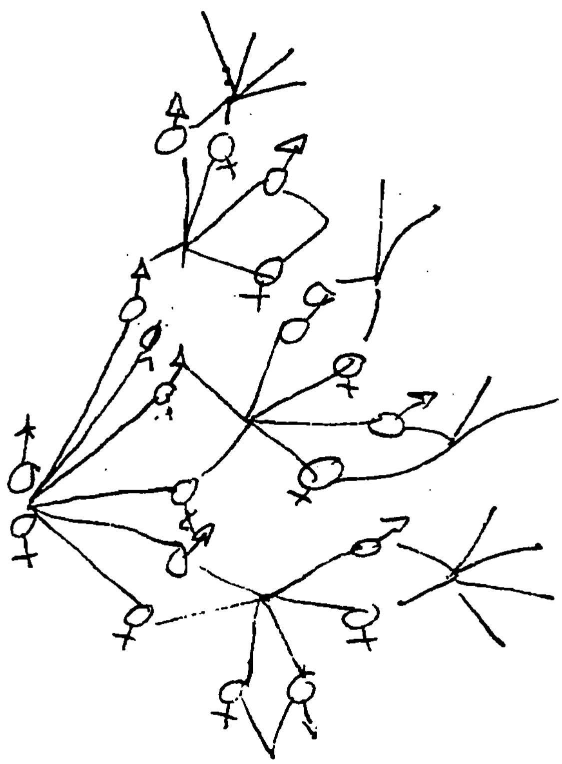

Figure 15 : Evocation, par un élève de 9ème, de l'évolution d'une population imaginaire de lapins

A ce diagramme Thomas a ajouté par écrit ces considérations : "le couple des lapins font six petits 3 mâles et 3 femelles donc 3 couples et si ils font chacun 4 petits cela va augmenté et encore et encore".

On voit comment une stratégie de représentation d'un phénomène évolutif par paliers discrets (dans ce cas, par générations) correspond à une description discrète du mécanisme sous-jacent. Il serait certainement utile d'introduire plus fréquemment dans les activités scolaires cette confrontation entre représentations (et hypothèses de mécanismes) discrètes et continues.

VI.1. La construction de modèles pour des situations empruntées à l'économie

Le domaine de l'économie offre des possibilités intéressantes d'inventorier les capacités de modélisation des élèves dans le discret, la plupart des produits sur le marché ne s'achetant en effet pas par des quantités arbitrairement petites. De plus, les prix pratiqués ne dépendant pas uniquement de la quantité de produit acheté, les modèles à trouver sont nécessairement plus complexes que la simple relation linéaire. A la différence des phénomènes biologiques ou physiques, les situations relevant de l'économie se prêtent cependant mal à une observation directe en classe ; la simulation des phénomènes sur ordinateur permet alors souvent de pallier à cette difficulté.

La situation que nous analyserons ici est une simplification du tarif de transport pratiqué par les entreprises de taxis. De telles situations sont intéressantes à étudier avec les élèves car la présence d'une taxe de prise en charge et de 2 zones tarifaires, l'une urbaine, l'autre pour les longues distances, est contraire tant au schème intuitif de *linéarité* (ou de *proportionnalité*) qu'à celui du prix dégressif des produits à mesure que la quantité achetée augmente. Une simulation simple, réalisée en Hypercard, permet aux élèves d'investiguer le phénomène, en interrogeant d'avance le système sur le prix à payer pour un nombre limité de distances à parcourir (voir, pour les détails de l'expérience, Gurtner et al, 1993)[4]. La figure 16 reproduit le contenu de l'écran de l'ordinateur tel qu'il se présente aux élèves.

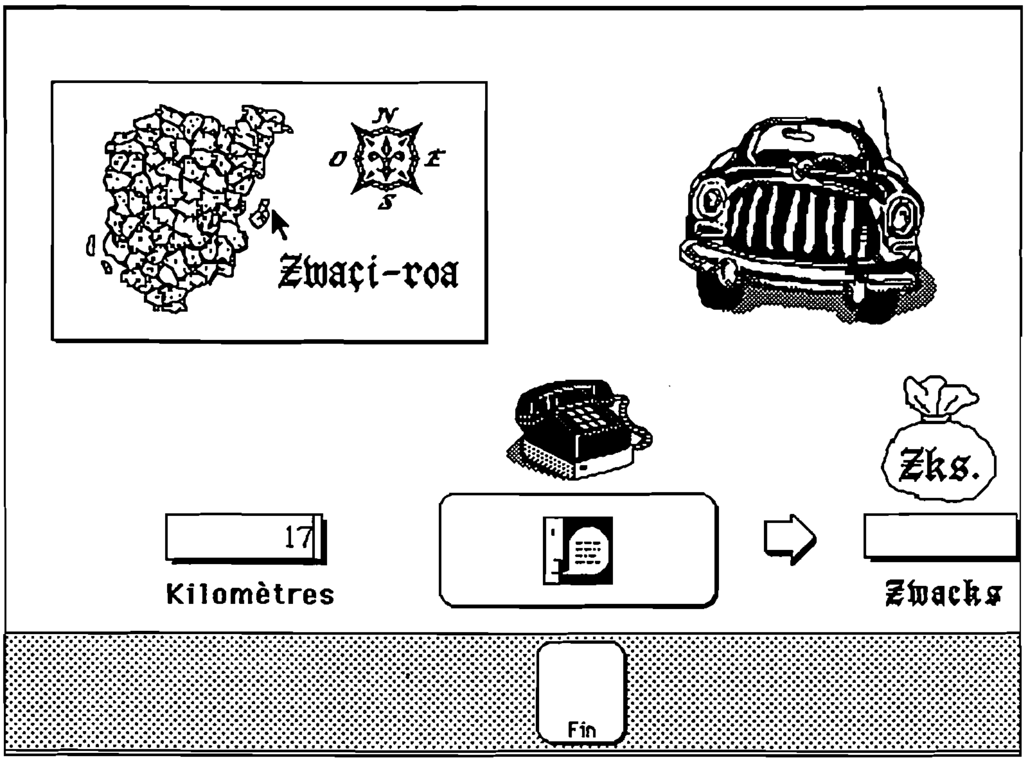

Figure 16 : L'écran de l'ordinateur, tel qu'il apparaît aux élèves dans la situation de modélisation des tarifs pratiqués par les taxis sur une île imaginaire

[4] On peut se procurer une copie du programme auprès de Jean-Luc Gurtner, Institut de Pédagogie, Université de Fribourg, Rue Faucigny 2, 1700 Fribourg.

Les élèves travaillent par paires. Ils ont à leur disposition une calculatrice de poche, une règles, des crayons, et deux blocs de papier, l'un quadrillé, l'autre millimétré. Le nombre d'explorations autorisées est limité à 8, mais les élèves sont informés qu'ils ne sont pas obligés d'aller jusqu'à cette limite. Leur tâche consiste à se mettre en mesure, grâce aux questions qu'ils vont poser, de pouvoir prédire le prix demandé pour n'importe quelle longueur de course. Une vague indication d'échelle leur est fournie, en prétendant que l'ensemble de la situation se déroule sur une île lointaine dont la taille est approximativement égale à celle de la Suisse romande.

A titre expérimental, nous avons proposé cette situation à des élèves de 13 à 17 ans (degrés 7 à 11 de leur scolarité). Malgré des différences importantes dans les stratégies de recherche déployées, on voit apparaître à tout âge à peu près la même succession de modèles de la situation présentée. Pour unifier la présentation, nous avons choisi de ne citer ici que des extraits de protocoles d'élèves de degré 9.

Presque tous les élèves abordent la situation avec l'impression qu'elle doit se conformer à un modèle global très simple de proportionnalité. Sous sa forme la plus élémentaire, ce modèle conduit certains élèves à ne poser qu'une seule question, afin de dégager **le** prix du kilomètre. Voici des exemples de protocoles d'élèves :

"*pour trouver - on prend 1 km - puis après il faut multiplier*".

Après la deuxième question déjà, ce premier modèle n'apparaît visiblement plus adapté ; la présence d'une taxe de base amène généralement les élèves à penser que les grandes distances sont moins chères que les petites :

"*c'est le début qui coûte - il faut faire de grandes distances si on veut que ça soit moins cher*".

Si quelques élèves de 11ème envisagent alors une évolution non linéaire du phénomène ("*plus tu as de km - moins ça augmente*"), la plupart des élèves continuent à croire à une évolution linéaire et se tournent vers une analyse locale du phénomène, à la recherche cette fois d'une constance locale de l'incrément. Cet incrément trouvé, généralement en posant la question pour deux distances consécutives, on les voit alors souvent essayer de déterminer la valeur de la taxe initiale, en soustrayant l'incrément de la valeur déjà connue de l'unité ou, plus rarement, en assimilant simplement la valeur de cette taxe au prix à payer pour l'unité. Il est intéressant de noter que seuls quelques élèves testent directement la valeur correspondant à la distance 0, la plupart des élèves acceptant spontanément l'idée que pour une distance nulle le prix ne peut être que nul.

La découverte du modèle local apparaît alors pour beaucoup comme la réponse au problème posé. En l'absence d'une remise en question par l'enseignant, les informations non conformes éventuellement obtenues à l'autre bout du champ d'exploration seront généralement perçues comme des valeurs tombant au delà de la limite de validité du modèle :

"*ça devient plus cher à partir de 50 (km)*".

Dans la très grande majorité des cas, les choix ultérieurs viseront alors à déterminer le domaine de validité du modèle local proposé, c'est-à-dire à rechercher jusqu'où le modèle local demeure applicable, plutôt qu'à fournir l'information nécessaire à comprendre ce qui se passe au-delà des premières informations non compatibles avec celui-ci :

"il faudrait trouver le bon..." - 'le bon quoi ?' - "pour découvrir à combien de km le prix monte... - parce que maintenant on sait que jusqu'à... - on sait pas combien de km il y a - 12 de taxe et 0.25, mais jusqu'à quand ?"

Lorsqu'on pousse les élèves à proposer une explication pour la non compatibilité de certaines informations reçues avec le modèle local, on peut avoir comme réponse :

"à partir d'un certain nombre de km - il faut rajouter....".
"à un certain nombre de km - ils élèvent la taxe de base".

On le voit, les premières idées que les élèves tendent à invoquer pour expliquer la différence entre les informations reçues et les valeurs prévues par leur modèle correspondent toutes à des modifications, initiales ou locales, du terme constant de l'équation. Même ceux qui, par calcul, parviennent à dégager la valeur de l'incrément pour la seconde zone tarifaire, acceptent avec beaucoup de difficultés, la présence de deux tarifs kilométriques différents :

"on arrive à 0.4 avec certains chiffres et 0.25 avec d'autres - c'est l'ordinateur qui a un problème".

Dans la situation choisie, la croyance à l'unicité du tarif kilométrique semble donc constituer pour la majorité des élèves un obstacle cognitif difficile à dépasser. Dans d'autres expériences présentées jusqu'ici, par contre (comme les différents phénomènes de croissance, par exemple), l'inhomogénéité de l'incrément était nettement plus facilement acceptée par les élèves ; elle était même souvent restituée de façon saisissante dans leurs représentations graphiques de ces phénomènes. A chaque fois pourtant, les élèves pouvaient s'appuyer sur leur expérience personnelle ou invoquer une explication ayant un caractère de nécessité physique ; il est en effet physiquement impossible qu'un amaryllis croisse indéfiniment ou qu'un liquide se refroidisse à l'infini. Pour ce qui est des prix des taxis, les enfants ne disposent ni de la possibilité d'invoquer leur expérience personnelle ni d'explications évidentes des modifications de tarif passé une certaine distance du centre d'une ville. Cette absence suffit, nous semble-t-il, à expliquer l'importante difficulté qu'ils éprouvent à rejeter de leur modèle global de la situation, l'idée intuitive d'un tarif kilométrique constant.

VI.2. La construction de l'espace sonore

Ce projet a déjà été présenté par nous dans une série de travaux[5]. Nous en donnerons ici seulement les lignes essentielles, en nous centrant en particulier sur les

---

[5] Vitale, 1990-1995, quatrième cahier : "La construction de l'espace sonore" ; Béguin, 1995 ; Béguin et al, 1995a.

aspects nouveaux engendrés, dans l'activité de modélisation, par le *caractère discret de la variable d'évolution* [6].

L'enseignement traditionnel de la culture musicale, tant dans les écoles que dans les conservatoires, part d'un *acquis* dont les fondements perceptifs, historiques et culturels sont étrangement absents : celui des 7 *notes* de la *gamme diatonique* (les touches blanches du piano, comprises dans une octave) ; puis, plus tard, des 12 *notes* de la *gamme chromatique* (les touches blanches et noires du piano). Dans cette approche :

a. Les *bruits* ne peuvent pas être pris en compte ; ils doivent être évacués de l'espace sonore.

b. A moins de travailler avec des instruments à corde, les *sons* qui ne sont pas des *notes* ne peuvent pas être pris en compte. Et, même dans ces cas, si la guitare n'est pas bien accordée (c'est-à-dire, si les *sons* qu'elle produit ne sont pas des *notes* du piano), on va l'accorder ; les *sons* aussi doivent être évacués de l'espace sonore s'ils ne sont pas conformes aux *notes* de la gamme diatonique (ou chromatique).

c. Les *sons* qui ont été ainsi, en quelque sorte, légitimés et qui sont devenus *notes* ont des *hauteurs* définies ; on n'impose pas seulement la gamme chromatique, mais la très particulière gamme chromatique dont le LA central a la fréquence de 440 Herz.

La rigidité de cette approche fait que les aspects évolutifs de l'expérience musicale (par exemple, le changement dans le temps de la fréquence du LA central) et les ouvertures possibles à l'écoute et à la pratique d'expériences folkloriques, contemporaines ou extra-européennes (par exemple, à des gammes pentatoniques ou à des ragas indiennes) sont d'accès difficile pour les élèves.

Nous sommes partis de cette constatation et de l'évident aspect *discret* des gammes utilisées dans toutes les expériences musicales connues pour structurer un projet transdisciplinaire sur l'*exploration de l'espace sonore* (dans le cadre d'une activité de laboratoire) et de *construction de gammes* (dans le cadre d'une activité de modélisation). Ce projet met en oeuvre tant les dimensions acoustiques (hauteur et intensité[7]) que celles physiologiques et/ou subjectives (consonance et dissonance) du son ; il se prête en outre à l'utilisation de la programmation (en LOGO ou LOGOwriter) dans la phase de modélisation du phénomène. Il se prête ainsi à une collaboration étroite entre enseignants d'observation scientifique, de physique, de mathématique, d'informatique et de musique.

La première partie (*expérimentation*) demande l'utilisation d'un *bicorde* (figure 17) ou, encore mieux, d'un *tricorde*. Dans le cas du bicorde, les deux cordes sont accordées à l'unisson[8]. Un chevalet permet de modifier la longueur de l'une des deux cordes, tout en gardant constante la longueur de l'autre (le *bourdon*).

---

[6] Un certain nombre de collèges du cycle d'orientation de Genève est en train d'expérimenter le projet "construction de l'espace sonore" dans le cadre d'une collaboration interdisciplinaire entre enseignants de mathématique, physique, musique et informatique.

[7] L'aspect *timbre* n'a pas pu être abordé avec les techniques d'exploration utilisées.

[8] Nous avons choisi des cordes de violoncelle. Il est clair que, pour nous, la valeur de la fréquence fondamentale du son produit par les deux cordes, une fois suffisamment tendues, n'a pas d'importance ;

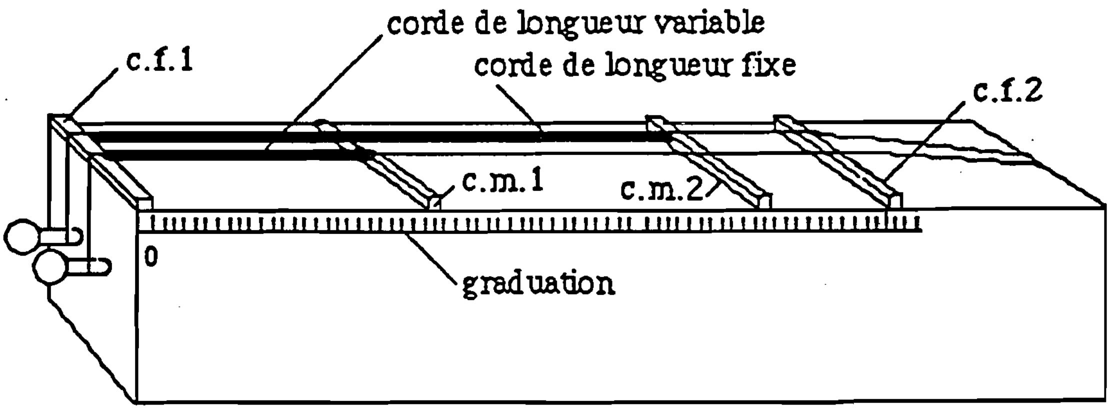

Figure 17 : Le bicorde utilisé pour produire des sons consonants (en gras, segment frotté de chaque corde)

Une discussion initiale en classe clarifie les concepts initiaux des élèves sur les termes *bruit*, *son* et *note* ; en particulier, on essaie de définir leurs relations mutuelles et leurs domaines de validité. En présentant le bicorde, on réfléchit aux paramètres qui peuvent modifier le *son* produit par les cordes : longueur, tension, section, matériel dont la corde est construite. En diminuant la longueur, ou en augmentant la tension de la corde, le son devient-il plus *haut ?* ou plus *grave ?* L'enseignant guide la discussion pour que l'attention se concentre sur la *longueur* de la corde comme paramètre pertinent[9].

Ensuite, on expérimente sur le bicorde. Les élèves (les premiers années de sondages, en groupes de deux ; plus tard, en groupes souvent plus larges) cherchent, en modifiant la position du chevalet, à produire *deux sons* (celui produit par le bourdon et celui produit par la deuxième corde de longueur variable) *qui vont bien ensemble* (c'est-à-dire, qui donnent un son composé qui est agréable *à leurs oreilles*[10]). On dira alors que les deux sons sont *consonants* ; désormais, on utilisera avec les élèves le terme *note* pour tout *son* qui est jugé comme consonant avec le bourdon.

La stratégie d'exploration suivie par les élèves est ici particulièrement intéressante : on peut en effet bouger le chevalet par tout petits pas, le mettre résolument au milieu de

---

il s'agit seulement de trouver un *bon son*, non métallique et en bonne résonance avec la caisse de résonance du bicorde.

9 Tous les autres paramètres sont intéressants, naturellement, mais leur utilisation dans la modélisation prévue est bien plus difficile. Ici nous avons un bon exemple de l'interaction que nous proposons entre enseignant et classe : il ne s'agit pas, en effet, d'*imposer* un paramètre, mais bien d'en *choisir* un grâce à un consensus raisonné et guidé par l'enseignant, sur la base et dans le cadre du projet didactique déjà défini.

10 L'aspect *subjectif* de cette expérience sensorielle est ici essentiel. Le consensus parmi tous les élèves (et l'enseignant) doit être atteint par une activité de une construction collective et non par une imposition extérieure et faussement *objective*. Il faut noter ici que les deux cordes doivent être pincées *en même temps* (en synchronie). En effet, les sons obtenus quand les deux cordes sont pincées *l'une après l'autre* (en diachronie) peuvent porter à un jugement bien différent sur le fait d'"aller bien ensemble", vu que le souvenir plus ou moins conscient de la gamme du piano (DO RE MI ...) peut très bien faire accepter comme "consonante" une succession de notes du type DO RE.

la deuxième corde pour un premier essai, etc. L'enseignant sera très attentif à ces stratégies (tant à leur choix initial et au consensus entre les deux élèves du groupe, qu'à son évolution au fur et à mesure que l'expérimentation continue). C'est souvent de l'analyse fine de ces stratégies qu'il sera possible de remonter aux paradigmes interprétatifs (ou micro-modèles) utilisés par les élèves et aux éventuelles obstructions cognitives qui entrent en jeu (voir, en particulier, le point VIII.3 ci-dessous).

En général, l'intervalle d'*octave* (c'est-à-dire, celui où la deuxième corde a *le même son*, mais plus *haut*, que le bourdon) est rapidement reconnu comme consonant ; on définira alors un rapport

R = longueur de la deuxième corde / longueur du bourdon

et, à condition que la position du chevalet ait été jugée comme à la moitié de la corde[11], on écrira R(première octave) = 1/2.

Y aura-t-il d'*autres* octaves le long de la deuxième corde ? Peut-on, *sans expérimenter* (ou, mieux, *avant d'expérimenter*), proposer l'existence d'un R(deuxième octave) = 1/2 (1/2) = 1/4 ? Peut-on généraliser cet algorithme ?

Plus tard, presque toujours, l'intervalle R(quinte) = 2/3 est reconnu comme consonant[12]. Y aura-t-il d'*autres* quintes le long de la deuxième corde ? Et quel son pourrait-on produire avec une corde qui a R = 1/2 (2/3) = 1/3 ? s'agira-t-il d'une *note ?*

De cette manière - tantôt facilement, tantôt avec beaucoup de difficultés de mesure et de traduction des mesures en termes algébriques - on arrive à la construction d'une toute première *gamme*. Par exemple, en donnant la valeur R = 1 à la note produite par le bourdon, on aura la *gamme pentatonique*[13]

R = 1 4/5 3/4 2/3 1/2

qui, dans la notation traditionnelle et, en appelant arbitrairement DO le bourdon, donnerait :

DO MI FA SOL DO'

---

11 Si, par exemple, la longueur du bourdon est de 70 cm, la mesure de la position du chevalet qui donne la première octave peut avoir été de 35.1 cm, ou de 34.8 cm, etc. Ce n'est pas toujours immédiatement clair que, dans les limites des erreurs de mesure personnelles et instrumentales, il s'agit-là de la moitié de 70.

12 Les termes "octave", "quinte", "tierce" etc. peuvent créer des artefacts déplaisants dans notre analyse. A ce niveau d'expérimentation, en effet, il n'y a pas encore 8 notes entre une note et son octave (les deux notes terminale y comprises), ni 5 entre une note et sa dominante, etc. En réalité, il n'y en aurait jamais, parce que l'expérience finit bien avant la construction de la gamme diatonique. Il serait peut-être opportun d'éviter complètement ces termes ; toutefois, alors que l'on peut donner des noms amusants et personnels à la famille des notes dominantes, sensibles, etc., le terme "octave" semble tellement bien enraciné qu'il ne serait pas facile de s'en débarasser.

13 Le *son* produit avec R = 3/4 (quarte juste) peut difficilement être appelé une *note*, si l'on s'en tient à la définition donnée ci-dessus ; en effet, l'intervalle DO-FA n'est pas, en général, jugé comme consonant. Il est toutefois quelquefois retrouvé et accepté par les élèves. L'enseignant pourrait à ce moment-là expliquer son origine historique, comme *renversement* de la quinte juste (intervalle FA-DO').

La deuxième partie de l'expérience (modélisation) part de ce premier acquis : la définition de la gamme - d'une des gammes possibles - comme d'un ensemble des notes engendrées par des valeurs de R égales aux rapports entre nombre entiers et petits et comprises entre 1 et 1/2.

Ce qui implique - et cela est fondamental à nos yeux - le *caractère arbitraire de la gamme*, qui devient ainsi fonction d'un jugement subjectif (quel son, dans l'octave, est-il consonant avec le bourdon ?), d'un choix personnel (combien de notes va-t-on chercher et accepter dans une gamme ?) et, ensuite, d'un consensus collectif (de deux élèves, de la classe, de la classe et de l'enseignant, de la convention culturelle de notre société, etc.).

Il s'agit-là de notre premier *modèle local* d'une gamme. On peut facilement l'informatiser[14] pour passer à sa généralisation (vers, par exemple, la gamme diatonique de 7 notes ou celle chromatique de 12) et à son utilisation dans le contexte de la construction de mélodies. Pour tous ces aspects nous renvoyons à nos articles (Vitale, 1990-1995, quatrième cahier : "La construction de l'espace sonore" ; Béguin, 1995 ; Béguin et al, 1995a).

VI.3. Conclusions sur les activités de modélisation dans le discret

Nous avons peu exploré ce nouveau domaine, qui mériterait au contraire d'être bien plus présent dans les activités de classe[15]. La pauvreté d'exemples de modélisation dans le discret dont nous disposons à présent rend difficile d'arriver à des conclusions sur les aspects caractéristiques et sur la richesse d'analyse que ce type d'activité peuvent engendrer dans la dynamique de la classe. Il nous semble toutefois qu'il vaudrait certainement la peine d'intensifier ce type d'activité et d'en explorer mieux intérêt et limites.

L'expérience de Fribourg (point VI.1. ci-dessus) est particulièrement intéressante, parce qu'elle introduit un aspect discret (à cause du nombre limité de questions que l'on permet aux élèves) dans un phénomène *à priori* continu. Les quelques points (distance kilométriques) pour lesquelles on peut avoir des réponses par l'ordinateur deviennent ainsi des *pivots discrets* autour desquels doit se structurer toute hypothèse de dépendance fonctionnelle du *coût de la course* de la *distance parcourue*.

L'expérience du bicorde (point VI.2. ci-dessus) demande que l'on reste strictement dans le domaine du discret (fractions entières de la longueur du bourdon avec, en général, numérateurs et dénominateurs représentés par des nombres entiers positifs et *petits*). Elle nous semble par conséquent une des meilleure introduction à la modélisation dans le discret.

---

[14] Nos élèves le font en LOGOwriter, mais tout autre langage de programmation et de représentation graphique facile fait également l'affaire.

[15] Dans nos propositions d'activités de classe, relatives à l'intégration de l'informatique à la pratique pédagogique, l'un de nous a toutefois présenté toutes une série de processus discrets (automates cellulaires, itérations remarquables, etc.) qui pourraient être utilement introduits dans la pratique scolaire de la modélisation dans le discret ; voir Vitale (1990-1995), cahier 6 : Algorithmes aléatoires ; cahier 7 : Algorithmes déterministes.

Il est toutefois évident que des domaines nouveaux devraient être explorés par des modèles discrets. Par exemple, dans la réalisation de certaines itérations dans l'arithmétique des nombres entiers ("itérations remarquables"), l'aspect discret non seulement rend plus facile la description et la représentation de la dynamique de l'itération, mais encore est à la base même des caractéristiques que l'on y découvre (bifurcations, comportements chaotiques, etc.)[16]. En physique, en biologie, en chimie, il ne devrait pas être trop difficile d'identifier des phénomènes naturels facilement observables dans un laboratoire scolaire et utilement modélisés dans le discret[17].

VII. Conclusions sur les activités de modélisation en classe. L'intégration de l'expérience de la causalité et de celle de la nécessité

> "Notre connaissance du monde est basée sur la construction d'un modèle de la réalité, un modèle qui peut être confronté à l'expérience seulement partiellement et de temps en temps ... Ce modèle se développe en fonction de l'utilisation que l'on en fait, tant par la culture environnante que par tous ceux qui doivent plier leurs connaissances à l'utilisation qui les intéresse"[18].

Un *débat général sur les stratégies de modélisation* devrait partir des positions présentées, sous forme de dialogue entre deux philosophes, par Hesse (Hesse, 1966) : d'un côté, un modèle est utile s'il décrit - dans certaines limites d'approximation - les données expérimentales dans le domaine restreint où elles ont été mesurées ; d'un autre côté, dès qu'il s'éloigne des données c'est le modèle - et non les données - qui doit être abandonné. En conclusion, à quoi bon le modèle ? Si on ne le garde que quand il colle aux données, en a-t-on véritablement besoin ? Si on l'abandonne dès qu'il s'éloigne des données, a-t-il encore une valeur prédictive ?

Dans le contexte de notre projet, toutefois, nous devons limiter le débat au *rôle de certaines stratégies de modélisation dans la pratique pédagogique*. Il ne s'agit donc pas de décider ici sur la pertinence épistémologique des modèles dans la connaissance du monde, mais plutôt de voir quel rapport les élèves peuvent construire par rapport à leur expérience, dans le contexte de leurs études et de la pratique de classe, en passant par leurs activités de modélisation.

Avant de passer à l'analyse plus détaillée de certains des apports de la modélisation à la maîtrise de l'expérience, nous voudrions clarifier deux points qui nous semblent préliminaires à toute discussion :

---

[16] Dans la phase informatique de la modélisation, ces phénomènes présentent l'intérêt de mettre en évidence les aspects *constructifs* de l'itération (ou de la récursion) et ce que Arsac appelle "la nature transformationnelle de la programmation" (voir Arsac, 1984 ; Vitale, 1992).

[17] Par exemple, la formation d'un tas de sable ou de graines de moutarde, où la *création* et la *forme* (décrite par les angles "de repos" et "de stabilité") du "cône" dépend de la nature granulaire (discrète) du sable ; un liquide, en effet, donnerait une "couche" et non un "cône" (voir Jaeger et al, 1992).

[18] Bruner (1966), p.320 (notre traduction).

a. Nous pensons que les modèles ne sont pas *seulement* des approximations de l'expérience (du *réel*, on dit souvent, en donnant une certaine priorité à l'expérience causale par rapport à celle formelle). Ils font, à leur tour, *partie de notre réalité.* En cohérence avec notre optique trans-disciplinaire, nous affirmons en effet que les expériences causales (observation et analyse des phénomènes physiques, chimiques, biologiques) appartiennent au réel autant que les expériences formelles (exploration des structures logico-mathématiques).

b. Les *limites des modèles* sont aussi intéressantes que leur capacité de représentation, description et généralisation de l'expérience. Il ne s'agit pas ici seulement des *limites extérieures* (par exemple, du fait que - à partir d'une certaine valeur de la variable d'évolution - un modèle ne décrit plus correctement les données expérimentales), mais également des *limites intérieures*, dont on trouvera des exemples au point VII.2 ci-dessous, relatifs aux aspects sémantiques dans l'interprétation des modèles.

VII.1. Modèles descriptifs et modèles explicatifs

Un débat fréquent, mais qui nous semble souvent mal défini, est celui du rôle *descriptif* ou *explicatif* d'une représentation ou d'un modèle particulier par rapport à un ensemble de données expérimentales. Fréquemment, on attribue l'*aspect descriptif* à l'*activité de représentation*, et l'*explicatif* à l'*activité de modélisation.* Ou l'on parle, comme de concepts assez différents entre eux, de *modèles descriptifs* et de *modèles explicatifs* (ou *interprétatifs*). Mais les choses ne sont pas si simples[19] !

Voici un exemple très connu et assez clair, celui de la modélisation de l'ensemble des lignes spectrales de l'hydrogène. On part d'un ensemble assez chaotique de fréquences, émises (ou absorbées) par les atomes d'hydrogène. On n'y voit aucun ordre, aucune "logique". Une formule tout à fait empirique (le "modèle de Balmer") met un ordre inattendu dans ce chaos et permet de *décrire* toutes les fréquences connues en termes d'une seule constante empirique, celle de Rydberg, et de deux nombres entiers variables. C'est un modèle *descriptif* pour les fréquences déjà connues, mais en même temps il permet de *prévoir* des fréquences non encore observées et d'*exclure* toutes les fréquences qui ne sont pas calculables par la formule de Balmer. Plus tard, à la naissance de la théorie quantique, le "modèle de Balmer" devient seulement un des théorèmes que l'on peut déduire du "modèle de Bohr" de l'atome ; maintenant la constante de Rydberg n'est plus une constante empirique, mais une fonction parfaitement définie d'un certain nombre de constantes fondamentales. Est-ce que le "modèle de Bohr" *explique* le "modèle de Balmer" ? Certainement oui. Mais est-ce qu'il est un modèle *explicatif* des fréquences spectrales, alors que celui de Balmer était seulement un modèle *descriptif ?* Il serait assez arbitraire de l'affirmer ; le "modèle de Bohr" est également empirique et il faudra attendre la mécanique

---

19 Dans notre premier article (Béguin et al, 1995), nous avons déjà insisté sur la complexité du rapport *représentation / modèle*, en montrant comment - à des niveaux intégratifs différents - chaque modèle devient représentation, et vice versa. Pour une analyse détaillée de ce rapport, voir Piaget (1970), (1973) et Apostel et al (1973).

ondulatoire pour l'*expliquer* (dans le sens de le dériver des équations fondamentales). Mais qui *expliquera* les équations fondamentales ? etc., etc.[20].

Nous croyons donc que l'on devrait éviter, en classe, d'utiliser ces termes comme des termes exclusifs, tendant à séparer les différents modèles étudiés en deux catégories opposées. Au contraire, nous croyons qu'il serait utile de faire noter les aspects dialectiques tant de la relation représentation/modèle que de la relation description/ explication.

VII.2. Les aspects sémantiques dans l'interprétation des modèles

Nous avons déjà noté comment, par exemple, un mécanisme très simplifié d'infection est à la base d'un modèle élémentaire de la dynamique de l'épidémie de SIDA (voir le point V.4.2. de notre deuxième article) ; et un mécanisme de division cellulaire est à la base d'un modèle élémentaire de la croissance d'une population bactérienne (point V.4.5.). Dans tous ces cas, la présence d'un *mécanisme sous-jacent* et *expérimentalement vérifiable* semble donner au modèle que l'on en a *déduit* un caractère d'"explication du phénomène" qui manque aux modèles plus formels.

Il est toutefois de plus en plus fréquent que le mécanisme proposé - et qui justifie le modèle - soit tout à fait spéculatif, ou tel que son action sous-jacente soit difficile (ou éventuellement impossible) à vérifier[21]. Dans ces cas, c'est seulement l'accord des résultats calculés à partir du modèle avec les données expérimentales qui compte.

Pour des systèmes complexes, d'ailleurs, il est de plus en plus rare qu'un modèle formel naisse de l'hypothèse et de l'analyse du fonctionnement d'un *mécanisme sous-jacent* au phénomène spécifique étudié. Dans ces cas (*modèles empiriques* ou *heuristiques*), la formulation du modèle est guidée par l'observation des données, par le transfert d'un modèle déjà connu et qui présente des caractéristiques qualitatives semblables ou par la généralisation d'un modèle expérimenté auparavant seulement dans un domaine plus restreint.

On arrive ainsi à ce qui nous semble l'aspect sémantique essentiel dans la construction et l'interprétation d'un modèle : celui de la *signification* qu'il faudrait donner aux paramètres empiriques qui entrent dans le modèle et dont le choix des valeurs numériques permet de vérifier son accord (ou son désaccord) avec les données expérimentales. Il va de soi que, lorsque le modèle est suggéré par un mécanisme sous-jacent, les paramètres qui nous intéressent sont ceux qui entrent dans la définition de ce mécanisme (taux de naissance, vie moyenne, etc.). Mais, comme on vient de le

---

[20] Il y a un cas particulier qui mériterait une analyse à part, celui dans lequel on attribue le rôle d'*explication* (ou d'interprétation) d'un phénomène à la proposition explicite d'un *mécanisme* sous-jacent au modèle proposé (voir, par exemple, Piaget et al, 1971 pour les *mécanismes causaux*).

[21] Un cas très intéressant est celui des *équations de diffusions* introduites de plus en plus fréquemment pour *modéliser* les schémas figuratifs ("patterns") dans le développement de l'embryon ou dans la formation des dessins que l'on observe sur les ailes des papillons, les coquillages, la peau des animaux, etc. Meinhardt a montré comment ces équations permettent de reproduire, avec une précision étonnante, un large spectre de dessins observés sur les coquillages (Meinhardt, 1995) ; mais c'est la précision de l'accord entre modèle et expérience qui est considérée comme *vérification* du modèle, non l'observation directe, expérimentale de processus de diffusion moléculaire qui restent encore totalement spéculatifs.

noter, la plupart des modèles sont maintenant détachés de la proposition d'un mécanisme sous-jacent et de la définition de ses paramètres[22].

Voici quelques exemples concrets de difficultés sémantiques dans la construction de modèles, relativement aux expériences que nous avons effectuées en classe.

VII.2.1. Le transfert du modèle linéaire de la température à l'amaryllis

Dans les activités de modélisation du phénomène de refroidissement des liquides (point V.4.3. de notre deuxième article), nous avons utilisé un modèle empirique, à incrément linéaire non homogène :

$DT = k * (T - T^a)$, (k constante < 0).

Dans ce modèle, T^a peut jouer le rôle de *température asymptotique* ou de *températureambiante*. Quelle interprétation choisir ? Nous avons préféré la deuxième, parce la première demande une attitude *téléologique* (comment le liquide pourrait savoir, à tout moment et quand il est encore à la température instantanée T, quelle sera sa température asymptotique ?). La deuxième, au contraire, peut avoir une justification causale, parce que l'échange de chaleur entre le liquide et l'environnement peut très bien être dépendant de la température de ce dernier (à tout moment, le système *peut connaître* tant sa température instantanée que la température ambiante).

Essayons maintenant de transférer ce modèle à la croissance globale de la hampe d'amaryllis (point V.4.4 de notre premier article). On constate alors que ce même modèle marche assez bien (un peu moins bien que celui quadratique) ; on peut le représenter par la formule :

$DH = k * (H - H^f)$, (k constante > 0).

Mais quelle signification, quelle interprétation donner à ce modèle ? Alors que le liquide *peutconnaître* à tout moment T^a, l'amaryllis n'a aucune possibilité de *connaître* H^f (sa grandeur finale)[23]. Même si le modèle marchait mieux que celui quadratique, on devrait donc l'abandonner, vue l'impossibilité de lui attribuer un *sens*.

---

22 Un très bon exemple est celui fourni par l'analyse de la variation temporelle de la densité des fourmis qui se trouvent autour d'une source de nourriture à une certaine distance de leur nid (voir Deneubourg et al, 1991). Cette distribution est parfaitement décrite par un *modèle logistique* (voir le point V.4.4.1. de notre deuxième article pour sa définition) ; il dépend donc de deux paramètres seulement, disons k et j. Mais quelle est l'interprétation, la signification de ses deux paramètres ? Ils sont évidemment fonction de certaines caractéristiques du comportement des fourmis (capacité de déposer une trace sur leur chemin en utilisant des phéromones, capacité d'interpréter cette trace, labilité de la trace dans le temps, etc.), mais comment déterminer leur dépendance fonctionnelle ?

23 A moins que H^f ne soit déjà marquée dans son patrimoine génétique ; une hypothèse difficile à accepter si l'on pense aux influences multiples de la lumière, de l'eau, de la température et de la qualité du sol sur la croissance de la plante.

VII.2.2. Le transfert du modèle quadratique des populations à l'amaryllis

De même, le transfert du modèle quadratique utilisé pour la croissance de la densité d'une population bactérienne (point V.4.5. de notre deuxième article) à la croissance de l'amaryllis perd aussi de *signification* en cours de route. On devrait en effet écrire :

DB = B * (k - j * B), (k, j constantes > 0).

Dans ce cas, le terme quadratique est associable à une espèce de *gêne* qui s'installe dans la population quand la densité est trop grande ; la constante j est en quelque sorte une mesure quantitative de ce gêne. Essayons maintenant de transférer ce modèle à la croissance globale de la hampe d'amaryllis. On aura :

DH = H * (k - j * H), (k, j constantes > 0).

Nous avons vu que ce modèle marche très bien, si l'on choisi les valeurs numériques de k et j de manière adéquate. Mais quelle est maintenant la signification de la constante j ? La constante k , peut-être, dépend du taux de naissance (multiplication et mort) cellulaire. Mais le concept de "gêne" (c'est-à-dire, de difficulté de multiplication ou de modification cellulaire pour un tissu végétal en croissance, à cause de la densité de cellules environnantes) ne semble pas facilement définissable.

En conclusion :

a. Dans certains domaines, nous pouvons donner une interprétation plausible au modèle proposé et une signification acceptable de ses paramètres. Toutefois, nous devons être prêts à reconnaître que, lorsque le même modèle est transféré vers d'autres domaines, c'est seulement l'*analogie formelle* (égalité de comportement observé) qui peut suggérer le transfert, et non nécessairement l'*analogie structurale* (égalité des mécanismes sous-jacents).

b. Dans certains domaines (par exemple, la croissance humaine), il faut probablement accepter que nous n'avons pas encore la possibilité de construire un modèle formel. Toutefois, même dans ces cas il peut être également utile d'explorer - à travers des représentations graphiques et des modèles qualitatifs - le niveau de modélisation auquel les élèves peuvent aspirer.

VIII. Les enjeux pédagogiques

> "Les chimistes cessèrent d'écrire que les deux oxydes de carbone, par exemple, contenaient en poids 56% et 72% d'oxygène ; ils écrivirent qu'une unité de poids de carbone pouvait se combiner soit avec 1,3, soit avec 2,6 unités de poids d'oxygène. Si les résultats d'anciennes manipulations étaient transcrits de cette manière, un rapport de 2/1 sautait aux yeux"[24].

---

[24] Kuhn (1972), p.161.

Cette citation, tirée de la "Structure des révolutions scientifiques" de Kuhn, pourrait synthétiser ce qui est peut-être l'enjeu majeur de notre approche : la transformation des informations factuelles que les élèves glanent pendant leur pratique scolaire - informations qui ne sont ni reliées entre elles ni organisées dans un système - dans des ensemble cohérents et réfléchis, où chaque donnée prend un *sens* par rapport au projet - au "paradigme", dirait Kuhn - dans lequel l'expérience a été proposée et développée.

Voici un extrait de protocole d'élèves qui montre une dynamique étrangement proche de celle décrite par Kuhn :

Samuel et Joris (7ème ; expérience du bicorde ; bourdon à 75 cm ; les deux élèves ont assez longtemps oscillé entre une stratégie additive - enlever chaque fois 25 cm à la longueur de la deuxième corde - et une multiplicative - diviser par 2 pour obtenir l'octave supérieure du bourdon) : 'alors ? - 37.5 sonne bien ?' - (Joris) "parce que... - 6 fois 12.5 égal 75" - (Samuel) "mais ça (le chevalet à 37.5) - c'est la moitié ! (Samuel veut changer de bourdon et le prendre de 60 cm) - faut essayer la moitié de 60" - 'non - ici avec cette longueur (75 cm) il y a encore des sons à essayer ?' - (Joris) "au oui - 37.5 plus 12.5" - (Samuel) "la moitié de 37.5 - 18.75 (on essaye) - oui ça me plaît - ça me plaît ! - pour vérifier si on a raison il faut essayer avec 60 (comme bourdon) et 30".

Pour que cette dynamique soit réalisée dans la classe, nous parlons explicitement ici d'*enjeu*. On veut dire : le *défi* d'arriver à une telle intégration du savoir tout en restant dans le contexte scolaire ; le *pari* que l'on peut y arriver par un travail discipliné et à long terme (tant pour les élèves que pour les enseignants).

Pour que cet enjeu soit réalisable, un certain nombre de conseils peuvent être formulés :

a. Que tout objet d'étude (expérimentale ou formelle) *soit un objet de connaissance* ; ou qu'il le devienne, au fur et à mesure de la scolarisation. Cela implique qu'aucune expérience ne peut jamais être considérée comme *terminée* ; qu'aucune structure formelle ne peut jamais être considérée comme *fermée*. A tout moment, de nouvelles curiosités et de nouvelles inquiétudes prennent la place des anciennes.

b. Que le *transfert de connaissances et de méthodes d'analyse* d'un domaine à l'autre soit *programmé à l'avance* et qu'il utilise continuellement tant l'information causale déjà acquise que les instruments formels déjà mis en jeu.

Naturellement, proposer des activités de modélisation (même très élémentaires) à des élèves du secondaire inférieure implique l'utilisation de notions et d'opérations formelles (par exemple, les proportions) encore mal assurées et, au mieux, en voie d'acquisition. Beaucoup des difficultés des élèves peuvent être attribuées au fait que ces structures sont encore peu fiables, ou peu explicites, ou encore stables seulement en compréhension et non en production, etc. On pourrait proposer simplement d'attendre que ces structures soient en place avant de les utiliser, mais les programmes scolaires ne permettent pas de le faire.

Réussir à identifier, déjà au cours des premières analyses, les *obstructions cognitives* (ou *obstacles épistémologiques*) qui rendent difficiles la compréhension et la maîtrise des activités proposées fait donc partie de notre *enjeu* ; tout comme réussir à formuler des séquences didactiques qui font, de l'*élaboration* et de l'*utilisation* des structures formelles en jeu, un des *buts essentiels* du projet pédagogique[25].

VIII.1. Déroulement des activités de modélisation

L'approche proposée (expérimentation ou recherche de données d'archive, représentation des données, discussion sur les caractéristiques qualitatives des représentations, modélisation locale, traduction informatique, intégration du modèle local, discussion sur les mérites et les limites du modèle exploré, réflexion sur les possibles généralisation du modèle) est possible seulement dans le cadre d'une attitude nouvelle - de la part des enseignants et des élèves - envers l'activité expérimentale et, plus généralement, l'analyse des données empiriques. C'est ce que nous avons appelé *expérimentation dans un cadre interprétatif*[26].

Dans ses lignes essentielles, cette approche implique :

a. *Que chaque problème soit présenté en classe*, pour une discussion préliminaire, *comme faisant partie d'un tout* (d'un projet global, d'un ensemble de problèmes tous relatifs à un même thème majeur, d'une tentative de généralisation d'un thème ou d'un modèle déjà abordés, etc.).

b. Que les raisons pour lesquelles un problème particulier a été choisi, parmi beaucoup d'autres possibles, soient explicitées aux élèves.

c. *Que les activités de représentation et de modélisation auxquelles le problème doit* (ou peut) donner lieu soient également rendues explicites.

d. *Qu'il devienne clair*, à la fin de la première présentation du problème, *qu'il ne s'agit pas d'un énième problème abstrait*, non contextuel et abordé au seules fins de satisfaire le programme, mais au contraire d'un problème dont la solution - la représentation efficace ou la construction d'un modèle formel - peut faire avancer toute la classe dans un projet plus large (la maîtrise de l'expérience causale et des instruments formels) dont les élèves sont déjà conscients.

En peu de mots : *il s'agit de bien faire comprendre aux élèves que l'activité d'exploration proposée n'est pas une fin en soi, ni un épisode isolé, mais un pas de plus dans un projet (une stratégie) explicite qui se développe pendant toute l'année.*

Naturellement, nous ne prétendons pas avoir toujours satisfait les exigences énoncées ci-dessus ! Elle sont difficiles à réaliser ; en effet, elles contrastent souvent

---

[25] C'est dans cette direction et dans ce but qu'ont été rédigés les *guides du maître* relatifs à nos projets : celui sur la construction de l'espace sonore (Béguin et al, 1995a) et celui sur la modélisation des phénomènes de croissance et de changement (Béguin et al, 1996a) ; voir aussi Béguin et al (1995b). Voir note[5].

[26] Pour des réflexions sur cette nouvelle approche dans le cours d'*observation scientifique*, voir Vitale (1991), (1994).

avec la pratique scolaire (tant des enseignants que des élèves) et les exigences du curriculum et les contraintes horaires. Il faut donc les voir davantage comme un *but à atteindre* que comme une pratique consolidée et familière dans les classes avec lesquelles nous avons travaillé.

VIII.2. Pourquoi modéliser ?

Reste à affronter maintenant la question essentielle : *pourquoi modéliser ?* Ou plus correctement : *pourquoi engager toute une classe dans des activités de modélisation* ?

Il est clair que les activités de modélisation représentent l'élément constant et caractéristique des pratiques scientifiques contemporaines. Même dans les domaines les plus empiriques (tels que les taxonomies en biologie), les aspects formels et la construction de modèles jouent désormais un rôle essentiel. Mais pourquoi en classe de secondaire inférieure ? Quel est le gain pour un élève de remplacer sa formulation spontanée : "un liquide se refroidit plus rapidement quand il est chaud"[27] par la proposition : "dans un intervalle de temps, la chute de température est proportionnelle à la différence entre la température instantanée au début de l'intervalle et la température environnante" ?

Dans certains cas, la réponse à ces questions est assez facile : dès qu'un *mécanisme causal plausible* peut être invoqué, il est certainement bien utile pour les élèves de se rendre compte que les données expérimentales peuvent être *correctement décrites* et souvent *prévues* par un modèle qui se base sur le mécanisme proposé[28]. C'est une *pratique déductive* qui leur sera précieuse tout au long de leur scolarité, tant en sciences qu'en mathématique (Arsac et al, 1992).

Il y a toutefois, comme nous l'avons déjà noté, beaucoup de situations où nous ne disposons pas de mécanismes causaux plausibles (par exemple, dans le cas de la croissance globale ou différentielle de l'amaryllis) ; parfois nous en disposons, mais ne pouvons pas les utiliser au niveau de l'enseignement dans le secondaire inférieur (par exemple, dans le cas du refroidissement des liquides, où les principes de la thermodynamique permettraient de *déduire* le modèle que nous avons établi de manière seulement empirique).

Toutefois, même dans ces derniers cas, le recours à des *modèles heuristiques* est utile : ils permettent en effet de *prévoir* le comportement des phénomènes étudiés dans des régions non explorées par l'expérience ; mais surtout, ils permettent de *transférer* l'expérience faite dans un domaine vers un autre domaine, sur la base d'*analogies de comportement* et non nécessairement de *structures causales sous-jacentes communes*[29].

---

[27] Ou, comme l'écrit un élève : "la chute de temps (= température) et plus grande plus elle est grand plus elle descend vite plus elle est petite plus elle descend lentement" (structure de l'argumentation, syntaxe et orthographe d'un élève).

[28] Pour une analyse détaillée du rôle que les mécanismes sous-jacents (ou présumés tels par les enfants) peuvent jouer dans la compréhension de l'expérience sensible, voir en particulier Piaget et al (1971).

[29] Ces thèmes ont été développés plus en détail dans Vitale (1988), (1995), (1995a).

Cet enrichissement de la représentation du monde naturel par les élèves, qui tend à *transformer tout phénomène observé en objet de connaissance*, a un autre intérêt : celui de les aider à *immerger tout phénomène observé dans un monde des possibles*. Nous intentons par cela la possibilité offerte par tout modèle formel qui contient des paramètres de décrire - par des choix adéquats de la valeur numérique de ces paramètres - d'*autres phénomènes que ceux qui ont été à l'origine du modèle*. L'exploration de ce spectre de phénomènes (en particulier, par ordinateur et à travers une activité personnelle de programmation[30]), tous décrits par le même modèle formel mais qui présentent souvent des morphologies et des dynamiques phénoméniques tout à fait différentes, enlève le statut de *fait isolé* au phénomène étudié et lui donne une épaisseur nouvelle.

Autre aspect à ne pas négliger : la *facilitation algorithmique* qui est introduite par un modèle, une règle, une régularité, une méthode ou une procédure informatique par rapport à une exploration par tâtonnement. Voici un exemple tiré d'un protocole de discussion en classe sur l'expérience du bicorde (voir point VI.2. ci-dessus)[31] :

'on a quand même trouvé beaucoup de choses très vite - "oui - c'est pour ça qu'on est fatigués" - 'et si on avait cherché au hasard - simplement en déplaçant - est-ce que vous pensez qu'on aurait trouvé autant de choses ?' - "non - ça aurait été plus dur" - "et plus long aussi" - 'alors - c'était dû à quoi alors' - "à son idée" - 'à quelle idée ?' - "de Jess" - 'de faire quoi ?' - "de diviser par 2 - 3 - 4 - 5 - 6 - 7 - 8..." - 'oui - donc on a choisi une méthode...'.

VIII.3. Les obstructions cognitives les plus importantes

Il nous semble que certaines au moins des obstructions cognitives observées au cours des activités de modélisation sont liées aux *paradigmes interprétatifs* (continuité, régularité et linéarité) que nous avons identifiés et dont nous avons parlé en détail dans nos deux articles précédents (voir, en particulier, les points II.3. et IV.2.).

Comme nous l'avons montré, ces paradigmes (ou *micro-modèles génériques*) - loin d'engendrer *seulement* des obstructions - jouent un rôle très positif dans la réflexion qualitative sur les données expérimentales, les aspects visuels de leur représentation, les caractéristiques saillantes de leur modélisation. Ils permettent de donner un sens de continuité et de globalité à des phénomènes connus seulement à quelques instants, à certains endroits. Ils permettent d'induire, à partir de quelques points expérimentaux, la forme générale de l'évolution étudiée.

Mais ces paradigmes se prêtent également à des généralisations abusives. Ils peuvent contredire les caractéristiques spécifiques d'un processus donné et rendre les élèves aveugles à des comportements et des évolutions pourtant assez évidentes dans les représentations étudiées. Ils peuvent amener les élèves à des prédictions simplistes

---

[30] Pour une population d'élèves et d'étudiants plus âgé que celle de nos élèves, le rôle de l'utilisation de l'ordinateur lors des activités de modélisation a été analysé par plusieurs chercheurs dans l'intéressant livre de Perkins et collaborateurs (Perkins et al, 1995).

[31] On n'a pas essayé ici d'identifier les différents élèves, dont les interventions sont toutes citées dans " ... ", alors que celles de l'enseignant sont citées dans ' ... '.

et rendre ainsi difficile, pour un problème donné, tant l'élaboration de prévisions adéquates que la recherche de mécanismes sous-jacents.

Deux exemples :

a. Dans le projet "construction de l'espace sonore" (voir le point VI.2 ci-dessus), la maîtrise de la notion de *proportionnalité* est essentielle pour la compréhension des données expérimentales et pour la formalisation du modèle. Notre séquence didactique prévoit que les élèves dégagent une première règle purement empirique, puis qu'ils l'interprètent et la généralisent par des hypothèses. S'il s'agit, par exemple, de décrire le passage du bourdon (de 70 cm) à sa première octave, les élèves proposent une hypothèse *additive* ("il faut enlever 35 cm") ou, plus rarement, *multiplicative* ("il faut diviser par 2") ; à ce point, les deux hypothèses donnent évidemment le même résultat. Toutefois, quand on cherche la deuxième octave, le modèle local à peine ébauché pour la production de la première donnera-t-il "il faut encore enlever 35 cm" ou "il faut à nouveau diviser par 2" ? La première généralisation est évidemment absurde (la corde aurait alors une longueur nulle !), mais elle est souvent proposée. Voilà un cas où le *paradigme de linéarité* porte facilement les élèves vers une hypothèse additive ; heureusement, elle peut être très facilement démentie par l'expérience.

b. Dans les expériences de croissance (avec l'amaryllis, point V.4.4. de notre deuxième article, et les bactéries, point V.4.5.), l'hypothèse de linéarité dans l'évolution du système peut être la norme, à moins qu'une discussion préliminaire sur les possibles mécanismes sous-jacents ne concentre l'attention des élèves sur l'aspect catastrophique de toute croissance géométrique. Mais, même dans ce dernier cas, le passage à une représentation *formalisée* du modèle local est difficile ; elle demande en effet de maîtriser le concept de *proportionnalité* non entre la *grandeur étudiée* (par exemple, la densité de la colonie bactérienne) et le *temps*, mais entre l'*incrément de la grandeur étudiée* et le *temps* [32].

Pour faciliter la compréhension du rôle joué par la constante de proportionnalité k dans ce modèle (non seulement sa *valeur numérique*, mais son *rôle algébrique* dans l'expression formelle), nous proposons - dans le projet "croissance d'une population bactérienne" - de *déterminer d'abord empiriquement* cette valeur à partir des données expérimentales, en mesurant le temps de redoublement de la population. On peut ensuite facilement formaliser cette approche et la généraliser, en termes algébriques, à des situations (par exemple, la croissance de la hampe florale de l'amaryllis) où le temps de doublement est plus difficilement utilisable à cet fin.

En conclusion, une sensibilité constante des enseignants envers ces obstructions cognitives peut éviter qu'elles paralysent la compréhension d'une tâche ou la généralisation de la compréhension locale d'un phénomène spécifique à des domaines plus larges. On sait bien que le problème n'est pas nouveau dans la pratique pédagogique ! Un bon exemple est celui donné, dans le Ménon de Platon, par les

---

[32] Les difficultés, en réalité, commencent déjà avec des relations bien plus simples, comme par exemple $P = k * t$ pour un évolution linéaire et homogène (simple proportionnalité). C'est l'aspect abstract de la constante k qui semble faire obstacle à une compréhension opérationnelle de ce type de relations ; cela est seulement un des aspects des difficultés rencontrées lors du passage en classe de l'arithmétique à l'algèbre.

efforts maïeutique de Socrate pour faire énoncer, au jeune esclave encore "additif", la règle "multiplicative" qui relie l'aire au côté d'un carré[33].

VIII.4. Nécessité d'enrichir l'ensemble des projets de modélisation

Notre expérience est encore assez pauvre[34]. Il faudrait l'enrichir, lui ouvrir des dimensions nouvelles dans tous les domaines scolaires.

Il y a des projets qui se prêtent à un travail transdisciplinaire entre enseignants de mathématique, de physique, d'observation scientifique et d'informatique. Nous pensons, en particulier, à l'étude et à la modélisation des *phénomènes d'élasticité* (tant unidimensionnels - ficelles élastiques, etc. - que bidimensionnelles - surfaces de gomme, etc.), étude qui n'a été qu'entamée par notre groupe.

Il y en a d'autres qui se prêtent à un travail transdisciplinaire entre enseignants de mathématique, de biologie, d'observation scientifique, d'informatique, d'économie. Nous pensons, en particulier, à des études sur la distribution de plantes différentes sur des surfaces d'aire variable (voir, par exemple, Horn, 1993).

C'est surtout le domaine de la *modélisation dans le discret* qui est pauvre dans notre pratique actuelle. Nous pensons que c'est là un des domaines où les structures formelles de l'arithmétique pourraient au mieux trouver leurs applications, en favorisant ainsi le passage arithmétique/algèbre qui préoccupe depuis toujours les enseignants de mathématique.

VIII.5. Conditions de réussite

L'approche que nous avons développée contient certainement un élément de *guide* (un certain nombre de "coups de pouce" de la part de l'enseignant) qui la différencie d'autres approches, davantage basées sur la libre exploration d'un domaine d'expérience par les élèves. Dans certains cas d'activité très (trop ?) ouverte, cependant, les élèves peuvent certes participer activement et avec intérêt pendant un certain temps, mais ils se plaignent ensuite de n'avoir rien compris, rien appris. Dans la discussion initiale sur le projet "amaryllis", par exemple, la présence de facteurs qui influencent la croissance (comme la lumière, la fréquence d'arrosage, la température de la classe, ...) et de leur éventuelle périodicité doit être mentionnée, mais ne devrait pas créer des perplexités paralysantes (vue la difficulté d'en tenir compte dans l'activité de modélisation). De même pour le projet "espace sonore", où tous les facteurs qui peuvent modifier le son produit pas les cordes, autres que la longueur (tension, section, matériel dont la corde est faite) doivent être mentionnés, mais pour en arriver à la fin à la décision - partagée par la classe - de se centrer sur le seul facteur longueur.

Il y a, naturellement, des pièges à éviter. Dans cette introduction des élèves à des activités de modélisation, il y a le danger que le "modèle" proposé ou étudié devienne

---

33 Platon : Ménon, 82a-85b.

34 Dans Vitale (1990-1995) on peut trouver un grand nombre de *propositions* de projets de modélisation, dans le cadre d'une approche intégrée de l'informatique à l'enseignement de la mathématique et des sciences ; la plupart de ces propositions, toutefois, n'ont pas encore été transformées en expérience pédagogique dans le contexte scolaire.

une "norme", une règle extérieure et nécessaire à laquelle il faut se conformer (on risque de retrouver ici, en effet, les scories des "lois de la nature"). Voici, par exemple, un extrait de protocole d'élève :

Frédéric (7ème ; réflexions sur un diagramme des tailles de garçons avec moyennes et déciles) 'tu as une idée de que c'était ?' - "bien - c'était différentes (courbes) - (gestes répétés) - autres... - pour être normal (il rit) il faut être dans les 5 lignes" - 'vous étiez tous normaux dans la classe ?' -"peut-être pas Karine" (il rit).

Voilà d'autres défis pour les enseignants ! Trouver le bon équilibre entre la richesse de l'expérience causale (qui ne tolère pas facilement des "normes" ou des "loi") et la rigidité de l'expérience logico-mathématique (qui peut être décrite seulement en termes de "nécessité"). Et il ne faudra pas seulement apprendre à intégrer ces deux aspects de notre activité cognitive ; il faudra aussi intégrer les apports essentiels de chaque discipline dans une pratique scolaire unique ; et également intégrer la réflexion psychocognitive sur les conditions d'acquisition du savoir et celle psychopédagogique sur les acquis scolaires des élèves.

Références

APOSTEL L., et al (1973). *L'explication dans les sciences.* Paris : Flammarion.

ARISTOTE De Caelo, (*Traité du ciel.* Paris : Vrin, 1949, trad. J.Tricot).

ARSAC J., (1984). La conception des programmes. *Pour la Science,* novembre 1984

ARSAC G., CHAPIRON G., COLONNA A., GERMAIN G., GUICHARD Y., MANTE M., (1992). *Initiation au raisonnement déductif au collège ; Une suite de situations permettant l'appropriation des règles du débat mathématique.* Lyon : IREM.

BEGUIN C., (1995). L'espace sonore musical ; Séquence didactique avec LOGOwriter pour la construction de l'espace sonore. *Informatique-Information,* n° 27, juin 1995.

BEGUIN C., GURTNER J.L., DE MARCELLUS O., DENZLER M., TRYPHON A., VITALE B., (1995). Activités de représentation et de modélisation dans une approche exploratoire de la mathématique et des sciences. Première partie : Les activités de représentation. *petit x,* n° 38, 1994-1995, pp. 41-71.

BEGUIN C., DE MARCELLUS O., VITALE B., (1995a). Construction de l'espace sonore ; Séquence didactique. Genève : CRPP.

BEGUIN C., DE MARCELLUS O., VITALE B., (1995b). Modélisation de phénomènes de croissance ; Une tentative pour clarifier le rapport de l'élève avec des savoirs en cours d'acquisition, dans A.Giordan, J.L. Martinand, D.Raichvarg : *Que savons-nous des savoirs scientifiques et techniques ?.* Chamonix : Centre J. Franco.

BEGUIN C., GURTNER J.L., DE MARCELLUS O., DENZLER M., TRYPHON A., VITALE B. (1996). Activités de représentation et de modélisation dans une approche exploratoire de la mathématique et des sciences. Deuxième partie : Les activités de modélisation dans le continu. *petit x,* n° 41, pp. 51 à 82.

BEGUIN C., DE MARCELLUS O., DENZLER M., VITALE B., (1996a). Croissance et changement ; Guide d'activité pour le maître. Genève : CRPP.

BRUNER J.S., (1966). On cognitive growth, dans J.S. Bruner, R.R. Olver, P.M. Greenfield (eds.) : *Studies in cognitive growth.* New York, Wiley.

DENEUBOURG J.L., CHAMPAGNE P., PASTEELS J., VERHAEGHE J.-C., (1988). Une stratégie basée sur l'erreur ; L'exploitation des ressources chez les fourmis, dans J.P. Brans, I. Stengers and P. Vincke (eds.) : *Temps et devenir ; A partir de l'oeuvre d'Ilya Prigogine*. Genève : Patiño, pp. 51-58.

GURTNER J.L., NÚÑEZ-ERRÁZURIZ R., GURTNER M., VITALE B., (1993). From school mathematics to applied mathematics : Learning to build models with a word problem mind, dans J.R. Becker and B.J. Pence (eds.) : Proceedings of the 15th annual meeting of PME-NA, Vol. 1, pp. 218-223.

HESSE M., (1966). *Models and analogies in science*. Notre Dame : University of Notre Dame Press.

JAEGER A.M., NAGEL S.R., (1992). Physics of the granular state. *Science, 255*, 1523-1531.

KUHN T.S., (1972). *La structure des révolutions scientifiques*. Paris : Flammarion.

MEINHARDT H., (1995). *The algorithmic beauty of sea shells*. London : Academic Press.

PERKINS D.N., SCHWARTZ J.L., MAXWELL WEST M., STONE WISKE M., (eds.) (1995). *Software goes to school ; Teaching for understanding with new technologies*. Oxford : Oxford U.P.

PIAGET J., (1970). L'explication en psychologie et le parallélisme psychophysiologique, in P.Fraisse et J. Piaget : *Traité de psychologie expérimentale*, vol.I. Paris : PUF, pp. 131-170.

PIAGET J., (1973). Le problème de l'explication ; Remarkes finales, dans Apostel et al (1973), pp. 7-18 ; 215-232.

PIAGET J., GARCIA R., (1971). *Les explications causales*. Paris : PUF.

PLATON : Menon (*Ménon*. Paris : Flammarion, 1967, trad.E.Chambry).

VITALE B., (1988). Psycho-cognitive aspects of dynamic model-building in LOGO ; A simple population evolution and predator/prey program. *Journal of Educational Computing Research, 4*, 227-252.

VITALE B., (1990-1995). L'intégration de l'informatique à la pratique pédagogique ; vol. 1 : Considérations générales pour une approche trans-disciplinaire ; vol. 2 : Les projets : cahiers 1 (jeux), 2 (arbres), 3 (croissance et changement), 4 (musique), 5 (les bases de la pensée écologique), 6 (algorithmes aléatoires), 7 (algorithmes déterministes). Genève : CRPP-DIP, 1990-1995.

VITALE B., (1991). Pratiques et perspectives nouvelles de la stratégie expérimentale ; Elargissement de la pratique expérimentale dans des cadres interprétatifs. *Cahiers d'Observation Scientifique*, n° 5, septembre 1991, pp. 50-60

VITALE B. (1992). Processes ; A dynamical integration of informatics into mathematical education, in C. Hoyles and R. Noss (eds.). *Learning mathematics and LOGO*. Cambridge (USA). MIT University Press, pp. 279-318.

VITALE B., (1994). Modélisation qualitative et quantitative. Un exemple d'intégration de l'informatique à la pratique pédagogique : les bases de la pensée écologique. *Informatique-Information*, n° 23, pp. 36-39.

VITALE B., (1995). From local to global ; Local modeling, programming and the unfolding of local models in the exploratory learning of mathematics and science, in A. diSessa, C.Hoyles, R. Noss and L. Edwards (eds.). *The design of computational media to support exploratory learning*. New York : Springer, pp. 45-58.

VITALE B., (1995a). The representation, the understanding and the mastering of experience ; Modeling and programming in a transdisciplinary context. Report to OECD-CERI (Program on innovations in the teaching of mathematics, science and technique in OECD countries, 1991-1996). Geneva : CRPP.