

APPRENDRE (PAR) LA RESOLUTION DE PROBLEMES

Roland CHARNAY,
Equipe de recherche "math" de l'INRP
PEN à Bourg-en-Bresse

"Pour un esprit scientifique, toute connaissance est une réponse à une question. S'il n'y a pas eu de question, il ne peut y avoir connaissance scientifique. Rien ne va de soi. Rien n'est donné. Tout est construit".

(BACHELARD "La formation de la pensée scientifique" VRIN)

LEÇONS DE L'HISTOIRE ?

L'histoire des mathématiques, dans la complexité de ses évolutions et de ses révolutions, illustre bien cette citation de BACHELARD. Les mathématiques ont été construites en réponse à des questions qui se sont traduites en autant de problèmes. Ces questionnements ont varié dans leurs origines et dans leurs contextes : problèmes d'ordre domestique (partages de terres, calculs de crédits ...) ; problèmes posés en étroite imbrication avec d'autres sciences (astronomie, physique ...) ; spéculations en apparence "gratuites" sur des "objets" appartenant aux mathématiques elles-mêmes ; nécessité d'organiser des éléments déjà existants, de les structurer par exemple pour les besoins de l'exposition (enseignement ...), etc ...

Autant dire que l'activité de résolution de problèmes a été au cœur même de l'élaboration de la science mathématique. "Faire des mathématiques, c'est résoudre des problèmes !", ne craignent pas d'affirmer certains.

Mais cette élaboration ne va pas sans difficulté. Les problèmes résistent souvent, les solutions sont presque toujours partielles, même si des éclairs "de génie" provoquent des avancées spectaculaires ... qui mettent parfois du temps à être reconnues. "Dans la fréquentation des textes originaux et aussi dans celle d'ouvrages généraux – somme du savoir historiquement accumulé dans ce domaine – nous avons découvert un tissu complexe et foisonnant fait de conjectures, d'hésitations, d'impairs, de modèles concurrents, d'intuitions fulgurantes et aussi de moments d'axiomatisation et de synthèse", écrivent A. DAHAN-DALMEDICO et J. PEIFFER dans l'avertissement de "Une histoire des mathématiques" (1)

Ces quelques considérations (très schématiques) sur l'origine des connaissances mathématiques et sur les conditions de leur élaboration peuvent-elles trouver un écho dans une réflexion sur la question des apprentissages mathématiques dans le cadre scolaire ? La réponse doit être prudente et nuancée : les outils ou notions élaborés à une époque donnée l'ont en effet été dans un contexte culturel, socio-économique ... , qui n'est plus celui dans lequel vivent nos

élèves. Reste que ce sont les problèmes qui leur ont donné naissance (et ceux qu'elles ont posés par la suite) qui ont donné sens aux mathématiques produites ! Là est peut-être la principale leçon à retenir pour l'enseignement.

CONSTRUIRE DU SENS ...

L'un des enjeux essentiels (en même temps qu'une des difficultés principales) de l'enseignement des mathématiques est précisément que ce qui est enseigné soit chargé de signification, ait du sens pour l'élève.

Pour G. BROUSSEAU, *"le sens d'une connaissance mathématique se définit :*

– non seulement par la collection des situations où cette connaissance est réalisée en tant que théorie mathématique ; non seulement par la collection des situations où le sujet l'a rencontrée comme moyen de solution,

– mais aussi par l'ensemble des conceptions qu'elle rejette, des erreurs qu'elle évite, des économies qu'elle procure, des formulations qu'elle reprend, etc ..."(2)

Ajoutons que la construction de la signification d'une connaissance doit être envisagée à deux niveaux :

– un niveau "externe" : quel est le champ d'utilisation de cette connaissance, et quelles sont les limites de ce champ ?

– un niveau "interne" : comment fonctionne tel outil et pourquoi fonctionne-t-il ? (par exemple, comment fonctionne un algorithme et pourquoi conduit-il au résultat recherché ?)

La question essentielle de l'enseignement des mathématiques est donc : comment faire pour que les connaissances enseignées aient du sens pour l'élève ?

L'élève doit non seulement être capable de redire ou de refaire, mais aussi de réinvestir dans des situations nouvelles, d'adapter, de transférer ses connaissances pour résoudre des problèmes nouveaux.

Et c'est d'abord en faisant apparaître les notions mathématiques comme outils pour résoudre des problèmes qu'on permettra aux élèves de construire du sens. Ce n'est qu'ensuite que ces outils pourront être étudiés pour eux-mêmes.

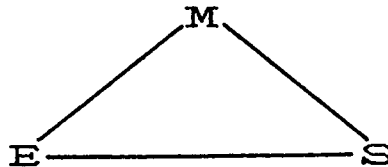
STRATEGIE D'APPRENTISSAGE

Se pose alors à l'enseignant la question du choix d'une stratégie d'apprentissage. Ce choix (que chacun fait au moins implicitement) est influencé par de nombreuses variables : le point de vue de l'enseignant sur la discipline enseignée (qu'est-ce que les mathématiques ? qu'est-ce que faire des mathématiques ?), son point de vue sur les objectifs généraux de l'enseignement et sur ceux spécifiques aux mathématiques, son point de vue sur les élèves (leurs possibilités, leurs attentes, ...), l'image qu'il se fait des demandes de l'institution (explicites, implicites ou supposées), de la demande sociale ou encore de celle des parents, ...

Pour décrire quelques modèles d'apprentissage, on peut s'appuyer sur l'idée de "contrat didactique" tel que G. BROUSSEAU l'a défini : "ensemble des comportements (spé-

cifiques) du maître qui sont attendus de l'élève et ensemble des comportements de l'élève qui sont attendus du maître, et qui règlent le fonctionnement de la classe et les rapports maître-élèves-savoir, définissant ainsi les rôles de chacun et la répartition des tâches : qui peut faire quoi ? qui doit faire quoi ? quels sont les buts et les enjeux ? ...”

Ainsi une situation d'enseignement peut être regardée au travers des relations qui se "jouent" entre ces 3 pôles : maître, élève, savoir :



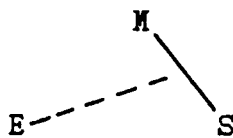
en analysant :

- la répartition des rôles de chacun,
- le projet de chacun,
- les règles du jeu : qu'est-ce qui est permis, qu'est-ce qui est réellement demandé, qu'est-ce qui est attendu, que faut-il faire ou dire pour "montrer qu'on sait"... ?

Très schématiquement, on décrira 3 modèles de référence :

(1) Le modèle dit "normatif" (centré sur le contenu)

Il s'agit d'apporter, de communiquer un savoir aux élèves. La pédagogie est alors l'art de communiquer, de "faire passer" un savoir.

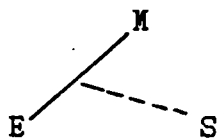


- le maître montre les notions, les introduit, fournit les exemples, ...
- l'élève apprend d'abord, écoute, doit être attentif, puis imite, s'entraîne, s'exerce, et enfin applique.
- le savoir est déjà achevé, déjà construit.

On reconnaît là les méthodes parfois appelées dogmatiques (de la règle aux applications) ou maïeutiques (questions/réponses).

(2) Le modèle dit "incitatif" (centré sur l'élève)

Sont d'abord sollicités chez l'élève : ses intérêts, ses motivations, ses besoins propres, son environnement, ...

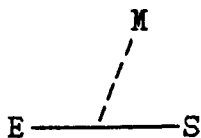


- le maître écoute l'élève, suscite sa curiosité, l'aide à utiliser des sources d'information, répond à ses demandes, le renvoie à des outils d'apprentissage (fichiers ...), cherche une meilleure motivation (milieu : calcul vivant de FREINET, centres d'intérêt de DECROLY)
- l'élève cherche, organise, puis étudie, apprend (souvent de manière proche de l'enseignement programmé)
- le savoir est lié aux nécessités de la vie, de l'environnement (la structure propre de ce savoir passe au second plan)

On reconnaît là les différents courants dits des "méthodes actives".

(3) Le modèle dit "appropriatif" (centré sur la construction du savoir par l'élève)

On se propose de partir des "modèles", des conceptions existantes chez l'élève et de les "mettre à l'épreuve" pour les améliorer, les remettre en cause ou en construire de nouveaux.



- le maître propose et organise une suite de situations en jouant sur diverses contraintes (variables didactiques à l'intérieur de ces situations), organise les différentes phases (recherche, formulation, validation, institutionnalisation), gère la communication dans la classe, propose le moment venu les éléments conventionnels du savoir (notations, terminologie ...),
- l'élève essaie, cherche, propose des solutions, les confronte avec ses pairs, les défend ou les conteste ...,
- le savoir est considéré avec sa logique propre

Notons qu'aucun enseignant ne relève exclusivement de l'un des modèles, que l'acte pédagogique dans toute sa complexité utilise des éléments relevant de chacun des modèles ... mais que, malgré tout, chacun fait choix, consciemment ou non, et de manière privilégiée de l'un d'entre eux.

Ajoutons que l'étude de ces modèles fournit un bon outil d'analyse des situations didactiques et de réflexion pour les enseignants en formation.

TROIS LIEUX DE L'ACTIVITE PEDAGOGIQUE paraissent privilégiés pour différencier ces trois modèles et réfléchir à leur mise en œuvre :

- le comportement de l'enseignant face aux erreurs de ses élèves : quelle interprétation en fait-il ? comment intervient-il ? pour quoi faire ? que demande-t-il alors aux élèves ?
- les pratiques d'utilisation de l'évaluation : à quoi sert l'évaluation ? à quel moment intervient-elle dans le processus d'apprentissage ? sous quelles formes ? ...
- le rôle et la place que l'enseignant assigne à l'activité de résolution de problèmes : qu'est-ce pour lui qu'un problème ? quand utilise-t-il des problèmes, à quels moments de l'apprentissage ? dans quel but ? ...

Dans la suite, nous nous intéressons essentiellement à ce troisième point. Pour cela, nous proposons un schéma inspiré d'un article de R. CHAMPAGNOL (Revue Française de Pédagogie) qui résume les diverses positions par rapport à l'utilisation de la résolution de problèmes en relation avec les trois modèles d'apprentissage décrits auparavant.

1) Le problème comme critère de l'apprentissage (modèle dit "normatif")

mécanismes	}	• leçons (acquisition)
		• exercices (entraînement)
sens	}	• problèmes (utilisation des connaissances pour l'élève, contrôle pour le maître)

– ce qui conduit souvent à étudier des types de problèmes : confronté à un nouveau problème l'élève cherche s'il en a déjà résolu un de même type ;

– c'est le modèle de référence de nombreux manuels, l'idée sous-jacente étant qu'il faut partir du facile, du simple pour accéder au complexe et qu'une connaissance complexe peut-être, pour l'apprentissage, décomposée en une suite de connaissances faciles à assimiler et qu'enfin tout apprentissage doit aller du concret vers l'abstrait.

2) Le problème comme mobile de l'apprentissage (modèle dit "incitatif")

motivation	[{	• situation tirée du vécu
mécanisme			• apport de connaissances
réinvestissement			• entraînement, exercices
		}	• problèmes

– au départ, on souhaite que l'élève soit un "demandeur actif, curieux de connaissances fonctionnellement utiles" ;

– mais les situations "naturelles" sont souvent trop complexes pour permettre à l'élève de construire lui-même les outils et surtout trop dépendantes de "l'occasionnel" pour que soit pris en compte le souci de cohérence des connaissances.

3) Le problème comme moyen de l'apprentissage (modèle dit "appropriatif")

action	[{	• situation-problème (l'élève cherche une procédure de résolution)
formulation			• formulation-confrontation des procédures, mise à l'épreuve
validation			• nouvelle situation avec des contraintes différentes : nouvelles procédures ... etc ...
la résolution de problèmes comme source, lieu et critère de l'élaboration du savoir			• nouvel outil
institution- nalisation		}	• entraînement
			• synthèse, langage conventionnel
			• problèmes : évaluation pour le maître, réinvestissement pour l'élève.

– c'est principalement au travers de la résolution d'une suite de problèmes choisis par l'enseignant que l'élève construit son savoir, en interaction avec les autres élèves ;

– la résolution de problèmes (et non de simples exercices) intervient ainsi au départ de l'apprentissage.

OPTIONS EN FAVEUR D'UN CHOIX

Ces options sont appuyées par des résultats de recherche et relèvent pour une part de choix idéologiques. Elles sont sous tendues par la question : "comment les élèves apprennent-ils ?"

1) Les connaissances ne s'entassent pas, ne s'accumulent pas

Mais elles passent par des états d'équilibre à des états de déséquilibre au cours desquels les connaissances antérieures sont mises en défaut. Une nouvelle phase d'équilibre correspond alors à une phase de réorganisation des connaissances où les nouveaux savoirs sont intégrés au savoir ancien, lui-même parfois modifié (cf PIAGET).

Ainsi un nouveau savoir peut remettre en cause les conceptions de l'élève nées d'un savoir antérieur : par exemple, l'étude des décimaux devrait conduire l'élève à remettre en cause l'idée que la multiplication "agrandit" toujours (idée qu'il a pu élaborer par l'étude des naturels).

De même un savoir acquis peut être aisément mis en échec pour peu qu'on change certaines variables de la situation : ainsi G. VERGNAUD a-t-il montré que la "notion d'addition" ou les structures additives ne sont totalement maîtrisées que très tard ...

2) Le rôle de l'action dans l'apprentissage

PIAGET a également souligné le rôle de "l'action" dans la construction des concepts. Il s'agit bien entendu de l'activité propre de l'élève qui ne s'exerce pas forcément sur la manipulation d'objets matériels : mais d'une action finalisée, problématisée, supposant une dialectique pensée-action très différente d'une simple manipulation guidée aboutissant souvent à une tâche de constat par l'élève ... Il faut souligner ici le rôle de l'anticipation : l'activité mathématique consiste souvent en l'élaboration d'une stratégie, d'une procédure permettant d'anticiper le résultat d'une action non encore réalisée ou non actuelle sur laquelle on dispose de certaines informations.

3) Il n'y a apprentissage que si l'élève perçoit un problème à résoudre ...

... donc s'il reconnaît la nouvelle connaissance comme moyen de réponse à une question. Là encore on peut solliciter PIAGET pour qui la connaissance n'est ni simplement empirique (constats sur le milieu), ni préformée (structures innées), mais résultat d'une interaction sujet-milieu (cf point 2 ci-dessus). Ce qui donne du sens aux concepts ou théories, ce sont les problèmes qu'ils ou elles permettent de résoudre.

Ainsi, c'est la résistance de la situation qui oblige le sujet à s'y accommoder, à remettre en cause ou à percevoir les limites de ses connaissances anciennes et à élaborer de nouveaux outils (idée de conflit cognitif). Il faudra en tenir compte pour le choix des situations.

Dans la même perspective, à la motivation externe (besoins de la vie courante, notes, ...) dont il ne faut cependant pas négliger l'intérêt, on est amené à préférer la motivation propre offerte par l'activité proposée (difficulté qu'on a envie de surmonter, de franchir, ...) : le problème est alors perçu comme un défi intellectuel.

4) Les productions de l'élève sont une information sur son "état de savoir"

En particulier, certaines productions erronées (notamment si elles persistent) ne correspondent pas à une absence de savoir, mais plutôt à une manière de connaître (qui parfois a réussi dans d'autres contextes) contre laquelle l'élève devra construire la nouvelle connaissance. L'élève n'a jamais la tête vide : il ne peut être considéré comme une page blanche sur laquelle il suffirait d'imprimer des connaissances correctes et bien énoncées.

5) Les concepts mathématiques ne sont pas isolés

Il faut plutôt parler de champs de concepts reliés entre eux et qui se consolident mutuellement : d'où l'idée de proposer aux élèves des champs de problèmes permettant la construction de ces réseaux de concepts qu'il convient au préalable d'élucider (tâche qui reste à faire pour l'essentiel ...)

6) L'interaction sociale est un élément important de l'apprentissage

Il s'agit aussi bien des relations maître-élèves que des relations élèves-élèves, mises en œuvre dans les activités de formulation (dire, décrire, exprimer, ...), de preuve (convaincre, contester, ...) ou de coopération (aide, travail coopératif, ...) : idée de conflit socio-cognitif, notamment entre pairs.

DANS LE TRIANGLE ENSEIGNANT-ELEVES-PROBLEME

Essayons de préciser les caractéristiques de ces relations dans le cadre d'un apprentissage s'appuyant sur la résolution de problèmes.

Relation entre la situation-problème et les élèves :

- l'activité doit proposer un véritable problème à résoudre pour l'élève : il doit être compris de tous les élèves (c'est-à-dire que ceux-ci peuvent envisager ce qu'est une réponse au problème) ;
- elle doit permettre à l'élève d'engager des connaissances antérieures ..., de ne pas rester démuné ;
- mais cependant, elle doit offrir une résistance suffisante ... pour amener l'élève à faire évoluer les connaissances antérieures, à les remettre en cause, à en élaborer de nouvelles (problème ouvert à la recherche de l'élève, sentiment de défi intellectuel ...) ;
- enfin il est souhaitable que la sanction (la validation) ne vienne pas de l'enseignant, mais soit apportée par la situation elle-même.

Relation enseignant-élèves :

- quelle perception l'élève a-t-il des attentes de l'enseignant ? les relations pédagogiques doivent conduire les élèves à percevoir qu'il leur appartient d'établir eux-mêmes la validité de ce qu'ils avancent, de demander des preuves aux autres, ...
- une distinction nette doit être établie entre les apports de l'enseignant et les preuves qu'il appartient aux élèves d'apporter.

Relation enseignant-situation :

– il appartient à l'enseignant de situer la situation proposée dans le cadre de l'apprentissage visé, de **distinguer l'objectif immédiat des objectifs plus lointains**, de choisir certains paramètres de la situation (idée de "variables didactiques" de la situation), ...

– **la connaissance visée doit être la plus adaptée** pour résoudre le problème considéré (du point de vue des élèves) ;

– il lui appartient également d'observer les incompréhensions, **les erreurs significatives**, de les analyser et de les prendre en compte pour la mise au point de nouvelles situations.

– il lui appartient enfin de **provoquer ou de faire les synthèses**.

QUELS PROBLEMES CHOISIR ? QUELLE MISE EN OEUVRE PEDAGOGIQUE ?

Une précision tout d'abord : le terme "**problème**" utilisé ici ne se réduit pas à la situation proposée (énoncé, question, ...). Il se définit plutôt comme un triplet (situation, élève, environnement). Il n'y a problème que si l'élève perçoit une difficulté : telle situation qui "fait problème" pour tel élève est immédiatement résolue par tel autre (et n'est donc pas perçue par ce dernier comme un problème). Il y a donc l'idée d'obstacle à surmonter. Enfin l'environnement est un élément du problème, en particulier les conditions didactiques de la résolution (organisation de la classe, échanges, attentes exprimées ou supposées de l'enseignant, ...).

Il convient également sans doute de différencier **les objectifs de l'activité de résolution de problèmes** :

– objectifs d'ordre "méthodologique" : en un mot, "apprendre à résoudre des problèmes, à chercher". L'objectif est en quelque sorte dans l'activité elle-même (cf. pratique du "problème ouvert" décrite par l'IREM de LYON) ;

– objectifs d'ordre "cognitif" : on vise une connaissance (notion, algorithme, ...) au travers de l'activité de résolution de problèmes. On peut encore à cet égard distinguer entre les problèmes qui se situent à la source d'un nouvel apprentissage et ceux qui sont utilisés comme problèmes de réinvestissement.

Dans cette dernière optique, on peut considérer quelques questions qui se posent à l'enseignant pour une connaissance donnée :

– choix d'enseigner telle conception de la connaissance considérée (problème de transposition didactique) : quelles sont les conceptions envisageables (état actuel de cette connaissance, de son enseignement, états antérieurs, évolution historique, différents aspects, ...) : questions d'épistémologie ; quelles sont les conceptions possibles avec les élèves de tel niveau d'enseignement, en rapport avec les niveaux précédents et suivants ; quel type de savoir vise-t-on (formel, descriptif ou opératoire, fonctionnel, ...) ?

– choix de la situation ou plutôt de la suite de situations à proposer aux élèves. L'idée d'obstacle est ici importante : si les connaissances antérieures sont commodes pour résoudre le problème, il n'y a pas d'intérêt à mobiliser un nouvel outil. Le choix est difficile : il ne

faut pas démobiliser les élèves par une difficulté trop grande, ni donner l'impression "d'enfoncer des portes ouvertes avec un bull-dozer"...

– choix d'une mise en œuvre pédagogique. Il n'y a pas de solution-type, mais on peut avancer avec la plupart des didacticiens actuels une stratégie de référence comportant plusieurs étapes : chercher individuellement ou/et en groupes, formuler oralement ou par écrit, valider, institutionnaliser (identification du savoir, conventions pour le langage, les notations, ...), évaluer ... processus qui peut s'étendre sur plusieurs séances et même utiliser plusieurs situations-problèmes. Pour les questions de gestion de la classe, on peut consulter ERMEL "Apprentissages mathématiques à l'école élémentaire, Cycle Moyen" (tome 1, chapitre Problèmes).

BIBLIOGRAPHIE

- (1) A. DAHAN-DALMEDICO et J. PEIFFER, "Une histoire des mathématiques", Point-Sciences, (Le Seuil), p.9
 - (2) G. BROUSSEAU, "Les obstacles épistémologiques et les problèmes d'enseignement", Recherches en didactique des mathématiques, (La Pensée Sauvage), n° 4.2, p.170
 - (3) ERMEL, "Apprentissages mathématiques à l'école élémentaire", cycle moyen, (SERMAP-HATIER), 3 tomes
 - (4) G. VERGNAUD, "Quelques orientations théoriques et méthodologiques des recherches françaises en didactique des mathématiques", Recherches en didactique des mathématiques, (La Pensée Sauvage), n° 2.2, p. 220
 - (5) M.N. AUDIGIER et J. COLOMB, "Enquête sur l'enseignement des mathématiques à l'école élémentaire", publication INRP
 - (6) R. CHAMPAGNOL, "Aperçus sur la pédagogie de l'apprentissage par résolution de problèmes", Revue Française de Pédagogie
 - (7) IREM de LYON, "La pratique du problème ouvert"
 - (8) Equipe math INRP, "Comment font-ils ? L'écolier et le problème de mathématiques", Rencontres Pédagogiques, n° 4
-